APhO INDIA 2022
22nd Asian Physics Olympiad

A2-1

Korean (Korea (Republic of))

EQ2: 음향 블랙박스 풀이[1]

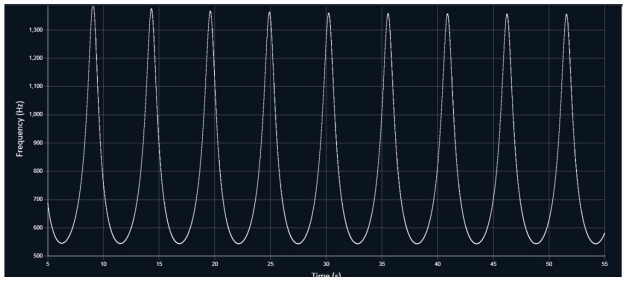
A.1 (0.2 pt)

$$x(t) = v_s t\cos(\beta) + R\cos(\omega t + \phi) + X_{\mathrm{C}} \tag{1}$$

$$y(t) = v_s t\sin(\beta) + R\sin(\omega t + \phi) + Y_{\mathrm{C}} \tag{2}$$

A.2 (1.2 pt)

아래 그림은 자료점 간격 0.02로 얻은 그래프이다.



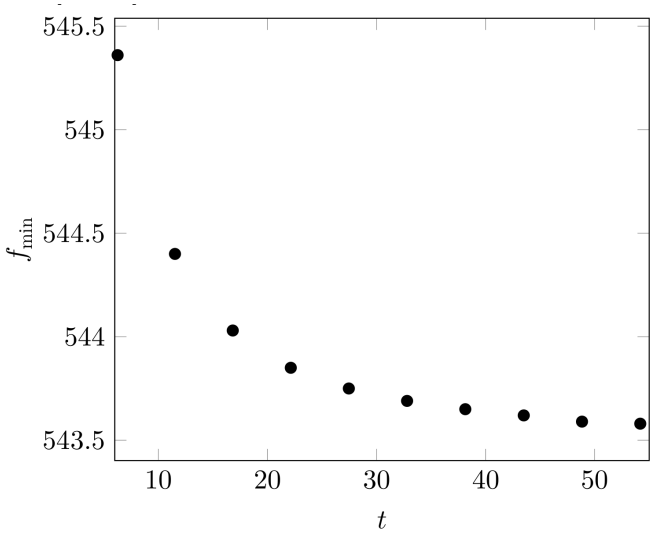
번호	t (s)	$f_{\min}$
1	6.26	545.36
2	11.52	544.4
3	16.82	544.03
4	22.14	543.85
5	27.46	543.75
6	32.8	543.69
7	38.14	543.65
8	43.5	543.62
9	48.84	543.59
10	54.18	543.58

1 Siddharth Tiwary(IIT 파와이 뭄바이), Siddhant Mukherjee(영국 케임브리지 대학교), Chandan Relekar(IISc 방갈로르), Charudutt Kadolkar(IIT 구와하티), Praveen Pathak(HBCSE-TIFR 뭄바이)가 이 문제의 주 저자이다. 학술위원회와 국제이사회의 기여에 감사드린다.

A2-2

Korean (Korea (Republic of))

A.2 (계속)



APhO INDIA 2022 22nd Asian Physics Olympiad

A2-3

Korean (Korea (Republic of))

A.3 (1.0 pt)

검출기와 음원이 각각 속도 v_d 와 v_s 로 움직이는 일반적인 경우를 생각하자. 또한 음원과 검출기를 잇는 직선은 문제의 그림 1에서 정의한 대로 x 축과 각 α 를 이룬다.

α 는 시간의 함수임에 유의하라. $\hat{n}$ 을 음원과 검출기를 잇는 벡터라 하자. 음원이 검출기에 가까워지는 경우 검출기가 검출하는 진동수는 다음과 같다.

$$f(t') = f_0 \frac{c - v_d \cdot \hat{n}(t)}{c - \vec{v}_{\mathrm{T}} \cdot \hat{n}(t)} \tag{3}$$

$$= f_0 \frac{c - v_d \cos(\gamma - \alpha(t))}{c - [(\vec{v}_s + R\omega\hat{\theta}) \cdot \hat{n}(t)]} \tag{4}$$

$$= f_0 \frac{c - v_d \cos(\gamma - \alpha(t))}{c - [(v_s \cos(\beta - \alpha(t)) + R\omega \cos(\omega t + \phi + \pi/2 - \alpha))]} \tag{5}$$

$$= f_0 \frac{c - v_d \cos(\gamma - \alpha)}{c - [(v_s \cos(\beta - \alpha(t)) - R\omega \sin(\omega t + \phi - \alpha(t))]} \tag{6}$$

마찬가지로 음원이 검출기에서 멀어지는 경우에는

$$f(t') = f_0 \frac{c - v_d \cos(\gamma - \alpha)}{c + [(v_s \cos(\beta - \alpha(t)) - R\omega \sin(\omega t + \phi - \alpha(t))]} \tag{7}$$

점근 극한($t \to \infty$)에서 최소 진동수의 식은

$$f_{\min} = f_0 \frac{c}{c + [(v_s + R\omega)]} \tag{8}$$

A2-4

A.4 (1.4 pt)

음원의 처음 위치: 검출기를 먼저 x 축 위(예: $x_1, 0^\circ$)에 두고, 다음으로 y 축 위(예: $y_1, 90^\circ$)에 두어, 그래프에서 첫 신호가 검출기에 도달하는 데 걸린 시간을 읽는다. 이 시간을 각각 Δt_{x1} 과 Δt_{y1} 이라 하자. 그러면

$$(x - x_1)^2 + y^2 = (c\Delta t_{x1})^2 \tag{9}$$

$$x^2 + (y - y_1)^2 = (c\Delta t_{y1})^2 \tag{10}$$

위 두 식을 풀면 음원의 좌표를 얻는다. 모의실험에서 $x_1 = y_1 = 500\ \mathrm{m}$ 일 때 $\Delta t_{x1} = 1.5344\ \mathrm{s}$, $\Delta t_{y1} = 1.2727\ \mathrm{s}$ 이다. 위 식들은 두 개의 해를 갖는다. 검출기를 세 번째 위치에 두면 옳은 쌍을 고를 수 있다. 답은

$$x_\mathrm{A} = 419.99, \quad y_\mathrm{A} = 499.99$$

APhO INDIA 2022 22nd Asian Physics Olympiad

A2-5

Korean (Korea (Republic of))

A.5 (2.1 pt)

음원이 아주 먼 거리에서(예를 들어 왼쪽에서) 검출기로 다가와 지나친 뒤 아주 먼 거리(오른쪽)로 멀어지는 위치에 검출기를 두자. 점근 극한(아주 먼 왼쪽과 아주 먼 오른쪽, $\beta \approx \alpha$)에서 검출기는 두 쌍의 진동수를 검출한다. $v_d = 0$ 으로 둔다. 아주 먼 왼쪽에서

$$f_{\max} = f_0 \frac{c}{c - (v_s + \omega R)} \tag{11}$$

$$f_{\min} = f_0 \frac{c}{c - (v_s - \omega R)} \tag{12}$$

아주 먼 오른쪽에서

$$f_{\max} = f_0 \frac{c}{c + (v_s - \omega R)} \tag{13}$$

$$f_{\min} = f_0 \frac{c}{c + (v_s + \omega R)} \tag{14}$$

식 (11)과 (12)로부터

$$\frac{f_{\max} + f_{\min}}{f_{\max} - f_{\min}} = \frac{c - v_s}{\omega R} \tag{15}$$

식 (13)과 (14)로부터

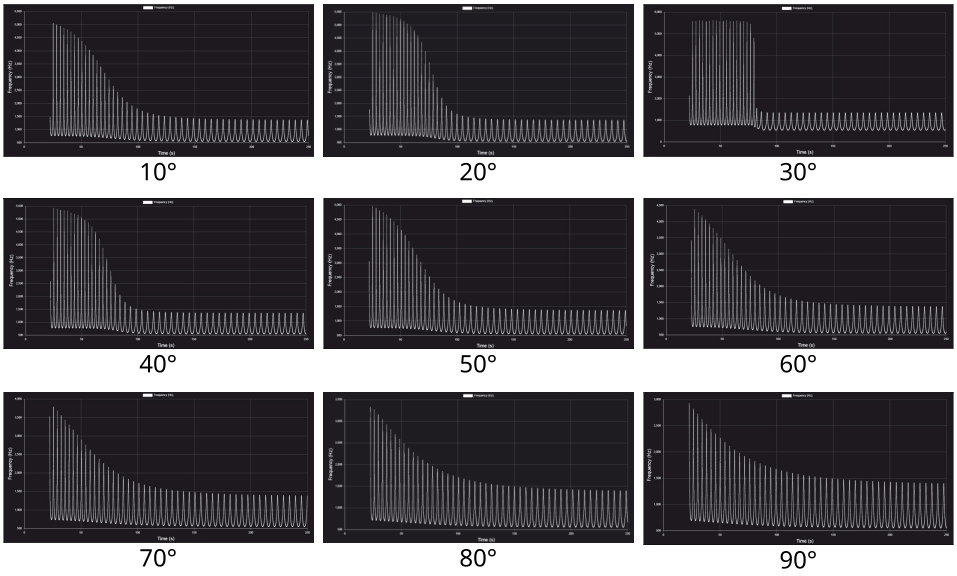
$$\frac{f_{\max} + f_{\min}}{f_{\max} - f_{\min}} = \frac{c + v_s}{\omega R} \tag{16}$$

또한 $t = 0$ 에서 음원과 검출기 사이에 유한한 거리가 있다고 주어져 있다. 이 때문에 신호 지연이 생긴다. 두 봉우리($f_{\max}$) 사이의 시간 간격을 Δt 라 하면 이 경우

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega}\left(1 + \frac{v_s}{c}\right) \tag{17}$$

식 (15)–(17)을 함께 풀면 v_s, ω, R 의 값을 얻을 수 있다. 정지한 검출기를, 음원이 아주 먼 거리에서 다가와 지나친 뒤 아주 먼 거리로 멀어지는 좌표(예: x_D, y_D)에 두어야 한다. 점근적 거동은 그래프에서 극값이 거의 일정하게 유지되는 영역에서 알아볼 수 있음에 유의하라. 또한 검출기의 원점으로부터의 거리가 각 $\alpha \approx \beta$ 가 되게 하는 값이면 그래프가 급격히 변할 것으로 예상된다. 거리를 8000 m로 고정하고 여러 θ 값을 시도해 본다.

A.5 (계속)



$\theta = 30^\circ$ 에서 그래프의 아주 먼 왼쪽과 오른쪽 부분이 점근적 거동을 보임을 알 수 있다. 이 영역에서는 봉우리 진동수가 눈에 띄게 변하지 않는다. 이 영역에서 그래프 왼쪽의 봉우리 진동수 값이 오른쪽의 값보다 큼에 유의하라. 이는 그래프 오른쪽에서 음원이 검출기로부터 멀어지고 있음을 뜻한다. 검출기는 전이 영역 어딘가에 놓여 있다. 더 정확한 $f_{\max}$ 와 $f_{\min}$ 값을 얻기 위해 자료점 간격을 줄여(예: 0.001) 아주 먼 왼쪽 영역의 그래프를 확대한다.

$f_{\min} = 788.24\ \text{Hz}$, $f_{\max} = 5569.59\ \text{Hz}$ 이다. 이를 식 (11)에 넣으면

$$\frac{f_{\max} + f_{\min}}{f_{\max} - f_{\min}} = 1.33 = \frac{c - v_s}{\omega R} \tag{18}$$

아주 먼 오른쪽 영역에서는

$f_{\min} = 543.96\ \text{Hz}$, $f_{\max} = 1353.45\ \text{Hz}$ 이다. 이를 식 (12)에 넣으면

$$\frac{f_{\max} + f_{\min}}{f_{\max} - f_{\min}} = 2.34 = \frac{c + v_s}{\omega R} \tag{19}$$

식 (18)–(19)로부터 $v_s = 91.1\ \text{m/s}$, $\omega R = 179.66\ \text{m/s}$ 를 얻는다. 또한 점근 영역의 임의의 두 봉우리에 대해

$$\Delta t = 148.84 - 143.48 = 5.36 = \frac{2\pi}{\omega}\left(1 + \frac{v_s}{c}\right) \tag{20}$$

$v_s = 91.1\ \text{m/s}$ 를 써서 $\omega = 1.49\ \text{rad}\,\text{s}^{-1}$ 을 얻는다. $\omega R = 179.66\ \text{m/s}$ 로부터 $R = 120.57\ \text{m}$ 이다. f_0 를 얻으려면 아주 먼 오른쪽에서 $f_{\min} = 5327.82\ \text{Hz}$ 를 식 (8)에 넣어 f_0 에 대해 풀면 된다. 이로부터 $f_0 = 990.26\ \text{Hz}$ 를 얻는다.

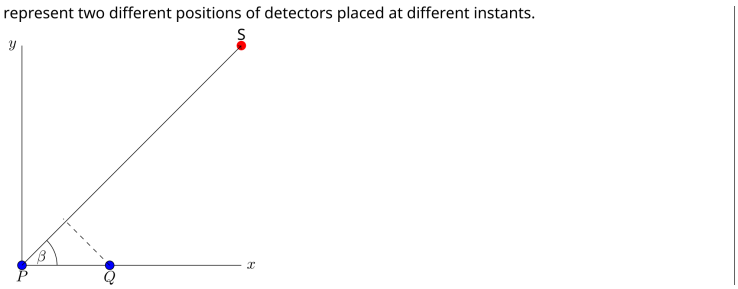
A.5 (계속)

f_0 (Hz)	ω (s^{-1})	R (m)	v_S (m/s)
990.26 Hz	1.49 s^{-1}	120.57 m	91.1 m/s

A.6 (2.0 pt)

β 의 계산

아래 그림은 개략도로, S는 아주 먼 거리에 있는 음원이다. P와 Q는 서로 다른 시각에 놓인 검출기의 두 위치를 나타낸다.



먼 거리에서 소리 신호가 검출기 P 에 도달하는 데 걸린 시간을 $t_0 = 1009.61$, 검출기 Q 에 도달하는 데 걸린 시간을 $t_1 = 1007.85$ 라 하자.

검출기 P 와 검출기 Q 사이의 거리는 660 m이고 소리가 각 검출기에 도달하는 데 걸린 시간은 각각 1009.61 s와 1007.85 s이다. 시간 차의 식은 다음과 같다.

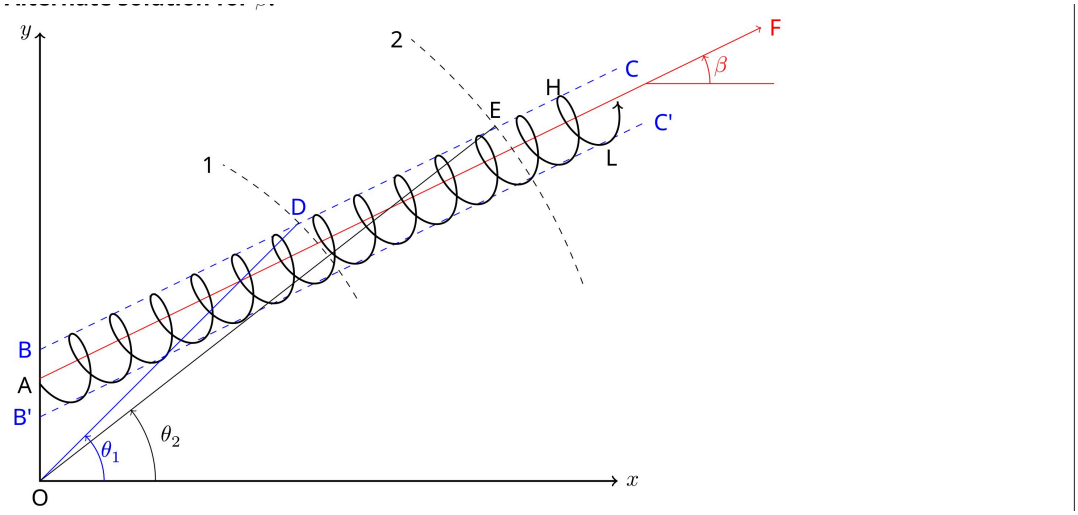
$$t_0 - t_1 = \frac{PQ\cos(\beta)}{c} \tag{21}$$

$$\cos(\beta) = \frac{(t_0 - t_1)c}{PQ} \tag{22}$$

이로부터 $\beta = 28.36^\circ$ 를 얻는다.

A.6 (계속)

β 에 대한 다른 풀이:



빨간 선 AF는 원의 속도 v_s 의 방향을 나타낸다. $\vec{v}_s$ 가 x 축과 이루는 각 β 를 구하는 것이 목표이다.

검출기가 검출하는 진동수 값은 두 가지에 의존한다. 첫째는 사이클로이드 위의 어느 위치에서 음원이 신호를 냈는가이고, 둘째는 검출기의 위치이다.

음원 궤적의 한 주기에서 점 H와 L은 각각 음원의 속력이 최대와 최소가 되는 위치를 나타낸다. 이는 이 점들에서 $\vec{v}_s$ 가 회전의 접선 속도 성분과 나란하거나 반대 방향이기 때문이다.

음원이 사이클로이드 위에서 n 번째 회전을 할 때, 원호 1 위의 여러 각 위치에 놓인 검출기는 그 위치에 대응하는 서로 다른 $f_{\max}$ 값을 검출한다. x 축 근처의 각 위치(0°)에서 시작하면, 검출기가 (θ_1) 의 점 D에 놓일 때까지 $f_{\max}$ 가 계속 커진다. 실제로 AF에 나란한 직선 BC 위의 어느 위치에서든 검출기는 모든 $f_{\max}$ 중 최대를 검출한다. 마찬가지로 검출기를 역시 AF에 나란한 직선 $B'C'$ 위의 어디에든 놓으면 $f_{\min}$ 중 최소를 검출한다. 모의실험에서는 속도를 0으로 두고 x, y 좌표를 바꾸어 각을 바꿀 수 있다.

검출기의 거리를 원호 2로 바꾸어 이 과정을 되풀이한다. 원호를 훑으면서 검출기가 $f_{\max}$ 중 최대를 검출하는 각 θ_2 를 얻을 수 있다.

각 위치 θ_1 과 θ_2 를 정하고 나면, 점 D와 E의 좌표를 이용해 선분 DE가 x 축과 이루는 각을 계산할 수 있다. 이것이 각 β 이다. 점 D와 E의 좌표를 각각 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 라 하면

$$\beta = \arctan \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{23}$$

A2-9

A.6 (계속)

이 과정을 아래 표와 그에 대응하는 그래프로 나타내었다. 먼저 검출기를 원점에서 8000 m 떨어진 곳에 두고 각 위치 0°–90°에 대응하도록 좌표를 바꾼다. 고정된 어떤 주기(여기서는 10번째)에 대해 $f_{\max}$ 를 기록한다. $f_{\max}$ 대 θ 그래프에서 θ_1 이 25°–35° 사이임을 알 수 있다.

θ	$f_{\min}$	$f_{\max}$
5	676.08	2670.30
10	722.99	3620.51
20	763.49	4957.28
30	781.46	5478.86
40	753.98	4032.21
50	711.98	3007.44
60	677.39	2486.46
70	651.25	2185.81
80	630.99	1987.99
90	614.68	1845.65

A.6 (계속)

θ_1 을 더 정확히 정하기 위해 더 작은 간격으로 살펴본다. 아래는 25°–35° 사이의 변화에 대한 표와 그래프이다.

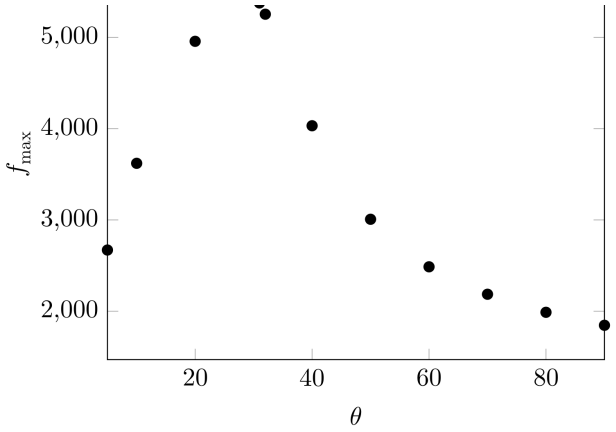
θ	$f_{\min}$	$f_{\max}$
25	777.95	5538.23
26	779.67	5589.40
26.9	780.80	5609.15
27	780.90	5609.74
27.3	781.18	5609.546
27.5	781.33	5607.78
28	781.62	5597.66
29	781.81	5553.37
30	781.46	5478.86
31	780.58	5377.65
32	779.17	5254.35

표와 그래프로부터 $\theta_1 = 27^\circ$ 임이 분명하다. 다른 거리 16000 m에 대해서도 이를 되풀이한다. 이 거리에 대한 표와 그래프는 아래와 같다.

A2-11

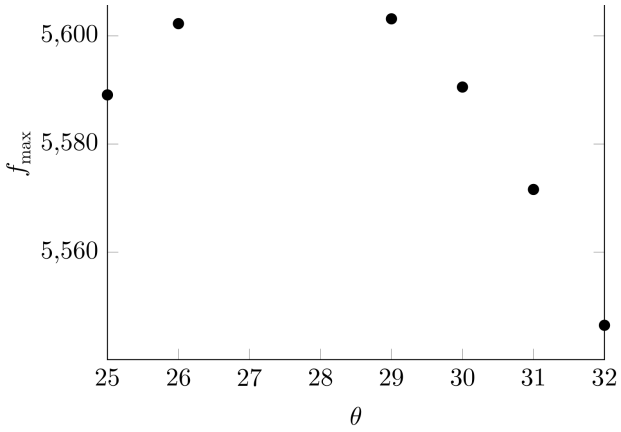
Korean (Korea (Republic of))

A.6 (계속)



θ	$f_{\min}$	$f_{\max}$
25	781.12	5589.093
26	781.47	5602.27
27	781.70	5609.05
27.4	781.76	5609.95
27.5	781.77	5610.01
28	781.81	5609.34
29	781.80	5603.16
30	781.66	5590.544
31	781.41	5571.60
32	781.04	5546.48

A.6 (계속)



이로부터 $\theta_2 = 27.5^\circ$ 를 얻는다. 이에 대응하는 x_1, y_1, x_2, y_2 값을 쓰고 식 (23)을 이용하면

$$\beta = \arctan \frac{7468.77 - 3631.92}{14192.17 - 7128.052194} = 28.5^\circ \tag{24}$$

A2-13

A.7 (2.1 pt)

원의 중심 좌표

이 문항에서는 검출기를 어떤 고정된 위치, 예를 들어 y 축 위에 둔다. 음원의 처음 위치와 검출기의 개략도가 아래 그림에 나타나 있다(그림은 실제 비율이 아니다).



음원이 보낸 첫 신호의 검출 진동수를 기록한다. R 값과 음원의 처음 좌표는 이미 알고 있다. 검출기를 y 축 위 500 m에 두면 $t = 0$ 에서 검출되는 진동수, 즉 첫 신호는 795.69 Hz이다. 음원의 좌표 $(419.99, 499.99)$ m를 쓰면

$$\tan(180 - \alpha) = \frac{0}{419.99} \tag{25}$$

$$\alpha = 180^\circ \tag{26}$$

검출 진동수와 α 값을 식 (7)에 넣으면

$$795.69 = \frac{990.26 \times 330}{330 - 91.1\cos(28.5 - 180) + 179.66\sin(\phi - \alpha)} \tag{27}$$

$$\Rightarrow \phi \approx 0^\circ \tag{28}$$

이로부터 음원이 도는 원의 중심 좌표는 $(299.42, 499.99)$ m이다.