A 부분.

CO_2 센서를 켠다. 센서가 스스로 보정하는 데 2–3분이 걸리고, 그 뒤에 측정이 시작된다.

본 실험 전에 용기 안의 CO_2 농도는 대기 중 CO_2 농도 c_0과 같다. 이를 구해 보자.

$$c_0 = (0.050 \pm 0{,}005)\%.$$

이제 확산 과정을 이론적으로 살펴보고, 전형적인 확산 시간 τ를 막의 기하학적 매개변수로 나타내 보자.

단위 시간당 용기 안 CO_2 분자 수의 변화는 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt}(cV) = -jpS_0$$

여기서 pS_0은 채널들의 전체 단면적이다. 채널을 지나는 흐름은

$$j = D\frac{c - c_0}{h}$$

이고, 농도 $c(t)$에 대한 미분 방정식을 얻는다.

$$\frac{dc}{dt} = -\frac{DpS_0}{Vh}(c - c_0)$$

해는

$$c(t) = c_0 + C\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

여기서

$$\tau = \frac{Vh}{pS_0D}$$

문제에 따르면 막의 채널에서는 크누센 흐름이 일어난다. 이 경우 확산 계수 D는 분자와 채널 벽의 충돌로 정해진다.

$$D = \frac{1}{3}vd.$$

이산화탄소의 몰질량 μ = 44 g/mol을 알면, 실온 T = 295 K에서 CO_2 분자의 열속력을 계산할 수 있다.

$$v = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = 376\ m/s$$

결국

$$\tau = \frac{3Vh}{pS_0vd}$$

막의 전체 넓이 S_0 = $\pi/4{d_w}^2$ = 1.33 cm^2를 계산한다. 용기의 길이와 안지름을 잰다:

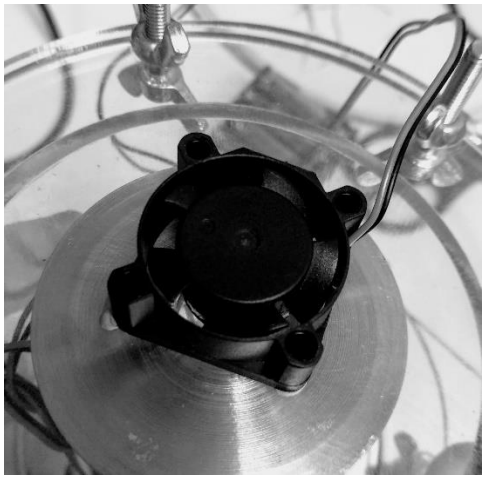
$$L = 5.0\ sm$$

$$D_{in} = 7.4\ sm$$

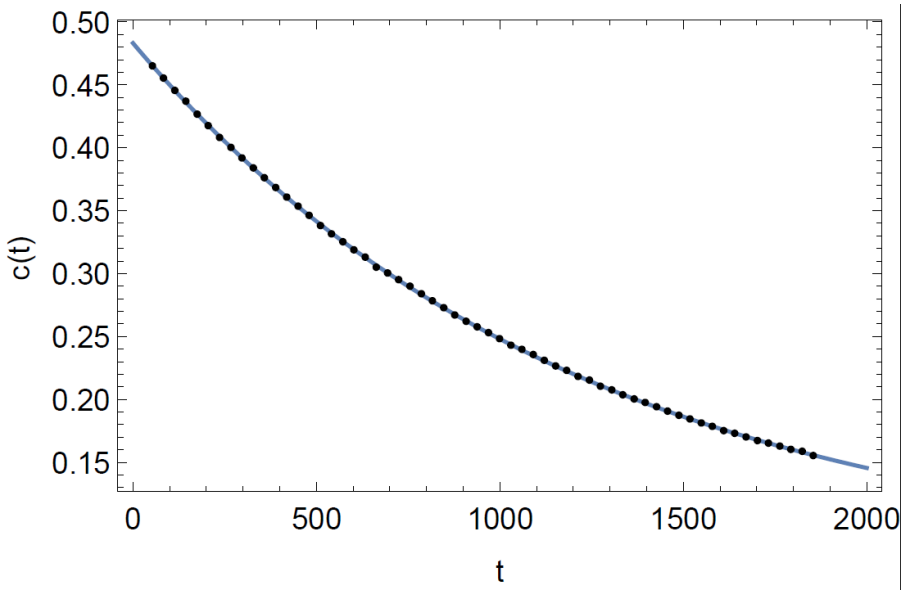
그리고 안쪽 부피 V = 215 cm^3를 계산한다. 팬, 센서, 관의 부피는 무시해도 된다.

이제 실험을 진행하자. 이산화탄소의 공급원으로 우리 자신의 폐를 쓴다. 숨을 들이쉰 뒤 관을 통해 원통 안으로 숨을 내쉬고, 두 관을 모두 클립으로 막는다. 숨을 내쉬는 동안 용기 안의 공기가 잘 순환하도록 두 번째 관이 필요하다.

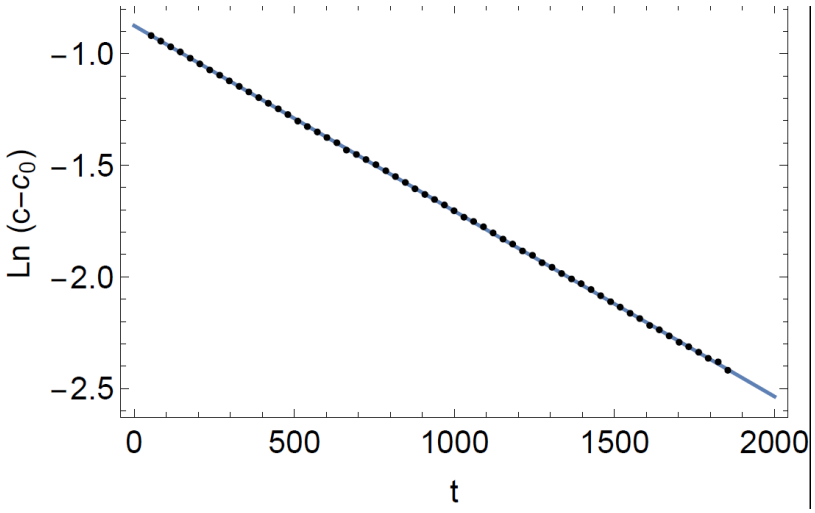
용기 안의 CO_2 농도가 매 순간 고르게 하려면 용기 안의 공기를 섞는 내부 팬을 켠다. 막 바깥의 CO_2 농도가 c_0과 같게 하려면 두 번째 팬을 켜서 막 바깥쪽으로 바람을 보낸다.



농도는 %, 시간은 초 단위로 하여 $c(t)$의 의존성을 잰다. 결과는 그래프와 같다.



좌표 t, $\ln(c-c_0)$로 선형화한 그래프를 그리자.



그 기울기로부터 구하려는 시간을 계산한다.

$$\tau = 1204 \pm 10\ sec$$

기울기와 그 불확도는 최소제곱법(OLS)으로 계산했다.

참고.

1. 날숨 속의 CO_2 농도는 4%이고 센서의 측정 상한은 0.5%이다. 따라서 장치에 세게 불어 넣으면 센서의 눈금을 넘어선다. 참가자는 용기 안 CO_2 농도가 0.5% 아래로 떨어질 때까지 기다렸다가 측정을 시작해도 된다. 용기 안의 CO_2 농도를 낮추는 방법이 두 가지 더 있다. (시료가 아니라 관이 달린) 장치의 뚜껑을 열고 팬으로 장치 안에 대기를 불어 넣을 수 있다. 다른 방법은 두 관을 모두 열고 한 관으로 공기를 빨아내는 것이다. 그러면 대기가 두 번째 관을 통해 용기 안으로 들어온다. 이 방법이 가장 빠르고 쉽다.

2. B, C 부분의 장비는 A 부분의 장비와 독립적이므로, 광학 측정을 확산 측정과 동시에 할 수 있다. 더욱이 센서는 데이터를 저장한다.

3. 참가자가 두 번째(외부) 팬을 쓰지 않으면 측정한 τ 값이 약 2배 커지고, 그러면 기공 지름에 대해 틀린 답을 얻는다.

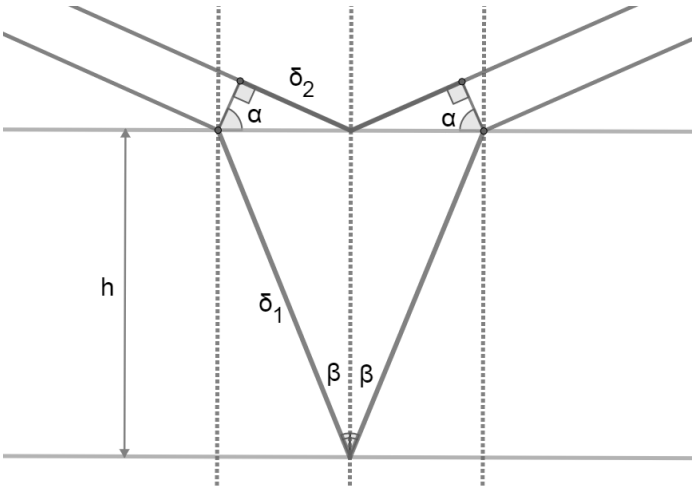
B 부분.

막의 윗면과 아랫면에서 반사된 빔 사이의 광로차:

$$\delta = 2\delta_1 - 2\delta_2 + \frac{\lambda}{2}$$

굴절률이 더 큰 면에서 반사될 때 위상이 바뀌므로 $\lambda/2$가 나타난다.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$$



$$\delta_1 = n\frac{h}{\cos\beta}$$

$$\delta_2 = \frac{h}{\cos\beta}\sin\beta\sin\alpha$$

$$\delta - \frac{\lambda}{2} = \frac{2h}{\cos\beta}(n - \sin\beta\sin\alpha) = \frac{2h}{\cos\beta}(n - n\sin^2\beta) = \frac{2nh}{\cos\beta}\cos^2\beta = 2nh\cos\beta = 2nh\sqrt{1-\sin^2\beta}$$

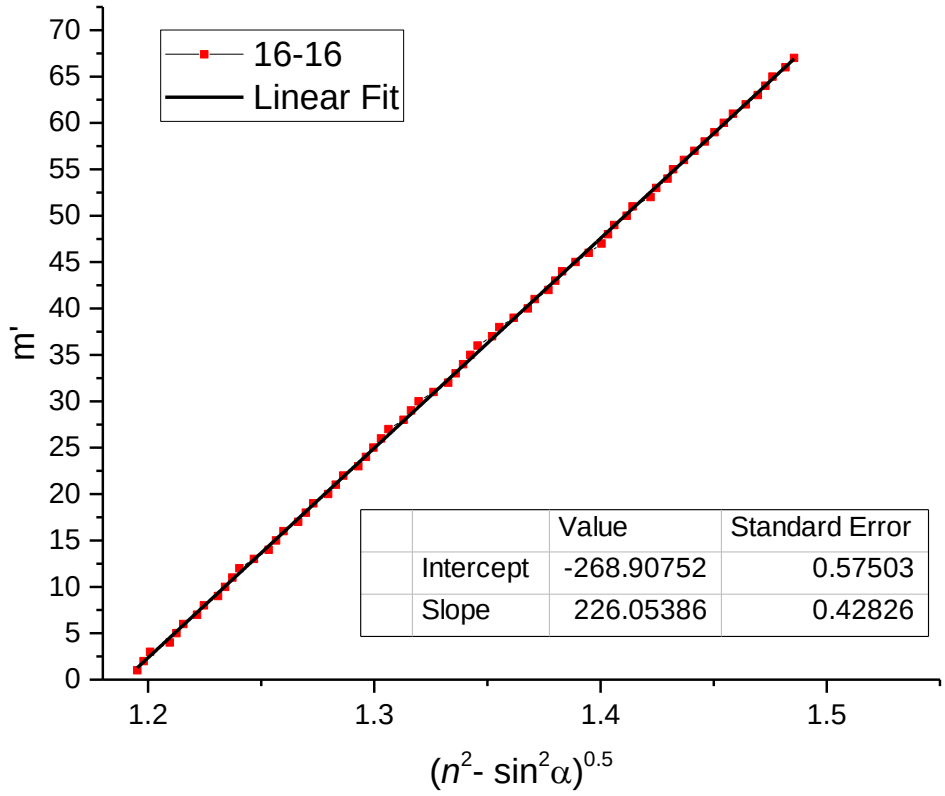
$$= 2nh\sqrt{1-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}} = 2h\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}$$

$$\delta = 2h\sqrt{n^2-\sin^2\alpha} + \frac{\lambda}{2}$$

(1)

반사율의 극대는 $\delta = m\lambda$일 때 관찰된다(m은 정수). 반사율의 극소는 $\delta = (m+1/2)\lambda$일 때 관찰된다.

시료를 돌리면 수십 개의 극소와 극대를 볼 수 있다. 식 (1)에 따라 $\sqrt{(n^2 - \sin^2\alpha)}$는 극소의 번호에 대해 선형이며, 그래프와 같다. 기울기는 $2h/\lambda$이다.

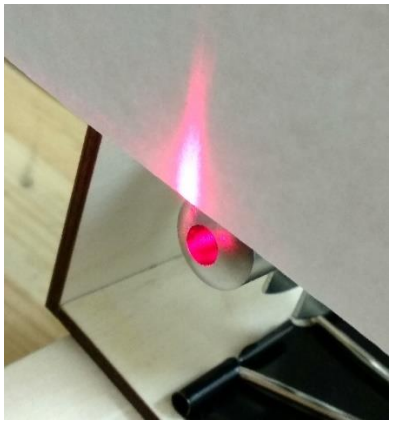


기울기와 그 불확도는 최소제곱법(OLS)으로 계산했다.

$$h = 74.6 \pm 0.2\ \mu m$$

이 데이터는 보여 주기 위한 것이다. 대회 중에 학생들이 이렇게 많은 극소의 위치를 재고 그래프를 그릴 필요는 없었다. 그렇게 해도 정확도가 나아지지 않기 때문이다. 가장 좋은 방법은 시료를 돌리며 두 각 α 사이의 극소의 수를 세는 것이다. 극소의 수 N이 클수록 정확도가 좋다. 이 경우 불확도 ε_h는 $\varepsilon_h = 1/N$으로 추정할 수 있다.

시료는 회전대에 고정되어 있지 않다. 측정하기 전에 반사된 레이저 빔을 이용해 영점을 맞추어야 한다.



C 부분.

계산에서 $\Delta n^* \equiv n_2 - n_1$, $\Delta\beta \equiv \beta_1 - \beta_2$로 쓴다.

스넬 법칙으로부터

$$n_1 \sin\beta_1 = n_2 \sin\beta_2$$

두 빔 사이의 광로차는 $\delta = h(n_1 \cos\beta_1 - n_2 \cos\beta_2)$이다. 조건 $n_2 - n_1 \ll n_1$을 고려하여 δ를 n과 Δn^*로 나타내야 한다.

$$\delta = h(n_1 \cos\beta_1 - n_2 \cos\beta_2) = h\left(n_1 \cos\beta_1 - n_1 \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cos\beta_2\right) = n_1 h \sin\beta_1 \left(\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\right)$$
$$= nh \sin\beta\,(\cot\beta_1 - \cot\beta_2)$$

$$\frac{\cos\beta_1 - \cos\beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \simeq (\cot\beta)' = -\frac{1}{\sin^2\beta}$$

$$\delta = -\frac{nh}{\sin\beta}\Delta\beta$$

(C1)

이제 $\Delta\beta$를 Δn^*로 나타내자.

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}$$

$$\frac{n_2 - \Delta n^*}{n_2} = \frac{\sin(\beta_2 + \Delta\beta)}{\sin\beta_2} \simeq \frac{\sin\beta_2 + \cos\beta_2\,\Delta\beta}{\sin\beta_2}$$

$$\Delta\beta = -\frac{\Delta n^*}{n}\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$$

(C2)

(C1)과 (C2)를 합치면 다음 식을 얻는다.

$$\delta = \frac{h}{\cos\beta}\Delta n^*$$

(C3)

Δn과 Δn^* 사이의 관계는 문제에 주어진 식에서 찾을 수 있다.

$$\frac{1}{n_2^2} = \frac{\cos^2\beta_2}{n_0^2} + \frac{\sin^2\beta_2}{n_e^2}$$

(C4)

$$\frac{1}{n_1^2} = \frac{1}{n_0^2}$$

(C5)

(C4)-(C5):

$$\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} = \frac{\cos^2\beta_2}{n_0^2} - \frac{1}{n_0^2} + \frac{\sin^2\beta_2}{n_e^2}$$

$$\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2 n_2^2} = \sin^2\beta_2 \frac{n_0^2 - n_e^2}{n_0^2 n_e^2}$$

$$\frac{n_1 + n_2}{n_1^2 n_2^2}\Delta n^* = \frac{n_0 + n_e}{n_0^2 n_e^2}\sin^2\beta_2\,\Delta n$$

$$\Delta n^* = \sin^2\beta\,\Delta n$$

(C6)

(C3)을 고려하면 다음을 얻는다.

$$\delta = \frac{h}{\cos\beta}\sin^2\beta\,\Delta n$$

(C7)

편광된 파동은 사영 성분끼리 간섭할 수 있다. 편광축이 막의 회전축과 45°를 이루는 편광판 2개를 써야 한다.

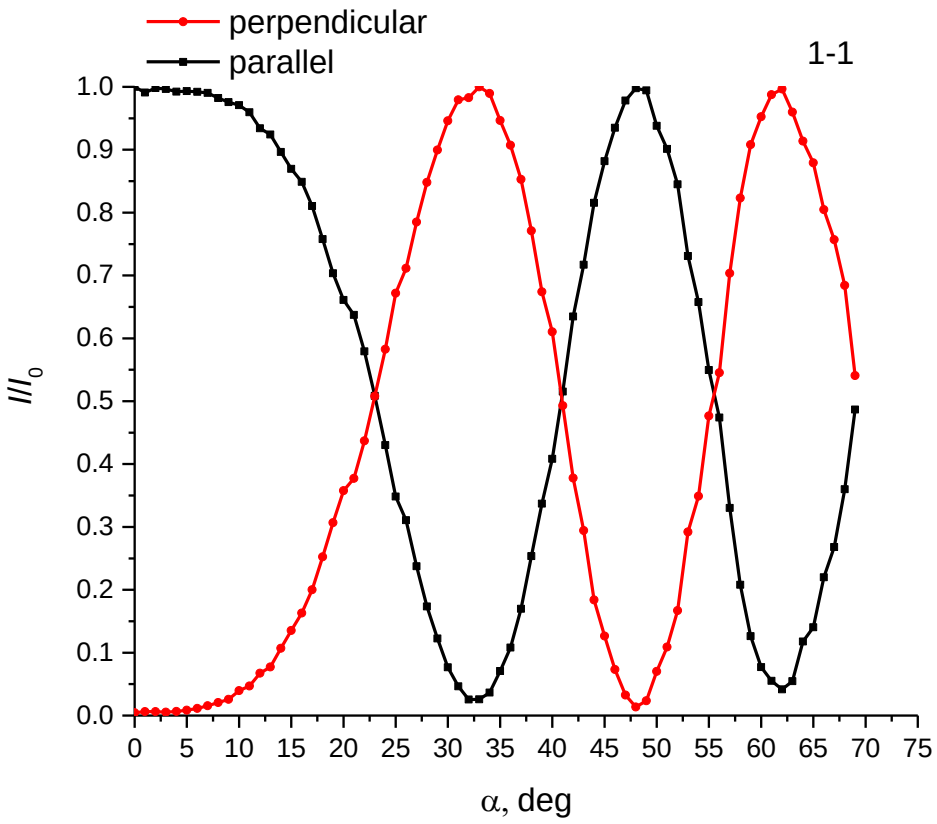
첫 번째 편광판은 빔 1과 빔 2의 세기를 같게 한다. 두 번째 편광판은 파동들을 자신의 편광축에 사영하여 간섭하게 한다. 두 편광판의 편광축은 수직이거나 나란할 수 있다. 이 배치를 쓰면 세기가 0인 극소와 밝은 극대를 관찰할 수 있다.

주된 효과를 관찰하는 데 다른 배치를 써도 된다. 두 번째 편광판 없이 배치하거나(레이저 빔 자체가 편광되어 있다), 편광판을 45°가 아닌 각으로 놓을 수도 있다.

어느 경우든 막을 돌리면 투과율의 극값 세 개를 찾을 수 있다. 위에서 설명한 배치를 쓰면 이 점들에서 의 광로차는 $\delta_1 = \lambda/2$, $\delta_2 = \lambda$, $\delta_3 = 3/2\lambda$이다.

입사각에 따른 투과율이 그래프에 있다. 이렇게 완벽한 데이터를 얻으려고, 큰 각에서 반사율이 커지는 것을 고려하도록 두 번째 편광판 없이도 투과율을 쟀다.

학생들이 측정을 많이 하거나 그래프를 그릴 필요는 없었다. 과제를 해결하는 데 꼭 필요하지 않다. Δn을 가능한 한 정확하게 계산하려면 어떤 방법으로든 투과율 극값 세 개의 각만 구하면 된다.



Δn 값은 식 (C7)에 따라 계산했다.

δ	$\alpha, °$	$\beta, °$	Δn
$1/2\ \lambda$	32.5	20.1	0.0352
λ	48	27.2	0.0375
$3/2\ \lambda$	62	31.8	0.0405

$$\varepsilon_{\Delta n} = \frac{1}{\Delta n}\sqrt{\sum_{i}^{N}\frac{(\Delta n_i - \Delta n)^2}{N(N-1)}}$$

$$\Delta n = 0.0378 \pm 0.0015$$

$\Delta n(p)$ 그래프를 이용해 시료의 다공도를 구한다.

$$p = 13.5 \pm 0.5\%$$

코다

이 부분에서는 앞 부분들에서 얻은 결과를 이용해 기공의 지름을 구할 수 있다.

$$\tau = 1204 \pm 10$$

$$h = 74.6 \pm 0.2\ \text{мкм}$$

$$p = 13.5 \pm 0.5\%$$

A 부분에서 다음 식을 유도했다.

$$\tau = \frac{3Vh}{pS_0vd}$$

따라서

$$d = \frac{3Vh}{pS_0\,v\tau}$$

여기서 v는 CO_2의 열속력이다($T \approx 300\ K$, 더 정확할 필요는 없다):

$$v = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = 376\ m/s$$

V는 원통형 용기의 부피이며, 자로 잴 수 있다:

$$V = \pi\frac{D_{in}^2}{4}L$$

$$L = 5.0\ cm$$

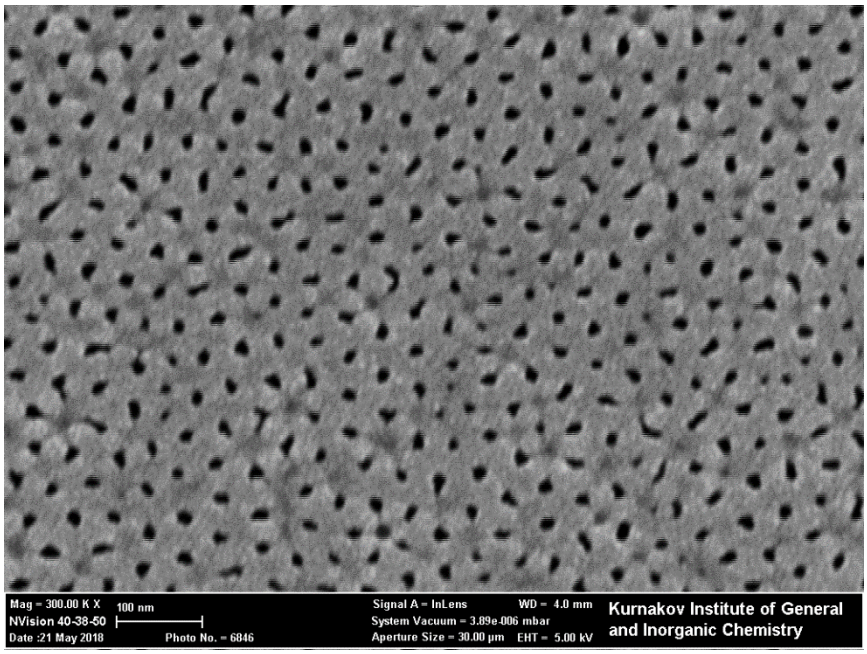
$$D_{in} = 7.4\ cm$$

$$V = 215 cm^3$$

수치 답은:

$$d = 6.0 \pm 0.5\ nm$$

이 실험 문제에서 다룬 막의 표면 사진이다. 이 사진은 주사 전자 현미경(SEM)으로 얻었다. 채널의 평균 지름은 약 15 nm이다. 실험 결과와 차이가 나는 까닭은, 팬 두 개를 모두 켜도 기공 안의 확산만이 속도를 제한하는 단계는 아니기 때문이다. 게다가 채널의 일부는 가지를 치거나 막혀 있다 (A.A. Noyan et al. / Electrochimica Acta 226 (2017) 60–68).



이 문제는 Alexey Noyan, Alexander Kiselev, Fedor Tsybrov가 개발하고 설계했다. 양극 산화 알루미늄 시료는 모스크바 국립대학교(MSU)에서 Kirill Napolskii, Alexey Leontiev, Ilya Roslyakov, Sergey Kushnir가 제작했다.

이 실험 문제에 대해 궁금한 점이 있으면 언제든지 저자(noyan@phystech.edu)에게 연락하기 바란다.