문제 2: 물이 채워진 용기의 진동

안이 물로 가득 찬 알루미늄 용기의 두께 t를 비파괴 측정으로 구해야 한다. 알루미늄 용기는 원통 하나와 끝판 두 개로 이루어져 있다. 원통의 길이는 L, 바깥 반지름은 R이다. 용기의 전체 길이는 h이다. 두 끝판의 두께는 모두 0.60 cm이다(그림 1 참조). 이 두께의 오차는 무시해도 된다. *이 문제에서는 질량과 길이의 단위로 각각 그램과 센티미터를 쓰시오.*

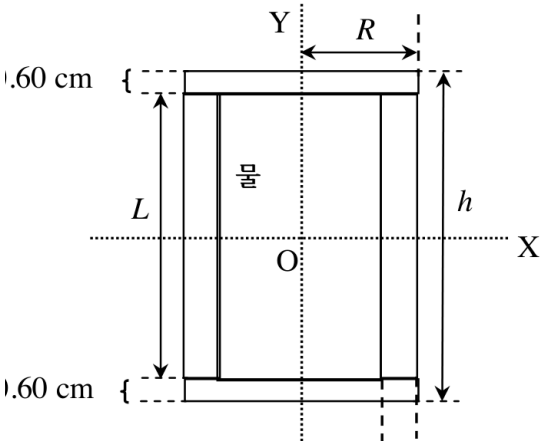


그림 1

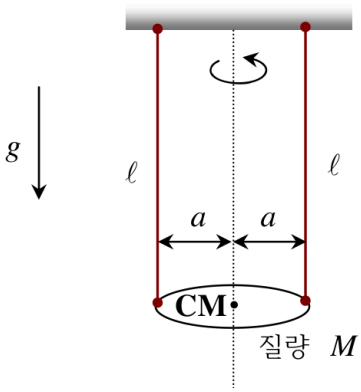


그림 2

그림 2는 질량 M의 이른바 두 줄 매달기를 보여 준다. 두 줄의 길이는 각각 ℓ로 같다. M의 작은 진폭 진동의 주기 T는 다음과 같다.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}\cdot\frac{I}{Ma^2}} \qquad \text{..... (i)}$$

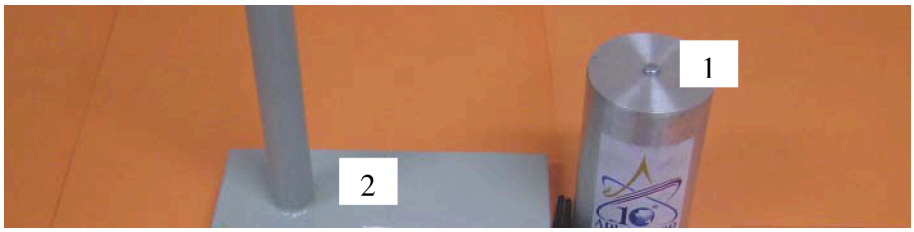
여기서 I는 M의 질량중심을 지나는 연직축에 대한 유효 관성 모멘트이고, g는 방콕의 중력 가속도이다 $\left(g = 978\ \mathrm{cm\,s^{-2}}\right)$.

이 실험은 두 부분으로 이루어진다. 부분 I은 공식의 유도이고, 부분 II는 실제 실험이다.

장치

학생마다 다음이 주어진다.

1. 물이 채워진 용기
2. 스탠드
3. 스톱워치
4. 자
5. 나일론 실
6. 각도기
7. 마스킹 테이프
8. 칼(아래 그림에는 없다)



부분 I

[2.0점]

그림 1을 보고, 다음 양들을 R, L, t와 알루미늄의 밀도 ρ로 나타내는 **식을 유도**하시오.

i) 용기의 원통 몸체의 질량 (m_1),

ii) 끝판 하나의 질량 (m_2),

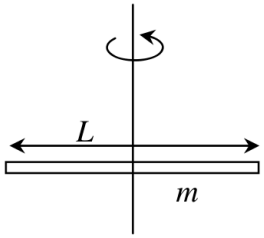
iii) 속 빈 곳 전체에 든 물의 질량 (m_3),

iv) 물이 채워진 용기의 전체 질량 (M), 그리고

v) 물을 **이상** 유체로 보았을 때, 물이 채워진 이 용기의 Y축(그림 1 참조)에 대한 유효 관성 모멘트 I_y.

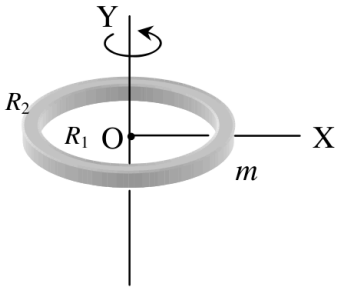
그런 다음 R, h, L을 재시오. 값들을 대입하여, ***위 i)–v)의 양들을 t로 나타내는 식을 유도***하시오. 알루미늄의 밀도는 $\rho = 2.70\ \mathrm{g/cm^3}$이고 물의 밀도는 $1.00\ \mathrm{g/cm^3}$이다.

힌트:



$$I = m\frac{L^2}{12}$$

가는 막대, 길이 L

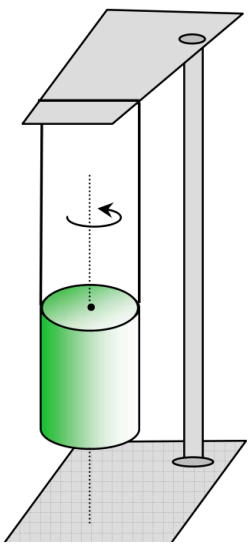


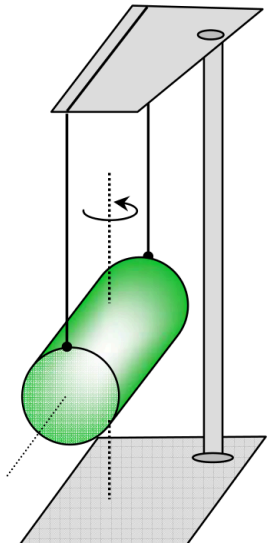
$$I_y = \frac{1}{2}m\left(R_2^2 + R_1^2\right),$$
$$I_x = \frac{1}{4}m\left(R_2^2 + R_1^2\right)$$

얇은 원통, 안쪽 반지름 R_1, 바깥 반지름 R_2

그림 3

부분 II





a) 대칭축에 대한 회전 진동

[4.0점]

고정된 ℓ 값 하나에 대해, 그림 4처럼 작은 진폭 진동의 주기 T_{y}를 정밀하게 재시오. 그런 다음 원통 벽의 두께 (t)의 값을 계산하시오.

두께의 실험 오차 Δt를 어림하시오.

이 t 값을 써서 m_1, m_2, m_3와 M의 값도 계산하시오.

b) 길이에 수직인 중심축에 대한 회전 진동

[2.8점]

용기의 두 줄 매달기를 그림 5처럼 바꾸고 (a)와 비슷한 측정을 하시오.
그런 다음 방금 구한 진동 주기와 (a)에서 구한 t, m_1, m_3, M의 값을 함께 써서, X축(그림 2와 그림 5 참조)에 대한 용기의 유효 관성 모멘트 $I_{\mathrm{x}}^{\mathrm{Exp}}$의 값을 계산하시오.
또한 (a)에서 계산한 물의 질량 전체가 이제 용기의 진동 운동에 참여하도록 묶여 있다고 가정하고, (a)에서 구한 t 값을 바탕으로 $I_{\mathrm{x}}^{\mathrm{Theo}}$ 값의 이론적 어림값을 계산하시오.

c) 관성 모멘트의 실험값과 이론값 비교

[1.2점]

$I_{\mathrm{x}}^{\mathrm{Theo}}$와 $I_{\mathrm{x}}^{\mathrm{Exp}}$ 값의 차 (ΔI_{x})는 얼마인가?
이 차가 통계적으로 유의하다고 생각하는가?
(b)의 진동 운동에 참여하는 물을 끝판에 붙은 원판으로 가정하고, 그 물이 전체 물의 질량에서 차지하는 백분율을 어림하시오.

힌트:

$$I_{\mathrm{x}}^{\mathrm{Theo}} = m_1\left[\frac{L^2}{12}+\frac{R^2+(R-t)^2}{4}\right]+2m_2\left[\frac{(0.6\ \mathrm{cm})^2}{12}+\frac{R^2}{4}+\left(\frac{L}{2}+\frac{0.6\,\mathrm{cm}}{2}\right)^2\right]+m_3\left[\frac{L^2}{12}+\frac{(R-t)^2}{4}\right]$$

****