실험 문제 1: 진동하는 자기장 속 전도체의 부양

풀이

a. 패러데이 법칙을 쓰면

$$\epsilon(t) = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\sqrt{2}\,\omega\Phi_B^{rms}\cos(\omega t)$$

전체 부호는 채점하지 않는다.

전류는 문제에 주어진 자세한 힌트를 써서 다음과 같이 쓴다.

$$I(t) = -\frac{\sqrt{2}\,\omega\Phi_B^{rms}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos(\omega t-\delta) = -\frac{\sqrt{2}\,\omega\Phi_B^{rms}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos\left(\omega t-\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}\right)$$

이것은 (c)에서 쓸모 있도록 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$I(t) = -\frac{\sqrt{2}\,\omega\Phi_B^{rms}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}(\cos\delta\cos(\omega t)+\sin\delta\sin(\omega t)) = -\frac{\sqrt{2}\,\omega\Phi_B^{rms}}{R^2+\omega^2L^2}(R\cos(\omega t)+\omega L\sin(\omega t))$$

마지막 등식에서는 $\tan\delta = \omega L/R$로부터 $\sin\delta = \omega L/\sqrt{R^2+\omega^2L^2}$과 $\cos\delta = R/\sqrt{R^2+\omega^2L^2}$을 얻어 썼다.

위의 어느 꼴로 답해도 인정한다. 전체 부호는 채점하지 않는다.

b. 금속 고리는 잠시 잊고, 솔레노이드로부터 거리 z인 곳에 있는 반지름 r, 높이가 무한히 작은 dz인 원통면을 생각하자. 자기장의 가우스 법칙에 따르면 원통 옆면을 지나는 선속은 두 밑면을 지나는 알짜 선속을 상쇄해야 한다.

$$2\pi r\,dz\,B_r + \Phi_B(z+dz) - \Phi_B(z) = 0$$

여기서 Φ_B는 각 원형 밑면을 지나는 연직 자기장의 선속이다. dz로 나누고 무한히 작은 양의 대수를 조금 하면 다음을 얻는다.

$$B_r = -\frac{1}{2\pi r}\cdot\frac{d\Phi_B}{dz}$$

c. 자기장의 진동은 빛이 장치를 지나는 시간에 비하면 매우 느리다. 따라서 Φ_B는 모든 높이 z에서 같은 위상으로 진동하며, 다음과 같다.

$$B_r = -\frac{1}{\sqrt{2}\,\pi r}\cdot\frac{d\Phi_B^{rms}}{dz}\sin(\omega t)$$

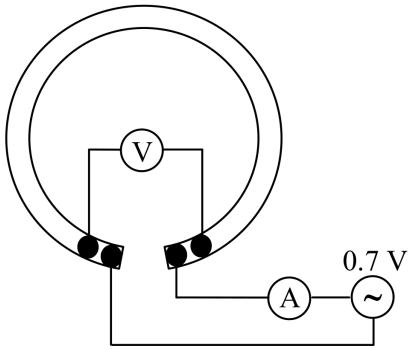
그러면 순간 힘은 다음과 같다.

$$F(t) = -2\pi r I(t)B_r(t) = -\frac{2\omega\Phi_B^{rms}}{R^2+\omega^2L^2}\cdot\frac{d\Phi_B^{rms}}{dz}\sin(\omega t)\,(R\cos(\omega t)+\omega L\sin(\omega t))$$

$\sin(\omega t)\cos(\omega t)$의 시간 평균은 0이고, $(\sin(\omega t))^2$의 평균은 $1/2$이다. 따라서 시간 평균한 힘은 다음과 같다.

$$\langle F\rangle = -\frac{\omega^2 L\Phi_B^{rms}}{R^2+\omega^2L^2}\cdot\frac{d\Phi_B^{rms}}{dz} = -\frac{L\epsilon^{rms}}{R^2+\omega^2L^2}\cdot\frac{d\epsilon^{rms}}{dz} = -\frac{L}{2(R^2+\omega^2L^2)}\cdot\frac{d(\epsilon^{rms})^2}{dz}$$

d. 고리의 저항은 전선과 그 접점의 저항보다 훨씬 작다. 전압계와 전류계를 고리의 같은 두 점에 연결하면 측정 저항이 $0.1\,\Omega$ 정도가 되는데, 이는 거의 전부 접점 때문이다. 멀티미터를 저항계 모드로 쓰는 것도 이런 저항에는 소용이 없다. 따라서 그림과 같은 4단자 회로가 필요하다. 고리와의 접촉은 "악어 집게"를 고리에 물려서 만든다. 전압계의 접점은 전류 접점보다 안쪽에 있어야 함에 주의하라. 저항을 쓰지 않으므로 전원 장치는 사실상 단락되며, 전체 저항(따라서 전류)은 대부분 전선과 접점이 정한다. 전선을 잘 쓰면 6 A가 넘는 전류를 얻을 수 있다. 이때 고리에 걸리는 전압은 약 10 mV이다. 전류계의 정확도는 0.01 A, 전압계의 정확도는 0.1 mV이다. 따라서 전압이 주된 측정 오차의 원인이며, 상대 오차는 1 %이다. 회로가 작동하는 동안 고리의 전류와 전압은 꾸준히 커진다. 그러므로 전류와 전압을 동시에 읽어야 한다. 이 과정의 오차를 줄이고 추정하려면 (회로를 바꾸지 않고) 전류가 조금씩 다를 때 측정을 세 번 해야 한다. 예시 실험의 측정값을 표 1에 실었다.



I (A) ± 0.01 A	V (mV) ± 0.1 mV	$R_{raw} = V/I$ (mΩ) ± 1 %
6.9	11.3	1.638
6.34	10.4	1.640
6.6	10.8	1.636

표 1: 가는 고리에서 잰 전류와 전압의 예시 측정값.

이 경우 통계적 요동은 측정 오차보다 훨씬 작다. 다른 경우에는 비슷하게 나온다. R_{raw}의 오차는 0.5 %에서 1 % 사이로 잡는 것이 적당하다. 여기서는 0.5 %를 골라 $R_{raw} = 1.638\,\mathrm{m\Omega} \pm 0.008\,\mathrm{m\Omega}$ (0.5 %)라고 쓴다.

저항 R_{raw}는 고리 전체의 저항이 아니라 두 전압 단자 사이 구간의 저항일 뿐이다. 이를 고려하려면 두 단자 사이의 거리 d_{ter}, 고리 두 끝 사이의 틈 d_{gap}, 그리고 고리의 평균 둘레 πD_{thin}을 알아야 한다. 예시 실험에서 단자 사이 거리는 $d_{ter} = 2.2\,\mathrm{cm} \pm 0.2\,\mathrm{cm}$였으며, 오차는 접점의 폭 때문이다. 틈은 $d_{gap} = 1.0\,\mathrm{cm} \pm 0.05\,\mathrm{cm}$였으며, 오차는 자의 분해능과 고리의 폭 때문이다. d_{ter}와 d_{gap}에 해당하는 호는 직선으로 보아도 되며, 그 오차는 약 0.02 cm로 무시할 만하다.

평균 둘레를 구하는 가장 좋은 방법은 고리의 바깥지름과 안지름을 자로 재어 평균하는 것이다. 결과는 $D_{thin}^{>} = 9.60\,\mathrm{cm} \pm 0.05\,\mathrm{cm}$와 $D_{thin}^{<} = 9.00\,\mathrm{cm} \pm 0.05\,\mathrm{cm}$이다. 따라서 $D_{thin} = 9.30\,\mathrm{cm} \pm 0.04\,\mathrm{cm}$ (0.35 %)이며, 오차는 자의 분해능 때문이다. 고리를 모눈종이 위에 놓고 재어도 같은

정확도를 얻을 수 있다. 이제 평균 둘레는 $\pi D_{thin} = 29.2\,\mathrm{cm} \pm 0.1\,\mathrm{cm}$ (0.35 %)이다.

고리 안쪽의 한 점과 바깥쪽의 한 점 사이의 최대 거리를 재어 평균 지름을 구하는 것 같은 다른 방법은 오차가 0.5 %로 더 크다. 평균 지름 *대신* 안지름이나 바깥지름을 쓰면 약 3 mm, 곧 3 %의 오차가 생긴다.

이제 가는 고리의 참 저항은 다음과 같다.

$$R_{thin} = R_{raw}\frac{\pi D_{thin} - d_{gap}}{\pi D_{thin} - d_{ter}} = 1.711\,\mathrm{m\Omega} \qquad (1)$$

오차를 추정하려고 다음과 같이 쓴다.

$$R_{thin} \approx R_{raw}\left(1 + \frac{d_{ter} - d_{gap}}{\pi D_{thin}}\right)$$

괄호 안 양의 오차는 주로 $\Delta d_{ter}/(\pi D_{thin}) = 0.2\,\mathrm{cm}/30\,\mathrm{cm} = 0.007 = 0.7\,\%$ 때문이다. 이것을 R_{raw}의 오차 0.5 %와 합치면 다음을 얻는다.

$$\frac{\Delta R_{thin}}{R_{thin}} = 0.85\,\%; \qquad \Delta R_{thin} = 0.015\,\mathrm{m\Omega}$$

여러 고리에서 얻은 예시 측정 결과의 분포는 이 오차 추정과 들어맞는다.

d_{gap}을 고려하지 않으면 $d_{gap}/(\pi D_{thin}) = 3\,\%$의 오차가 생긴다. d_{ter}를 고려하지 않으면 $d_{ter}/(\pi D_{thin}) = 6\,\%$의 오차가 생긴다. 둘 다 잊고 R_{raw}만 쓰면 $(d_{ter} - d_{gap})/(\pi D_{thin}) = 3\,\%$의 오차가 생긴다.

작은 d_{ter}를 쓰는 것보다 조금 못한 대안은 전압 단자를 고리의 지름 양 끝 점에 연결하는 것이다. 그러면 측정 전압이 2배가 되어 상대 오차도 같은 비율로 줄어든다. 그 대신 R_{raw}의 오차가 약 1 %가 되어 R_{thin}의 최종 오차가 조금 커진다.

e. 고리들의 단면에서 알 수 있듯이, 닫힌 고리의 저항 R은 R_{thin}보다 한 자릿수 작다. 그래서 단순한 2단자 측정은 더욱 가망이 없다. (d)와 같은 4단자 측정은 가능하지만, 전압계의 분해능 때문에 약 5 %의 큰 오차가 생긴다. 게다가 닫힌 고리에서는 유도 임피던스 ωL을 더는 무시할 수 없어 약 3 %의 계통 오차가 들어온다.

가장 좋은 풀이는 고리들이 같은 물질로 만들어졌다는 사실을 이용해, 고리의 기하와 정확히 잰 R_{thin}으로부터 R을 구하는 것이다.

$$R = R_{thin}\frac{\pi D_{closed}}{\pi D_{thin} - d_{gap}} \cdot \frac{A_{thin}}{A_{closed}}$$

여기서 A는 단면적이다. 닫힌 고리의 평균 지름 D_{closed}는 (d)에서처럼 구할 수 있으며, 결과는 $D^{>}_{closed} = 10.05\,\mathrm{cm} \pm 0.05\,\mathrm{cm}$와 $D^{<}_{closed} = 7.60\,\mathrm{cm} \pm 0.05\,\mathrm{cm}$이다. 따라서 $D_{closed} = 8.82\,\mathrm{cm}\pm$

0.03 cm이다. 이 경우 평균 지름 대신 안지름이나 바깥지름을 쓰면 1.2 cm, 곧 10 %가 넘는 큰 오차가 생긴다.

A_{thin}을 직접 재는 것도 큰 오차를 낳는다. 가는 고리의 두께와 높이를 자로 재면 각 치수마다 $0.5\,\mathrm{mm}/3\,\mathrm{mm} = 15\,\%$의 오차가 생긴다. $\sqrt{2}$를 곱하면 넓이의 오차는 25 %이다. 솔레노이드에 달린 나사로 고리의 치수를 재려는 학생도 있을 수 있다. 그러면 각 치수의 측정 오차가 나사 한 칸의 약 1/16, 곧 $0.09\,\mathrm{mm}/3\,\mathrm{mm} = 3\,\%$로 줄어들어 넓이의 오차는 4 %가 된다.

해결책은 디지털 저울로 고리의 질량을 재는 것이다. 그러면 다음과 같다.

$$\frac{A_{thin}}{A_{closed}} = \frac{m_{thin}}{m_{closed}} \cdot \frac{\pi D_{closed}}{\pi D_{thin} - d_{gap}}$$

$$R = R_{thin}\left(\frac{\pi D_{closed}}{\pi D_{thin} - d_{gap}}\right)^2 \cdot \frac{m_{thin}}{m_{closed}} = 0.153\,\mathrm{m\Omega}$$

여기서 예시 측정값 $m_{thin} = 4.50\,\mathrm{g} \pm 0.02\,\mathrm{g}$과 $m_{closed} = 47.70\,\mathrm{g} \pm 0.02\,\mathrm{g}$을 썼다. 질량의 측정 오차는 주변 잡음에 달려 있으며, 대표값으로 0.02 g을 쓴다. 실험 세트마다 고리의 질량이 약 1 %씩 조금 다른데, 이는 저울의 감도로 구별할 수 있다. 따라서 학생마다 조금씩 다른 값을 얻게 된다.

질량비의 주된 오차는 $\Delta m_{thin}/m_{thin} = 0.5\,\%$이다. πD_{closed}의 오차는 (d)에서와 같이 0.35 %이다. 제곱하면 이 오차는 0.7 %로 두 배가 된다. 식 (1)을 살펴보면 $R_{thin}/(\pi D_{thin} - d_{gap})^2$의 상대 오차는 R_{thin}의 상대 오차와 같다. $(\pi D_{thin} - d_{gap})$이 분자에서 분모로 옮겨 갈 뿐이기 때문이다. 따라서 $R_{thin}/(\pi D_{thin} - d_{gap})^2$의 오차는 1 %이다. 이 세 오차 원인을 합치면 다음과 같다.

$$\frac{\Delta R}{R} = \sqrt{0.0085^2 + 0.007^2 + 0.005^2} = 1.2\,\%; \qquad \Delta R = 0.002\,\mathrm{m\Omega}$$

여러 고리에서 얻은 예시 측정 결과의 분포는 이 오차 추정과 들어맞는다. 위에서 든 값 $R = 0.153\,\mathrm{m\Omega}$은 분포의 아래쪽 끝 가까이에 있다.

d_{gap}을 무시한 학생은 6 %의 계통 오차를 얻는다. D_{closed}와 D_{thin}의 차이를 무시한 학생은 10 %의 계통 오차를 얻는다. 둘 다 무시하고, 곧 $R = R_{thin}(m_{thin}/m_{closed})$만 쓴 학생은 4 %의 오차를 얻는다. 두 인자 $\pi D_{closed}/(\pi D_{thin} - d_{gap})$ 가운데 하나에서만 이런 실수를 하면 오차는 절반이 된다.

위에서는 사실상 닫힌 고리를 길이가 D_{closed}인 직사각형으로 다루었다. 이것이 질량 계산에 오차를 들여오지 않는다는 것은 쉽게 알 수 있다. 실제로 고리의 부피에 대한 정확한 공식은 다음과 같다.

$$V = \pi a\left(\left(\frac{D_{closed} + w}{2}\right)^2 - \left(\frac{D_{closed} - w}{2}\right)^2\right) = \pi D_{closed} w a$$

여기서 a는 고리의 높이, w는 고리의 폭이다. 이것은 직사각형 근사의 공식과 같다. 풀이에서 이 유도를 쓰는 학생도 있을 것이다.

넓은 원형 고리의 정확한 저항 계산은 더 어렵고, 직사각형 근사의 상대 오차가 $w^2/(3D_{closed}^2) = 0.6\,\%$임을 보여 준다. 학생에게 이 분석을 기대하지는 않으며, 이 오차는 전체 오차 1.5 %에 비해 무시할 수 있다. 완결성을 위해 정확한 공식의 유도를 싣는다.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\rho}\int_{(D_{closed}-w)/2}^{(D_{closed}+w)/2} \frac{a\,dr}{2\pi r} = \frac{a}{2\pi\rho}\ln\frac{D_{closed}+w}{D_{closed}-w} \approx \frac{wa}{\pi D_{closed}\rho}\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{w}{D_{closed}}\right)^2\right)$$

여기서 ρ는 물질의 비저항이다.

f. 학생은 나사로 솔레노이드를 올리고 내려 z를 바꿀 수 있다. z를 재는 가장 정밀한 방법은 그냥 나사 칸 수를 세는 것이다. 그러면 오차는 $\Delta z = h/16 = 0.09\,\mathrm{mm}$이며, 여기서 $h = 1.41\,\mathrm{mm}$는 나사 피치이다. z를 자로 재면 자의 분해능 때문에 오차가 $\Delta z = 0.5\,\mathrm{mm}$가 된다. $z = 0$으로 정하기 편한 점은 솔레노이드가 고리에 위에서 닿고 나사 손잡이가 어떤 정해진 방향을 향할 때이다. 다음 파트의 힘 측정과 거리를 일관되게 기록하려면, 눈으로 보거나 나사 칸 수를 세어 이 점을 다시 찾을 수 있어야 한다.

힘 측정을 내다보고, 학생은 솔레노이드 밑에 저울을 놓고, 저울 위에 스티로폼 블록을 놓은 다음, 그 위에 고리를 올려야 한다. 스티로폼 블록이 중요한 까닭은 절연체이기 때문이다. 저울의 받침판은 금속이어서 EMF 측정 회로를 바꿀 수 있다. 블록은 아래에서 설명하듯이 힘 측정의 질에도 중요하다.

측정은 언제나 작은 거리에서 시작하는 것이 가장 좋다. 그래야 고리를 솔레노이드 축에 맞추기 쉽다. z의 적당한 범위는 $z = 0$(솔레노이드와 거의 닿음)부터 $z = 5\,\mathrm{cm}$까지이다. 적당한 간격은 나사 한 칸이다. EMF 변화가 작아지는 큰 z 쪽으로 가면 간격을 넓혀도 된다.

EMF는 넓은 열린 고리의 두 끝을 전압계에 연결해 잴 수 있다. 우리는 회로의 나머지가 아니라 고리를 지나는 자기 선속을 재고자 한다. 그러려면 고리에서 나온 전선을 꼬아 한 가닥으로 땋아야 한다. EMF는 거리에 따라 약 $\epsilon_{rms} = 22\,\mathrm{mV}$에서 0을 향해 줄어들며, $z = 5\,\mathrm{cm}$에서 약 $\epsilon_{rms} = 5\,\mathrm{mV}$가 된다. 측정 오차는 $\Delta\epsilon_{rms} = 0.1\,\mathrm{mV}$이다. 예시 측정 결과를 표 2에 실었다. 측정값의 그래프((h)를 위한 추세선 포함)는 그래프 1에 있다.

g. 학생은 (f)에서처럼 z를 바꾸며, 이번에는 디지털 저울로 닫힌 고리에 작용하는 힘을 잰다. z의 영점은 (f)와 같게 잡도록 주의해야 한다. 꼭 그럴 필요는 없지만, 앞서 EMF를 잰 바로 그 점들에서 힘을 재면 편하다.

이번에도 고리는 저울에 바로 올리지 말고 스티로폼 블록 위에 놓아야 한다. 힘 측정에서 그 이유는 두 가지이다. 첫째, 저울의 금속 부분도 솔레노이드의 자기장에 반응한다. 따라서 저울 읽음에 직접 영향을 주지 않도록 솔레노이드를 저울보다 일정 거리 위에 두어야 한다. 이 효과와 그것이 잘 없어졌는지 보려면, 저울에 고리를 올리지 않은 채 솔레노이드에 전류를 흘리고 저울 읽음이 바뀌는지 확인하면 된다. 스티로폼 블록을 쓰는 둘째 이유는 저울의 면적이 작기 때문이다. 고리를 저울에 바로 올리면 그 무게의 일부가 저울 뚜껑이나 다른 받침면에 실리지 않게 하기 어렵다. 끝으로, 솔레노이드가 고리나 솔레노이드 받침에 직접 닿아 그 무게가 저울에 실리지 않도록 해야 한다.

고리와 블록을 저울 위에 올리고 전류를 흘리지 않은 상태에서 저울을 켜거나 Tare 단추를 누르면 편하다. 그러면 자기력을 바로 잴 수 있다. 그렇지 않으면 모든 힘 값에서 전류가 0일 때의 저울 읽음을 손으로 빼야 한다.

$z = 0$에서 $z = 5\,\mathrm{cm}$까지 힘은 약 $\langle F \rangle = 8\,\mathrm{gf}$(그램힘)에서 약 $\langle F \rangle = 0.25\,\mathrm{gf}$로 줄어든다. 측정 오차는 주변 잡음에 달려 있다. 대표값은 $\Delta\langle F \rangle = 0.02\,\mathrm{gf}$이다. 예시 측정 결과를 표 2에 실었다.

h. 도함수는 관심 있는 점을 중심으로 대칭으로 놓인 두 점의 이산 차분으로 구해야 한다. $d\epsilon_{rms}^2/dz$를 바로 구하는 것보다 도함수 $d\epsilon_{rms}/dz$를 구한 뒤 $2\epsilon_{rms}$를 곱하는 편이 낫다. 이유는 두 가지이다. 첫째, 제곱을 하면 이산 점 차분의 오차가 커진다. 둘째, 학생이 그래프 방법(아래 참조)을 고른다면 $\epsilon_{rms}(z)$의 그래프를 쓰는 편이 더 편하다. 그 그래프는 (f)에서 이미 그렸고, 그 점들이 $\epsilon_{rms}^2(z)$의 그래프보다 더 고르게 퍼져 있다.

이제 $d\epsilon_{rms}/dz$의 이산 차분을 고르는 서로 다른 두 방법을 설명한다. 제대로 쓰면 두 방법은 똑같이 좋은 결과를 준다.

<u>수치적 방법:</u>
도함수 $d\epsilon_{rms}/dz$를 구하는 한 가지 방법은 ϵ_{rms}의 측정값들의 차를 그냥 구하는 것이다. 차를 구하는 간격은 신중하게 골라야 한다. 간격이 작으면 측정점의 통계적 흩어짐 때문에 기울기의 오차가 커진다. 반면 간격이 크면 지나치게 뭉개져 국소 기울기를 잡아내지 못할 수 있다. 가장 좋은 간격은 관심 있는 점에서 양쪽으로 약 6칸, 곧 약 $3h = 4\,\mathrm{mm}$이다.

<u>그래프 방법:</u>
또 다른 방법은 측정점들을 지나는 매끄러운 추세선을 그리고, 측정값이 아니라 이 추세선 위의 점들 사이 차를 쓰는 것이다. 측정을 제대로 했다면 추세선은 모눈종이 위의 측정점에서 0.5 mm – 1 mm만 벗어날 것이다. 운 나쁜 이론가가 해 본 예가 그래프 1에 있다. 굵은 선은 가장 좋은 선을 그리려고 시행착오를 거친 결과이다. 통계적 흩어짐이 매끄럽게 다듬어지므로, 이제 도함수의 이산 간격을 수치적 방법보다 작게 고를 수 있다. 특히 관심 있는 점에서 양쪽으로 나사 한 칸씩이면 이제 충분하다. 모눈종이의 분해능에 한계가 있으므로 이보다 훨씬 작은 간격은 고르지 말아야 한다. 그래프 방법의 잠재적인 장점은 EMF를 잰 정확한 z 값에 매이지 않는다는 것이다. EMF와 힘을 정확히 같은 높이에서 재지 않았다면 이것이 도움이 된다.

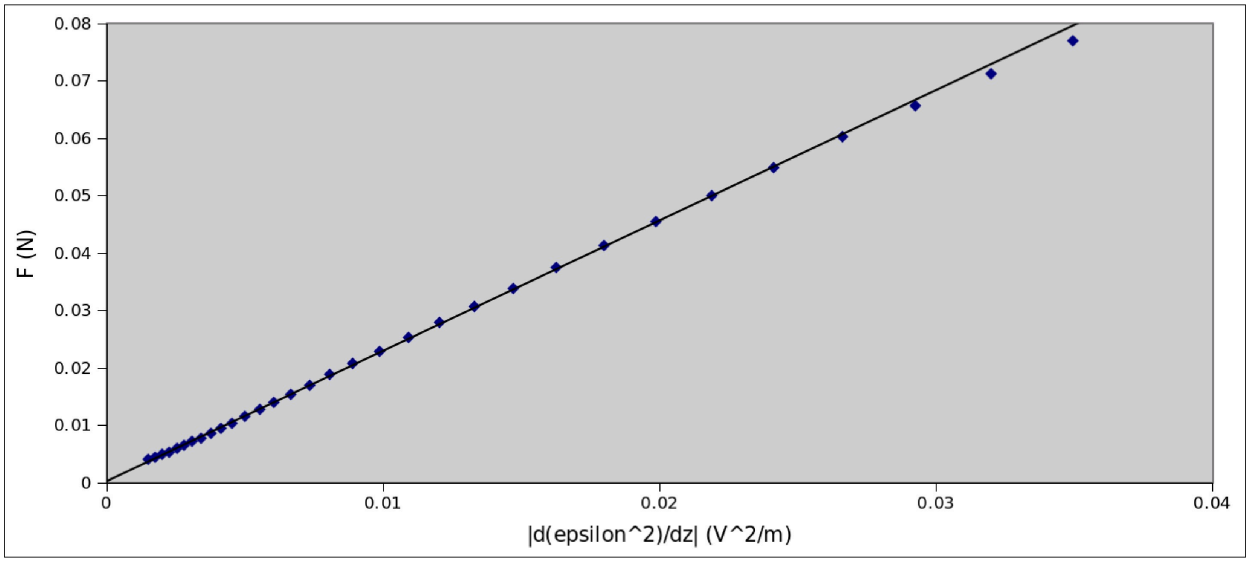
이보다 못한 그래프 방법은 곡선 $\epsilon_{rms}(z)$에 접선을 그리고 그 기울기를 계산하는 것이다. 실제로는 눈으로 접선을 정하기가 매우 어렵고, 이 방법을 쓰면 (i)의 분석에서 20 % 정도의 큰 편차가 생긴다.

$d\epsilon_{rms}/dz$와 $d\epsilon_{rms}^2/dz$의 예시 값을 표 2에 실었다.

i. (c)와 (h)에 따라 학생은 $d\epsilon_{rms}^2/dz$의 함수로 $\langle F \rangle$의 선형 그래프를 그려야 한다. 그래프는 원점을 지나야 하며, 기울기는 다음과 같다.

$$k = \frac{L}{2(R^2 + \omega^2 L^2)} \qquad (2)$$

아주 작은 거리(고리와 솔레노이드 끝 사이가 약 6 mm 미만)까지 그래프에 넣으면, 해당 점들은 선형에서 벗어나 기울기가 눈에 띄게 줄어든다. 아래의 컴퓨터 그래프에서 이를 볼 수 있다.



이 효과는 고리와 솔레노이드의 쇠심 사이의 인력 때문이다.

예시 실험의 손 그래프(그래프 2)에서는 비선형성이 보이지 않으며, 기울기는 $k = 2.29\,\mathrm{Nm/V^2} \pm 0.04\,\mathrm{Nm/V^2}$ (2 %)로 나온다. L을 얻으려면 다음 이차 방정식을 풀어야 한다.

$$2\omega^2 k L^2 - L + 2kR^2 = 0$$

두 근은 다음과 같다.

$$L = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 16\omega^2 k^2 R^2}}{4\omega^2 k}$$

여기서 $\omega = 2\pi \cdot 50\,\mathrm{Hz} \approx 314\,\mathrm{Hz}$를 써야 한다.

해석적으로든 대입해 보든, 작은 근만 $\omega L < R$을 만족함을 알 수 있다. 예시 실험의 결과는 다음과 같다.

$$L = \frac{1 - \sqrt{1 - 16\omega^2 k^2 R^2}}{4\omega^2 k} = 1.13 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H} = 0.113\,\mu\mathrm{H}$$

학생이 이 단계 전에 하지 않았다면, 주어진 g 값으로 힘의 단위를 그램힘에서 뉴턴으로 바꾸어야 한다.

비 $\omega L/R$은 0.23이다. 따라서 오차를 추정하려고 식 (2)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$k = \frac{L}{2R^2} \quad \Rightarrow \quad L = 2kR^2 \tag{3}$$

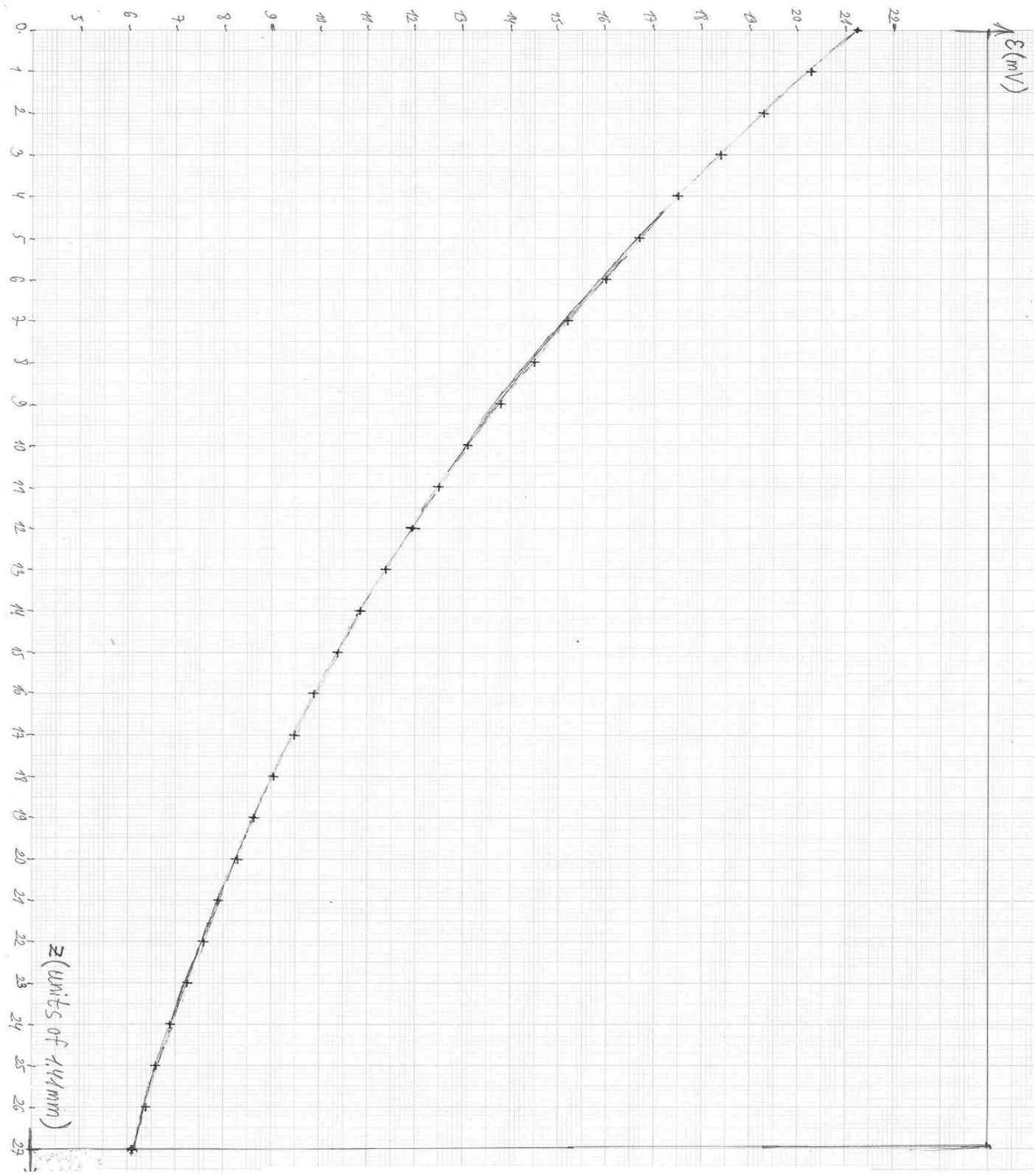
보다시피 R이 제곱으로 들어가므로 R의 섬세한 오차 고려가 이제 더욱 중요해진다. k와 R의 상대 오차를 모으면 다음과 같다.

$$\frac{\Delta L}{L} = \sqrt{0.02^2 + (2 \cdot 0.012)^2} = 0.03 = 3\,\%; \qquad \Delta L = 0.003\,\mu\mathrm{H}$$

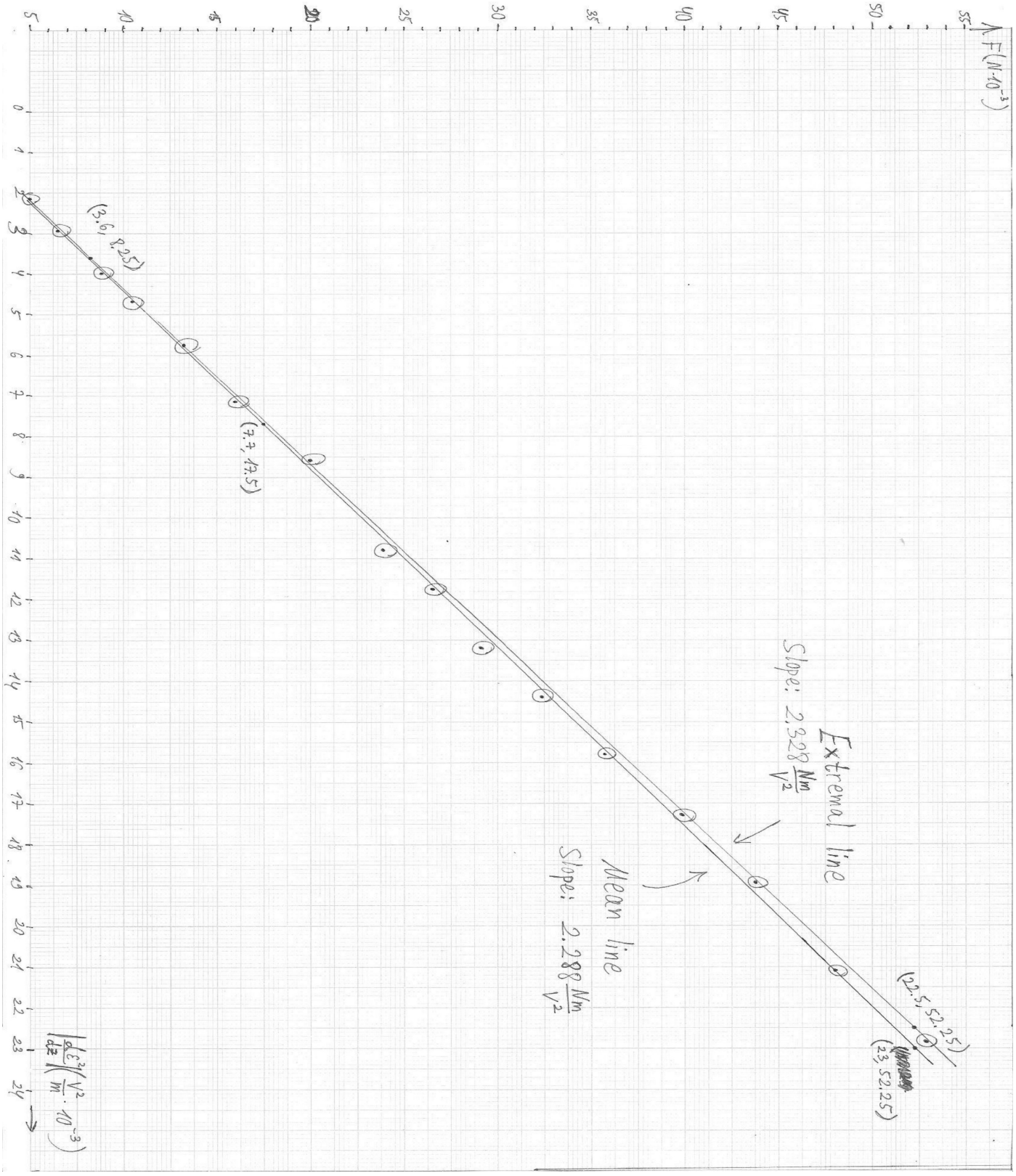
예시 실험 결과의 흩어짐은 이 오차 추정과 들어맞는다.
처음부터 끝까지 $(\omega L/R)^2$을 무시하고 식 (3)으로 L의 값을 구한 학생은 5 %의 계통 오차를 들여오게 된다.

n (나사 칸) ± 0.1	z (mm) ± 0.15 mm	ϵ_{rms} (mV) ± 0.1 mV	$\langle F \rangle$ (gf) ± 0.02 gf	$\langle F \rangle$ (N) ± 0.0002 N	$\lvert d\epsilon_{rms}/dz \rvert$ (V/m)	$\lvert d\epsilon_{rms}^2/dz \rvert$ (V^2/m)
0	0	21.25	7.08	0.06938		
1	1.41	20.3	6.5	0.06370		
2	2.82	19.3	5.93	0.05811		
3	4.23	18.4	5.4	0.05292	0.6206	0.02284
4	5.64	17.5	4.9	0.04802	0.6028	0.02110
5	7.05	16.7	4.47	0.04381	0.5674	0.01895
6	8.46	16	4.07	0.03989	0.5437	0.01731
7	9.87	15.2	3.65	0.03577	0.5201	0.01581
8	11.28	14.5	3.3	0.03234	0.4965	0.01440
9	12.69	13.8	2.97	0.02911	0.4787	0.01321
10	14.1	13.1	2.71	0.02656	0.4492	0.01177
11	15.51	12.5	2.44	0.02391	0.4314	0.01079
12	16.92	11.95	2.2	0.02156	0.4019	0.00961
13	18.33	11.4	2.045	0.02004	0.3783	0.00862
14	19.74	10.85	1.83	0.01793	0.3546	0.00770
15	21.15	10.4	1.64	0.01607	0.3428	0.00713
16	22.56	9.9	1.45	0.01421	0.3251	0.00644
17	23.97	9.5	1.35	0.01323	0.3014	0.00573
18	25.38	9.05	1.2	0.01176	0.2955	0.00535
19	26.79	8.65	1.07	0.01049	0.2719	0.00470
20	28.2	8.3	1	0.00980	0.2660	0.00442
21	29.61	7.9	0.905	0.00887	0.2541	0.00402
22	31.02	7.6	0.815	0.00799	0.2423	0.00368
23	32.43	7.25	0.74	0.00725	0.2246	0.00326
24	33.84	6.9	0.67	0.00657	0.2128	0.00294
25	35.25	6.6	0.61	0.00598	0.2009	0.00265
26	36.66	6.4	0.56	0.00549	0.1950	0.00250
27	38.07	6.1	0.52	0.00510	0.1773	0.00216
28	39.48	5.9	0.47	0.00461		
29	40.89	5.6	0.42	0.00412		
30	42.3	5.4	0.36	0.00353		

표 2: EMF와 힘의 예시 측정값과 도함수 값



그래프 1: z의 함수로 나타낸 ϵ_{rms}와 매끄럽게 다듬은 추세선.



그래프 2: $|d\epsilon_{rms}^2/dz|$의 함수로 나타낸 $\langle F \rangle$와 선형 추세선.