모범 답안

다음 꼴의 관계를 가정한다.

$$P = f(W)\, h(\theta)$$

$$M_{\mathrm{p}} = f(M_{\mathrm{w}})\, h(\theta)$$

M_{w}는 걸이에 든 질량(하중)을 나타낸다.

M_{p}는 접시에 든 질량 + 접시의 질량(즉 $M'_p + M_{pan}$)을 나타낸다(당기는 힘).

이 변수들 사이의 관계는 두 부분으로 나누어 구할 수 있다.

- M_{P}와 M_{W} 사이의 관계
- M_{P}와 θ 사이의 관계

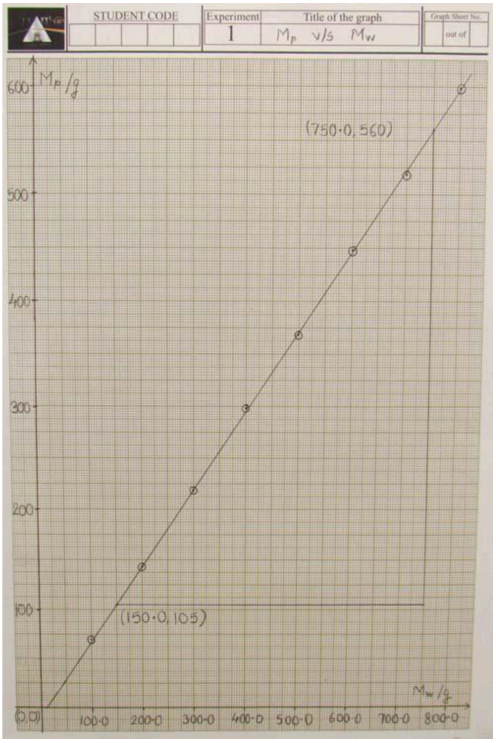
<u>파트 1</u>:

접시의 질량 = 28.6 g

$\theta = \pi$ rad

관측 번호	M_w/g	M'_{p-} /g	M'_{p+} /g	$M'_{p(average)}$ /g	$M_{p(average)} = M'_{p(average)} + M_{pan}$ /g	$\Delta M_p = \frac{M'_{p+} - M'_{p-}}{2}$ /g
1	800.0	566	574	570	598.6	4
2	700.0	486	494	490	518.6	4
3	600.0	417	423	420	448.6	3
4	500.0	337	343	340	368.6	3
5	400.0	267	273	270	298.6	3
6	300.0	188	192	190	218.6	2
7	200.0	113	117	115	143.6	2
8	100.0	41	43	42	70.6	1

M_P 대 M_W의 그래프:



그래프의 기울기 = 0.7583

이로부터 다음을 알 수 있다.

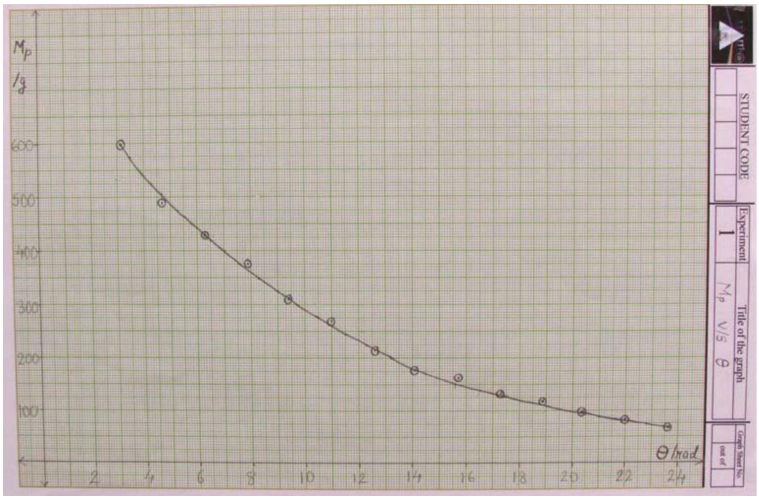
$$P \propto W \qquad (1)$$

<u>파트 1</u>:

M_w = 800.0 g

M_{pan} = 28.6 g

관측 번호	θ /rad	M'_{p-} /g	M'_{p+} /g	$M'_{p(average)}$ /g	$M_{p(average)} = M'_{p(average)} + M_{pan}$ /g	$\Delta M_p = \frac{M'_{p+} - M'_{p-}}{2}$ /g
1	π	565	575	570	598.6	5
2	$3\pi/2$	455	465	460	488.6	5
3	2π	396	404	400	428.6	4
4	$5\pi/2$	316	324	320	348.6	4
5	3π	276	284	280	308.6	4
6	$7\pi/2$	236	244	240	268.6	4
7	4π	182	188	185	213.6	3
8	$9\pi/2$	147	153	150	178.6	3
9	5π	133	137	135	163.6	2
10	$11\pi/2$	104	110	107	135.6	3
11	6π	88	92	90	118.6	2
12	$13\pi/2$	68	72	70	98.6	2
13	7π	54	56	55	83.6	1
14	$15\pi/2$	39	41	40	68.6	1
15	8π	29	31	30	58.6	1
16	$17\pi/2$	18	20	19	47.6	1



M_p와 θ 사이의 그래프는 곡선을 이룬다.

여러 가지 함수 관계가 가능하다.

1)

가능한 함수는 $\frac{1}{\theta}$, $\frac{1}{\theta^2}$, $e^{-k\theta}$이다.

위의 처음 두 함수에서는 $\theta = 0$에서 M_P가 무한대가 되는데, 이는 불가능하다. 세 번째 함수에서는 M_p가 어떤 유한한 값을 가진다는 것을 안다.

2)

함수가 지수 함수일 것으로 예상되면, 반값 방법으로 M_p가 반으로 줄 때마다 확인하거나, $\ln M_p$를, 더 좋게는 $\ln\left(\frac{M_p}{M_w}\right)$를 θ에 대해 그려 확인할 수 있다.

그래프가 기울기 $-k$인 직선이면

$$M_p \propto e^{-k\theta}$$

또는

$$P \propto e^{-k\theta} \tag{2}$$

(1)과 (2)로부터

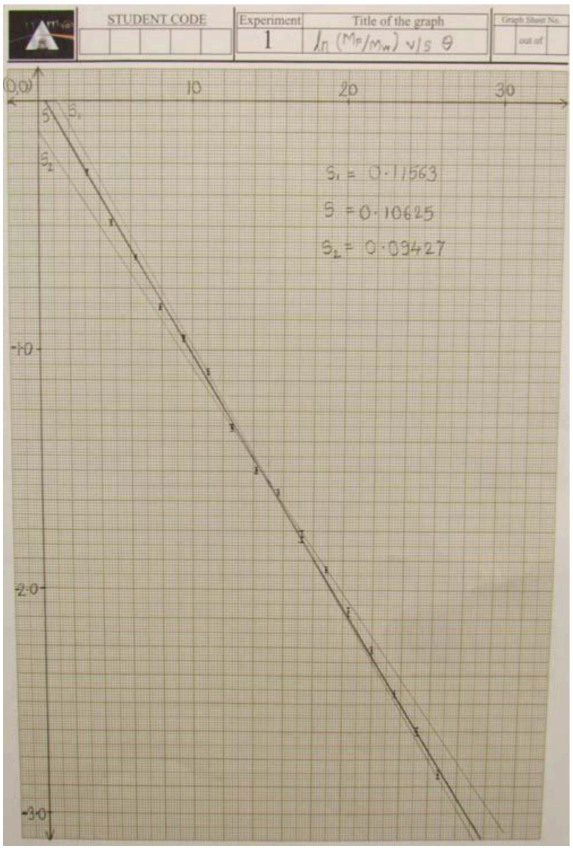
$$P \propto We^{-k\theta} \tag{3}$$

위 식의 상수 k를 마찰 계수 μ와 같다고 둔다.

$$P = CWe^{-\mu\theta} \tag{4}$$

식 (4)의 비례 상수는 1이다. $\theta = 0$ rad에서 $P = W$이기 때문이다.

$$P = We^{-\mu\theta} \tag{5}$$



그래프로부터

$$\ln\left(\frac{M_p}{M_w}\right) = -\mu\theta$$

여기서 μ는 그래프의 기울기이다.

그래프로부터 $\mu = 0.106$

$\Delta\pi \sim \dfrac{\pi_1 - \pi_2}{2} = 0.10049$
$\Delta\pi = 0.01067 = \Delta\mu$
$u_C(\mu) = 0.00616$
$U(\mu) = 0.0123 \approx 0.02$

$$\mu = 0.11 \pm 0.02$$

파트 2:

접시가 올라갈 때:

$$M_{p1} = M_u e^{-\mu\theta} \tag{6}$$

접시가 내려갈 때:

$$M_{p2} = M_u e^{\mu\theta} \tag{7}$$

M'_{p1}		$M'_{p1(average)}$	$\Delta M'_{p1}$	$M_{p1} = M'_{p1} + M_{pan}$
M'_{p1+}	M'_{p1-}			
164	156	160	4	188.6

M'_{p2}		$M'_{p2(average)}$	$\Delta M'_{p2}$	$M_{p2} = M'_{p2} + M_{pan}$
M'_{p2+}	M'_{p2-}			
49	45	47	2	75.6

M_u에 대하여:

식 (6)과 (7)을 곱하면

$$M_u = \sqrt{M_{p1} \cdot M_{p2}}$$

$$M_u = \sqrt{188.6 \times 75.6} = 119.4075g$$

μ에 대하여:

식 (6)을 (7)로 나누면

$$\frac{M_{p1}}{M_{p2}} = e^{2\mu\theta}$$

$$\mu = \frac{1}{2\theta}\ln\left(\frac{M_{p1}}{M_{p2}}\right)$$

$\theta = \pi$일 때

$$\mu = \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{M_{p1}}{M_{p2}}\right)$$

$$\mu = \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{188.6}{75.6}\right) = 0.1456$$

M_u의 불확도:

$$\frac{\Delta M_u}{M_u} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\frac{\Delta M_{p1}}{M_{p1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{\Delta M_{p2}}{M_{p2}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\frac{4}{188.6}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{2}{75.6}\right)^2} = 0.0169$$

$$\Delta M_u = 0.0169 \times 119.4075 = 2.018$$

$$u_C(M_u) = \frac{2.018}{\sqrt{3}} = 1.165$$

$$U(M_u) = 2 \times u_C(M_u) = 2 \times 1.165 = 2.33 \approx 3$$

$$M_u = 119 \pm 3\ \mathrm{g}$$

μ_u의 불확도:

$$u_C(\mu_u) = \frac{1}{\sqrt{3}}\Delta\mu = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}}\sqrt{\left(\frac{\Delta M_{p1}}{M_{p1}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta M_{p2}}{M_{p2}}\right)^2} = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}}\sqrt{\left(\frac{4}{188.6}\right)^2 + \left(\frac{2}{75.6}\right)^2} = 0.003117$$

$$U(\mu_u) = 2 \times u_C(\mu_u) = 2 \times 0.003117 = 0.00623 \approx 0.007$$

$$\mu_u = 0.146 \pm 0.007$$