문제 2: 물이 채워진 용기의 진동

부분 I

i) $m_1 = \rho\pi\left[R^2-(R-t)^2\right]L = \rho\pi\left(2Rt-t^2\right)L$ ..... (i)

ii) $m_2 = \rho\pi(0.6\,\text{cm})R^2$ ..... (ii)

iii) $m_3 = \pi(R-t)^2 L$ ..... (iii)

iv) $M = m_1+2m_2+m_3$ ..... (iv)

v) 이상 유체인 물은 물이 채워진 용기의 진동 운동에 참여하지 않는다.
따라서 관성 모멘트의 식에 물의 기여를 넣지 않는다.

$$I_y = \frac{1}{2}m_1\left[R^2+(R-t)^2\right]+2\left[\frac{1}{2}m_2R^2\right] \quad \text{..... (v)}$$

$\ell = 35.6$ cm, $g = 978$ cm s^{-2}, $a = R = 2.5$ cm,

$\rho = 2.70$ g cm^{-3}, $h = 9.2$ cm, $L = 9.2-1.2 = 8.0$ cm

$$m_1 = 339.3t-67.86t^2 \text{ g},$$

$$m_2 = 31.8 \text{ g},$$

$$m_3 = 157.1-125.7t+25.13t^2 \text{ g},$$

$$M = 220.7+213.6t-42.73t^2 \text{ g}$$

$$I_y = 198.8+2121t-1273t^2+339.3t^3-33.93t^4$$

부분 II

a)

$$T_y = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}\cdot\frac{I_y}{Ma^2}} \quad \text{..... (vi)}$$

50회 진동 시간이 43.3 s이므로

$$T_y = 0.866 \text{ s} \pm 0.004 \text{ s}$$

이 값들을 식 (vi)에 대입하면

$$t^4-10t^3+33.42t^2-41.97t+15.36 = 0 \quad \text{..... (vii)}$$

(vii)를 수치 반복법으로 풀면 $t = 0.62\ \text{cm} \pm 0.02\ \text{cm}$

(오차는 이 절차를 되풀이하거나 dT와 dt에 대한 미분 관계식으로 어림할 수 있다.)

따라서

$m_1 = 184 \pm 5\ \text{g},$

$m_2 = 31.8 \pm 0.2\ \text{g},$

$m_3 = 89 \pm 2\ \text{g},$

$M = 337 \pm 6\ \text{g}.$

b)

$$T_x = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}\cdot\frac{I_x}{Ma^2}} \qquad \text{..... (viii)}$$

$\ell = 33.6\ \text{cm},\ a = \frac{h}{2} = \frac{9.2}{2} = 4.6\ \text{cm}$

50회 진동 시간이 38.0 s ± 0.2 s이므로

$T_x = 0.760\ \text{s} \pm 0.004\ \text{s}$

그리고 $T_x = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}\cdot\frac{I_x}{Ma^2}}$ 에서 $\ell = 33.6\ \text{cm},\ a = \frac{h}{2} = \frac{9.2}{2} = 4.6\ \text{cm},$

$g = 978\ \text{cm s}^{-2},\ M = 337\ \text{g}$ 이므로

$I_x^{\text{Exp}} = 3036\ \text{g cm}^2 \pm 94\ \text{g cm}^2$

또한 $I_x^{\text{Theo}} = 3261\ \text{g cm}^2 \pm 68\ \text{g cm}^2$

c)

$\Delta I_x = I_x^{\text{Theo}} - I_x^{\text{Exp}} = 225\ \text{g cm}^2$

실험값 I_x^{Exp}은 I_x^{Theo}보다 225 g cm²만큼 작다.

이 차는 아마도 유의하며, 물의 점성이 작기 때문이다. 가운데 부분의 물은 용기의 진동 운동에 참여하지 않는다.

ΔI_x 는 가운데에 정지해 있는 원기둥 모양의 물 때문이라고 어림할 수 있다.

$$\Delta I_x = \pi(R-t)^2 \, \rho_{물} \left(\frac{h_{물}^2}{12} + \frac{(R-t)^2}{4} \right)$$

$$h_{물} \approx 5.7\,\text{cm}$$

이것은 다음 물의 질량에 해당한다: $\approx 63.8\,g$

진동에 참여하는 물의 백분율은 $\approx 28.5\%$

****