2. 빗면 위의 자기 제동

모범 답안

(A) 장치 꾸미기와 소개

A1. 자석과 지구 자기장의 상호작용에 의한 돌림힘을 줄이려면, 그림처럼 자석이 극을 남북 방향으로 맞춘 채 굴러 내려가도록 빗면의 방향을 맞추어야 한다.

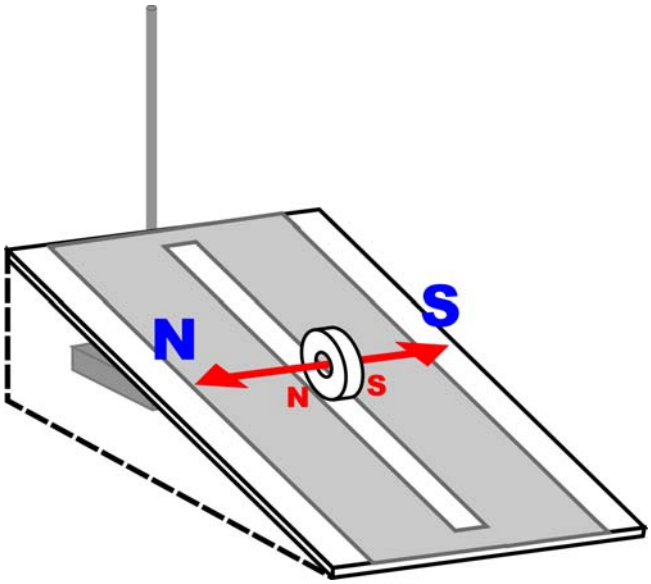


그림 1. 빗면의 방향 맞추기

A2.

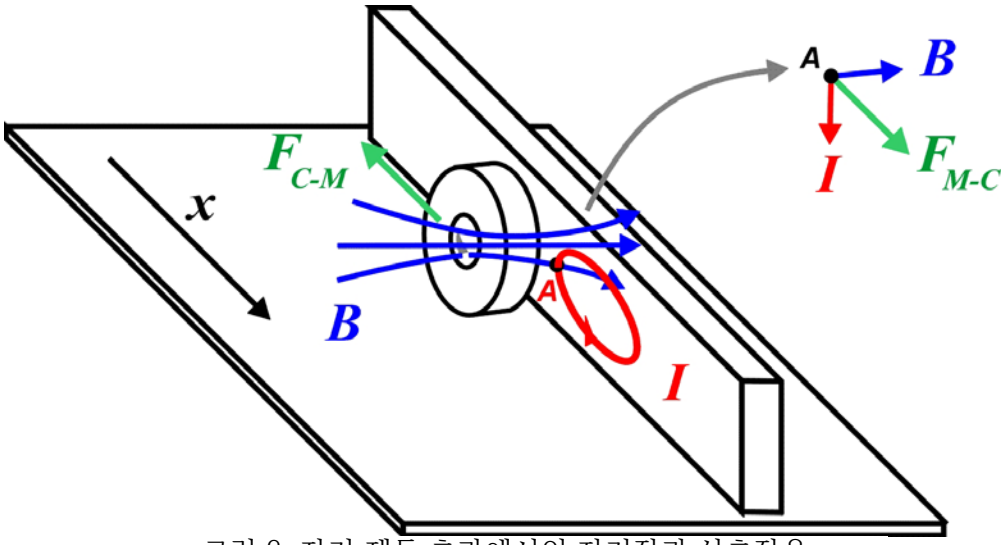


그림 2. 자기 제동 효과에서의 자기장과 상호작용

.

벡터 분석을 곁들인 답:
도체 위의 점 A를 생각하자. 자석이 움직이면 그 자기장이 도체를 훑고 지나가며 패러데이 법칙에 따라 전기장을 유도하고 전류를 흐르게 하는데, 그 방향은 렌츠 법칙으로 정할 수 있다. 그림처럼 임의의 고리를 고르자. 점 A에서 자기장과 전류는 x+ 방향을 향하는 로런츠 힘 F_{M-C}를 만든다. 이 힘은 도체 속 전자에 작용한다.

한편 뉴턴의 제3법칙에 따라 크기는 같고 방향은 반대인 반작용 힘 F_{C-M}이 자석에 작용하며, 이것이 자기 제동력이다.

(B) 자기 제동력 조사

B1. **거듭제곱 지수 n 구하기: 자기 제동력의 속도 의존성**

이 실험에서 학생은 시간을 재기 시작하기 전에 자석이 먼저 종단 속도에 이르러야 함을 알아야 한다. 관찰해 보면 자석은 거의 곧바로 종단 속도에 이른다. 확실히 하려고, 시간을 재기 전에 자석이 약 5 cm를 먼저 지나가게 한다. 여기서는 출발점에서 도착점까지 s = 250 mm를 써서 속력을 얻는다:

여러 데이터를 얻으려고 빗면 각을 바꾼다. l = 425 mm로 주어졌을 때 h를 재며, 여기서 sin

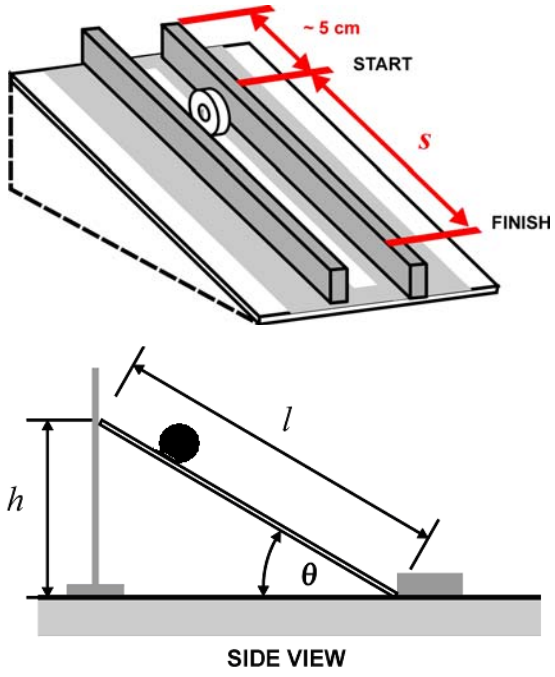


그림 3. a. 속도 재기 b. 빗면 기울기 재기

자석-도체 거리가 일정하게 유지되므로(d ≈ 5 mm), 자기 제동력은 자석의 속도에만 의존하며, 다음과 같이 간단히 할 수 있다:

$$F_{MB} = -k_0 d^p v^n = -k_1 v^n$$

여기서 $k_1 = k_0 d^p$는 이 실험에서 상수이다.

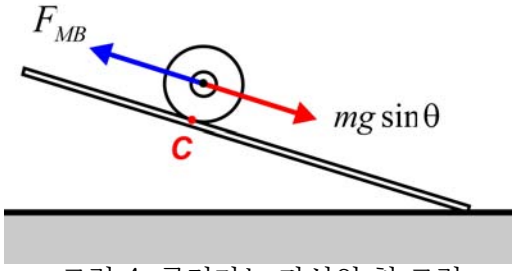


그림 4. 굴러가는 자석의 힘 그림

자석이 종단 속도에 이르면 전체 돌림힘은 0이어야 한다. 접촉점 C에 대한 운동 방정식은 다음과 같다:

$$\sum \tau_C = 0$$
$$mg\sin\theta\, R + F_{MB} R = 0$$
$$mg\sin\theta - k_1 v^n = 0$$
$$\sin\theta = \frac{k_1}{mg} v^n$$

거듭제곱 지수 n을 계산하려면:

$$\ln\sin\theta = \ln\left(\frac{k_1}{mg}\right) + n\ln(v)$$

실험 데이터:

H **(mm)**	$\bar{t}$ **(s)**	$\mathrm{Sin}\,\theta$	v mm/s	$\ln(v)$	$\ln(\sin\theta)$
23±0.5	**22.98±0.005**	0.054	10.88	2.39	-2.92
40	**12.78**	0.094	19.56	2.97	-2.36
50	**10.17**	0.118	24.58	3.20	-2.14
60	**8.62**	0.141	29.00	3.37	-1.96
70	**6.96**	0.165	35.92	3.58	-1.80
80	**6.09**	0.188	41.05	3.71	-1.67
91	**5.48**	0.214	45.62	3.82	-1.54
101	**5.05**	0.238	49.50	3.90	-1.44
111	**4.57**	0.261	54.70	4.00	-1.34
120	**4.17**	0.282	59.95	4.09	-1.26
130	**3.72**	0.306	67.20	4.21	-1.18
150	**3.25**	0.353	76.92	4.34	-1.04
170	**2.81**	0.400	88.97	4.49	-0.92

표 1. 거듭제곱 지수 n을 구하기 위한 실험 데이터

주:

- 굵은 열은 실험에서 직접 얻은 데이터이다.
- h 측정의 대표 오차는 첫째 줄에 나타냈다:
  $h = (23 \pm 5)\,mm$. 나머지 h 데이터에도 비슷한 오차가 적용된다.
- 데이터 t는 3-5번 잰 값의 평균이다. 표준 편차 오차는 꽤 작지만(±0.1 s), 오차는 관찰자가 스톱워치를 누르는 반응 지연이 지배할 것이다. 사람 눈의 반응으로 널리 받아들여지는 값은 0.25초이며, 이 실험에서는 더 보수적인 값(±0.5 s)을 고른다.

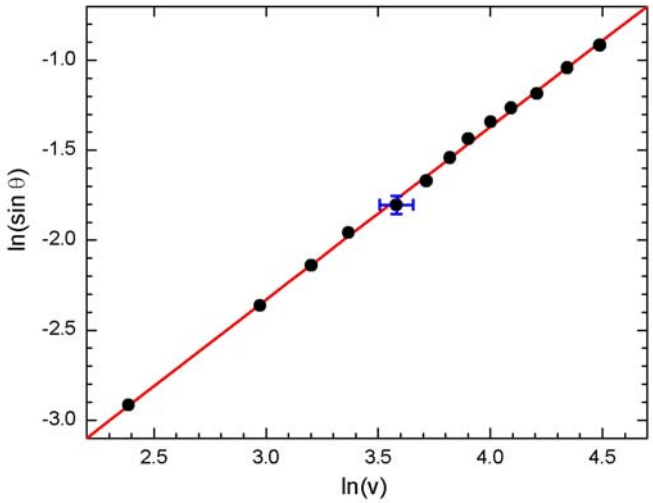


그림 5. ln(sin θ) 대 ln(v) 그래프. 대표 오차 막대는 가운데 데이터에 나타냈다.

그림 5와 같은 선형 회귀법이나 그래프 방법으로 기울기에서 n을 구할 수 있다.

$$n = 0.96$$

그 결과는 이론값 n = 1에 매우 가깝다. 그림 5에 나타낸 데이터(그리고 상관 계수 r = 0.9995)로부터, 이 실험은 자기 제동력의 선형 속도 의존성을 매우 잘 보여 줌을 알 수 있다. 이 결과는 독립된 세 사람과 장치로 되풀이하고 확인했다.

n의 오차 어림:

시간이 많이 걸릴 수 있는 자세한 오차 전파 분석 대신, 올림피아드에서는 다음과 같이 오차를 어림할 수 있다:

그림 5의 데이터 점들의 대표 오차는 가운데 데이터에서 얻을 수 있다:

$$\ln v = 3.58 \pm 0.075$$
$$\ln(\sin\theta) = -1.8 \pm 0.075$$

이 오차들은 h와 t의 불확도에서 전파된 것이다.

거듭제곱 지수 n은 그림 5의 기울기에서 얻을 수 있다: $n = \Delta y / \Delta x$ 여기서 $y = \ln(\sin\theta)$ 그리고 $x = \ln v$.

그림 5의 데이터에서: $\Delta x = 2.1$ 그리고 $\Delta y = 2.0$, 그리고 대표 오차: $\delta x = 0.075$ 그리고 $\delta y = 0.075$.

따라서 n의 오차 어림:

$$\frac{\Delta n}{n} = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{\Delta y}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0.075}{2.1}\right)^2 + \left(\frac{0.075}{2.0}\right)^2} = 0.05$$

$$\Delta n = 0.05\, n = 0.048$$

따라서 실험 결과는 다음과 같이 결론지을 수 있다:

$$\boxed{n = 0.96 \pm 0.05}$$

B2. **거듭제곱 지수 p 구하기: 자기 제동력의 자석-도체 거리 의존성**

이 실험에서는 빗면 각을 한 값 h=50 mm (l=425 mm)로 써서
$\theta = \arcsin\mathrm{s}(h/l) = 6.8^{\circ}$이다. 지나가는 거리는 그대로 s = 250 mm이며, 앞에서처럼 자석이 약 5 cm를 먼저 지나간 뒤 시간을 잰다.

운동 방정식은 앞 절과 비슷하다:

$$\sum \tau_C = 0$$
$$mg\sin\theta\, R + F_{MB} R = 0$$
$$mg\sin\theta - k_0\, d^p v^n = 0$$
$$v^{-n} = \frac{k_0}{mg\sin\theta} d^p$$
$$-n\ln v = \ln\left(\frac{k_0}{mg\sin\theta}\right) + p\ln d$$

여기서도 선형 회귀나 그래프 방법으로 p를 얻을 수 있으며, 앞에서 얻은 다음 값을 쓴다:

실험 데이터:

d **mm**	$\bar{t}$ **S**	V mm/s	$-n\ln v$	$\ln d$
4.5±0.5	**13.53±0.005**	18.48	-2.80	1.50
5.5	**9.60**	26.04	-3.13	1.70
6.5	**6.70**	37.31	-3.47	1.87
7.5	**4.99**	50.10	-3.76	2.01
8.5	**3.47**	72.05	-4.11	2.14
9.5	**2.87**	87.11	-4.29	2.25
10.5	**2.14**	116.82	-4.57	2.35
11.5	**1.66**	150.60	-4.81	2.44

표 2. 거듭제곱 지수 p를 구하기 위한 실험 데이터

주:
거리 d는 자석의 중심에서 잰다.

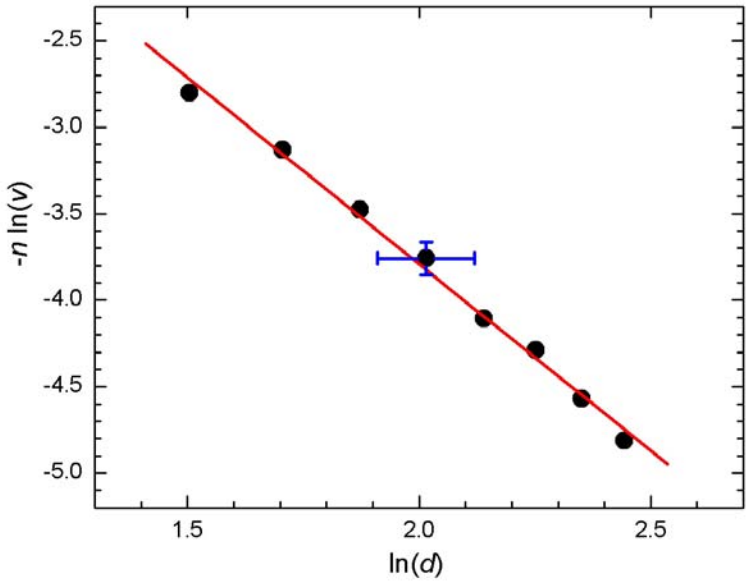


그림 6. −n ln(v) 대 ln(d) 그래프. 대표 오차 막대는 가운데 데이터에 나타냈다.

선형 회귀 계산으로:

$$p = -2.16$$

따라서 자기 제동력은 자석-도체 거리 d에 매우 민감하며, 그 관계는 거의 역제곱이다. 간단히 말해 자석이 도체에서 멀어질수록 자기 제동력은 약해진다. 이 결과는 독립된 세 사람과 장치로 되풀이하고 확인했다.

p의 오차 어림:

앞 절과 비슷하게 그림 6에 나타낸 가운데 데이터를 쓴다:

$$\ln d = 2.01 \pm 0.105$$

$$-n \ln(v) = -3.76 \pm 0.095$$

거듭제곱 지수 p는 그림 6의 직선 기울기에서 얻을 수 있다: $p = \Delta y / \Delta x$

여기서 $y = -n \ln v$ 그리고 $x = \ln d$.

그림 6의 데이터에서 다음을 얻는다: $\Delta x = 0.94$ 그리고 $\Delta y = 2.01$, 대표 오차:

$\delta x = 0.105$ 그리고 $\delta y = 0.095$

따라서 p의 오차 어림:

$$\frac{\Delta p}{p} = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{\Delta y}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0.105}{0.94}\right)^2 + \left(\frac{0.095}{2.01}\right)^2} = 0.12$$

$$\Delta p = 0.12\,p = 0.26$$

따라서 실험 결과는 다음과 같이 결론지을 수 있다:

$$\boxed{p = -2.2 \pm 0.3}$$

[채점 기준] 실험 문제 2

빗면 위의 자기 제동

(A.1) **1.0**	1.0	빗면 궤도의 방향 맞추기
(A.2) **1.0**	1.0	자기력선과 힘의 알맞은 그림으로 설명
(B.1) **4.0**	0.5	종단 속도 인식
	0.5	운동 방정식
	0.5	데이터 5세트 이상 + 해당 계산, 데이터 세트마다 0.1.
	0.25 단위	
	0.5	그래프
	0.25 선형 회귀나 그래프 분석	
	0.5	최종 결과: $0.5 \le n \le 1.5$
	0.5	최종 결과: $0.9 \le n \le 1.1$
	0.5	오차 분석
(B.2) **4.0**	0.5	운동 방정식
	0.5	데이터 5세트 이상 + 해당 계산, 데이터 세트마다 0.1.
	0.25 단위	
	0.5	그래프
	0.25 선형 회귀나 그래프 분석	
	0.5	최종 결과 p의 올바른 부호(−)
	0.5	최종 결과: $1.0 \le \lvert p \rvert \le 3.0$
	0.5	최종 결과: $1.5 \le \lvert p \rvert \le 2.5$
	0.5	오차 분석