1 숨은 전하

1.1 x_Q와 y_Q 찾기

첫 단계는 시험 전하의 x, y 좌표를 찾는 것이다. 두 가지 방법을 소개한다.

1.1.1 방법 1

처음 발사점을 아무 곳이나 골라 고정한다. $(x_i,y_i) = (0,0)$이 좋은 선택이다. 가속 전압을 바꾸어 스크린에 여러 번 맞히고, 맞은 점들을 그래프에 그린다. 점들을 지나는 직선을 양쪽으로 늘려 그린다. 표적 전하는 이 직선 위에 있어야 한다.

다른 발사점으로 되풀이한다. $(x_i,y_i) = (0,10)$이 좋은 선택이다. 두 직선은 교차하며, 교점이 표적 전하의 위치일 가능성이 크다.

처음 두 직선 가운데 하나와 거의 수직이 되는 곳에 세 번째 발사점을 고른다. $(x_i,y_i) = (0,-10)$이 좋은 선택이다. 세 직선은 모두 한 점에서 만나야 한다. 그 점이 표적 전하의 위치 (x_Q,y_Q)이다.

1.1.2 방법 2

이 방법은 훨씬 덜 정확하다. x_i를 고정하고 y_i를 바꾸며 y_f를 관찰한다. y_f가 거의 같아지는 y_i 값이 있고, 그 양쪽에서는 y_f가 y_i에서 멀어진다. $y_i \approx y_f$가 되는 이 특별한 값이 y_Q의 위치이다. 같은 과정을 y_i를 고정하고 x_i를 바꾸며 되풀이한다. 표적 전하가 스크린의 범위 밖에 있으면 이 기법은 통하지 않는다는 점에 유의하라!

이 방법을 쓰는 학생은 이 문제에서 만점을 받을 수 없다.

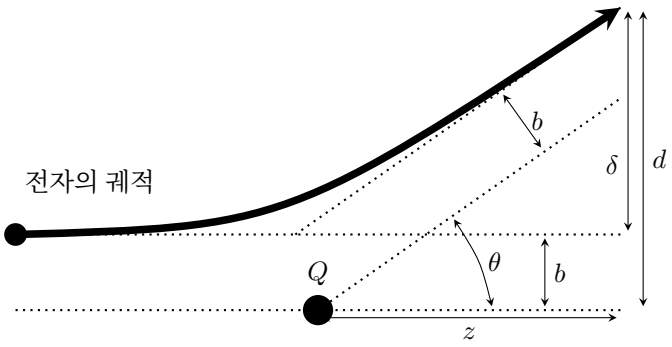
1.2 Q와 z_Q 구하기

러더퍼드 식에 주목하자. 다음 꼴로 쓰면 편리하다.

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{kqQ}{2Eb}$$

한 가지 선택은 ϑ를 고정하고 E와 b를 바꾸는 것이다. 다른 선택은 b를 작게 고정하고 E를 바꾸는 것이다. 각 방법에는 장단점이 있다.

러더퍼드 산란 식의 그림은 아래와 같이 그릴 수도 있다.



1.2.1 방법 1: ϑ 고정

스크린 거리 d는 다음 관계로 주어진다.

$$d\cos\theta = z\sin\theta + b$$

이는 전자가 산란 점근선에 이르렀을 때만 엄밀히 성립하며, 그렇지 않으면 측정한 d가 참값보다 크다.

ϑ가 고정되려면 곱 bE를 일정하게 하면 된다. 이때 b를 세로축, d를 가로축으로 그래프를 그린다. 그래프의 기울기는 $\cos\vartheta$를, 절편은 $z\sin\vartheta$를 준다. z의 부호는 중요하지 않다. 스크린 뒤에 있다고 했기 때문이다. 러더퍼드 식으로 돌아가 Q를 구한다.

b를 작게 고르면 결과를 개선할 수 있다. 그러면 전자가 산란 점근선에 더 가까워지기 때문이다.

방법 1A: δ에 주목

δ는 직접 잴 수 있으므로 이 양에 주목하는 것이 더 쉬워 보일 수 있다. 문제는 궤적의 두 점근선의 교점이 스크린에서 거리 z에 있지 않고, $b/\tan(\vartheta/2)$만큼 더 멀리 있다는 것이다. 이 보정을 무시하면 $\delta = z\tan\vartheta$가 되어 곱 zQ만 구할 수 있다.

보정을 넣으면 정말 보기 흉한 식이 나온다.

$$\frac{\delta}{\tan\theta} = z + \frac{b}{\tan(\theta/2)}$$

이 식을 줄이려는 대부분의 시도는 학생을 앞 문단과 같은 결과로 되돌리며, zQ 값만 얻을 수 있다.

1.2.2 방법 2: b를 작게 고정

두 번째 방법은 탄젠트의 두 배각 공식을 쓰는 것이다.

$$\tan 2\alpha = \frac{}{1-\tan^2\alpha}$$

$2a = \vartheta$로 놓고 러더퍼드 식과 합치면

$$\tan\theta = \frac{2\gamma E}{\gamma^2E^2-1}$$

여기서 $\gamma = 2b/kqQ$이다. b가 d에 비해 작으면 $\tan\vartheta \approx d/z$이다. 합치면 다음 선형 식을 얻는다.

$$\frac{2E}{d} = \frac{\gamma}{z}E^2 - \frac{1}{z\gamma}$$

$2E/d$를 세로축, E^2을 가로축으로 그리면 기울기가 γ/z, 절편이 $1/z\gamma$인 직선이 되어야 한다. 문제는 처음 빔 위치의 가우스 오차이다. b가 작아질수록 그 상대 오차가 커진다. 처음 빔의 퍼짐이 없다면 이 방법은 극한 $b \to 0$에서 정확할 것이다.

$b \to 0$

방법 2A: δ에 주목

앞에서처럼 이 방법에는 궤적 점근선의 교점이 b와 ϑ의 함수라는 단점이 있다. 이 오차를 무시하면 학생은 $2E/\delta$를 세로축, E^2을 가로축으로 그릴 수 있다. d의 식에서 $b/\cos\vartheta$의 오차는 없어졌지만, z의 식에 $b/\tan(\vartheta/2)$의 오차가 더해졌다. 이 경우 작은 각은 좋지 않다. 그래도 처음 빔의 퍼짐이 없다면 이 방법은 극한 $b \to 0$에서 정확할 것이다.

1.2.3 방법 3: 곱 zQ만 구하기

근사 $\tan(\vartheta/2) = \delta/2z$로 시작하고 싶어진다. 그러면 러더퍼드 식은 다음과 같이 된다.

$$\delta = \frac{kqQz}{Eb}$$

학생은 δ를 고정하거나(어렵지만!), E를 고정하거나, b를 고정하고 나머지 두 변수의 알맞은 조합을 그려 직선을 얻을 수 있다. 이로부터 곱 Qz를 구할 수 있다. 방법 2의 절편을 무시해도 이 결과에 이른다. 사실 그 절편은 외삽한 값이고 오차에 민감하므로 부호가 틀리기 쉬운데, 그러면 학생은 사실상 여기에 이른 셈이다.

1.3 채점 기준

1.3.1 1부 (1점)

x_Q와 y_Q의 위치를 찾으려는 시도

x와 y 찾기: 방법 1	
직선 3개 이상 (0.5점), 직선 2개만 (0.3점), 직선 1개만 (0.1점)	0.5 p
각 직선에 데이터 점 4개 이상 (0.3점); 각 직선에 3개 이상 (0.2점); 각 직선에 2개 이상 (0.1점). 처음 발사점도 데이터 점의 하나로 쳐도 된다.	0.3 p
각 직선에서 점들이 그래프의 약 1/3을 채우도록 퍼짐 (0.2점); 약 1/5을 채움 (0.1점)	0.2 p
1부 최대 점수:	**1.0 p**

학생이 각 직선에 데이터 점이 둘뿐인 두 개 (이상)의 직선의 교점을 구하면, 직선 2개에 (0.4점), 3개에 (0.6점), 4개에 (0.7점), 5개 이상에 (0.8점)을 준다. 그다음 퍼짐 조건을 평가한다.

x와 y 찾기: 방법 2	
방법 2 사용	0.4 p
1부 최대 점수:	**0.4 p**

1.3.2 2부 (3점)

x_Q와 y_Q 결과의 정확도

x와 y 찾기: 두 방법 공통	
x가 5.3 → 5.5 cm 범위 (1.0점); 5.2 → 5.6 cm 범위 (0.7점); 5.1 → 5.7 cm 범위 (0.4점); 5.0 → 5.8 cm 범위 (0.1점)	1.0 p
y가 −2.5 → −2.7 cm 범위 (1.0점); −2.4 → −2.8 cm 범위 (0.7점); −2.3 → −2.9 cm 범위 (0.4점); −2.2 → −3.0 cm 범위 (0.1점)	1.0 p
x와 y 값이 각각 학생이 밝힌 오차 1배 안에서 (5.4, −2.6)과 일치 (0.5점); 한 값은 오차 1배, 다른 값은 오차 2배 안 (0.3점); 두 값 모두 오차 2배 안 (0.2점); 한 값만 오차 2배 안 (0.1점)	0.5 p
x와 y의 오차 진술이 그래프나 수학에 분명하고 일관되게 반영됨 (0.5점); 오차 진술이 스크린 해상도 1 mm나 빔 해상도 1 mm만 다룸 (각각 0.1점)	0.5 p
2부 최대 점수:	**3.0 p**

1.3.3 3부 (1점)

데이터 수집과 변수의 예비 계산

z와 Q 찾기: 두 방법 공통	
b와 d를 구하는 데 쓸 수 있는 데이터를 모음	0.1 p
데이터에 E가 있음	0.1 p
데이터에 처음과 나중의 x, y가 있음	0.2 p
데이터에서 b를 올바르게 계산함	0.1 p
데이터에서 d나 δ를 올바르게 계산함	0.1 p
측정이 8개 이상 (0.4점); 4개 이상 (0.3점)	0.4 p
3부 최대 점수:	**1.0 p**

참고: E는 J이나 eV로 잴 수 있다. 학생이 전압만 기록하고 문제 전체에서 E 대신 쓰면 감점하지 않는다. 각 측정에서 x, y의 처음 값과 나중 값을 모두 제대로 기록하지 않으면 위의 0.2점을 받지 못한다. x나 y의 처음 값을 고정한 일련의 측정을 했다면 한 번만 기록해도 되지만, 어디에 해당하는지 분명히 해야 한다. “빗나감” 결과는 기록해야 하지만 측정 수 8 또는 4에는 넣지 않는다. “빗나감”을 기록하지 않아도 감점은 없다.

1.3.4 4부 (2.5점)

풀이 방법의 선택, 수학과 물리의 유도, 그래프 그리기. 이 부분은 zQ와 Q 결과의 정확도와는 관계없다. 그것은 5부에서 평가한다.

z와 Q 찾기: 방법 1 또는 1A	
d(또는 δ)와 b 사이의 올바른 관계 유도 (1.0점); 수학/기하 오류가 정확히 하나 (0.6점); 정확히 둘 (0.2점); 그런 오류는 없지만 물리 오류가 정확히 하나 (0.4점); 방법 1A에서 보정을 무시하면 (−0.5점) 감점	1.0 p
bE가 일정해야 함을 알아챔	0.3 p
b 대 d(또는 δ) 그래프가 있음	0.6 p
그래프의 기울기로 $\cos\vartheta$를 구함. 여기서는 정확도는 따지지 않고 시도만 본다.	0.3 p
그래프의 절편으로 z를 구함. 여기서는 정확도는 따지지 않고 시도만 본다.	0.3 p
4부 합계:	**2.5 p**

z와 Q 찾기: 방법 2 또는 2A	
E와 d 또는 δ 사이의 올바른 관계 유도 (1.3점); 수학/기하 오류가 정확히 하나 (1.0점); 정확히 둘 (0.4점); 그런 오류는 없지만 물리 오류가 정확히 하나 (0.7점)	1.3 p
$2E/d$(또는 $2E/\delta$) 대 E^2 그래프가 있음	0.6 p
그래프의 기울기와 절편으로 γ(또는 동등한 양)를 구함. 정확도는 따지지 않고 시도만 본다.	0.3 p
그래프의 기울기와 절편으로 z(또는 동등한 양)를 구함. 정확도는 따지지 않고 시도만 본다.	0.3 p
4부 합계:	**2.5 p**

곱 zQ만 구하기: 방법 3	
E와 δ 사이의 올바른 관계 유도 (1.3점); 수학/기하 오류가 정확히 하나 (1.0점); 정확히 둘 (0.4점); 그런 오류는 없지만 물리 오류가 정확히 하나 (0.7점)	
δ 대 $1/E$, δ 대 $1/b$, 또는 E 대 $1/b$ 그래프가 있음 (나머지 변수는 일정)	0.6 p
그래프의 기울기로 Qz(또는 동등한 양)를 구함. 정확도는 따지지 않고 시도만 본다.	0.3 p
4부 합계:	**2.2 p**

최대 0.6점인 그래프에서는 축 이름이 없는 축마다 −0.1점, 눈금이 없거나 틀린 축마다 −0.1점, 잘못 찍은 점마다 −0.1점, 최적 직선이 곧지 않으면 −0.1점을 깎는다. 단 그래프 점수는 음수가 될 수 없다.

선형 방정식을 대수적으로 풀고 그래프를 보이지 않은 학생은: 선형 회귀를 썼다는 분명한 표시 (0.2점); 맞춤의 좋음/정확도를 평가하는 상관 계수나 그에 해당하는 계산 (0.2점); (2차, 지수 등이 아니라) 선형 맞춤이 정말로 타당하다는 분명한 평가 (0.2점)가 있어야 한다.

방법 3만 시도한 학생은 이 부분에서 만점을 받을 수 없다.

둘 이상의 방법을 시도한 학생은 보통 더 높은 점수를 주는 방법의 점수만 받는다.

1.3.5 5부 (2.5점)

zQ와 Q 결과의 정확도 평가

z와 Q 찾기: 방법 1 또는 2	
$\lvert z\rvert$가 11 → 12 cm 범위 (1.0점); 10 → 13 cm (0.7점); 8 → 14 cm (0.4점); 6 → 20 cm (0.1점)	1.0 p
Q는 음수이다!	0.1 p
$\lvert Q\rvert$가 70 → 100 pC 범위 (0.9점); 50 → 150 pC (0.7점); 10 → 500 pC (0.4점); 1 → 1000 pC (0.1점)	0.9 p
z와 Q 값이 각각 학생이 밝힌 오차 2배 안에서 $\lvert z\rvert = 11.5$ cm, $\lvert Q\rvert = 86$ pC와 일치 (0.3점); 한 값만 오차 2배 안 (0.2점); 오차는 밝혔으나 둘 다 범위 밖 (0.1점)	0.3 p
z와 Q의 오차 진술이 그래프나 수학에 분명하고 일관되게 반영되고, 무작위 오차와 근사의 계통 오차를 모두 다루거나 언급함 (0.2점); 무작위나 계통 오차 가운데 하나만 다룸 (0.1점)	0.2 p
5부 최대 점수:	**2.5 p**

zQ만 구하기: 모든 방법	
Q는 음수이다!	0.1 p
$\lvert zQ\rvert$가 9.7 → 10.1 pC·m 범위 (0.9점); 9.5 → 10.3 pC·m (0.7점); 9 → 11 pC·m (0.4점); 5 → 20 pC·m (0.1점)	0.9 p
zQ 값이 학생이 밝힌 오차 1배 안에서 $\lvert zQ\rvert = 9.9$ pC·m와 일치 (0.3점); 오차 2배 안 (0.2점); 오차는 밝혔으나 2배보다 더 벗어남 (0.1점)	0.3 p
zQ의 오차 진술이 그래프나 수학에 분명하고 일관되게 반영되고, 무작위 오차와 근사의 계통 오차를 모두 다루거나 언급함 (0.2점); 무작위나 계통 오차 가운데 하나만 다룸 (0.1점)	0.2 p
5부 최대 점수:	**1.5 p**

오차의 원인은 (1) 0.5 mm의 빔 퍼짐, (2) 1 mm의 픽셀 해상도, (3) 탄젠트를 정의하는 근사, (4) 나중 궤적이 점근선에 다가간다는 근사, (5) 점근선의 교점에 대한 근사이다. 처음 둘은 무작위 오차이고 나머지 셋은 계통 오차이다.

z, Q, zQ를 모두 계산한 학생은 세 값 각각을 기대값과 비교한 정확도로 평가하되(각 1.0점), 가장 높은 두 결과만 받는다.

2 블랙박스

두 용수철의 장력을 각각 F_1, F_2라 하자. 상자 천장의 높이를 y_1, 두 질량의 높이를 y_2, y_3이라 하자(간단히 하려고 질량의 높이는 0이라고 가정한다). 각각의 가속도를 a_1, a_2, a_3이라 하자. (모든 끌림을 무시하면) 다음 운동 방정식을 얻는다.

$$m_1 a_1 = F - F_1 - m_1 g$$

$$m_2 a_2 = F_1 - F_2 - m_2 g$$

$$m_3 a_3 = F_2 - m_3 g$$

용수철이 비선형이므로 일반적으로 $F_1 \neq k_1(y_1 - y_2)$, $F_2 \neq k_2(y_2 - y_3)$이지만, 평형 근처의 작은 변위에서는 $k_1 = \Delta F_1/(\Delta(y_1 - y_2))$, $k_2 = \Delta F_2/(\Delta(y_2 - y_3))$임을 안다.

2.1 $m_1 + m_2 + m_3$ 구하기

계가 정지해 평형에 있을 때 상자를 붙잡는 데 필요한 힘은 전체 중력 $F_0 = (m_1 + m_2 + m_3)g$이다(운동 방정식에 $a_1 = a_2 = a_3 = 0$을 넣어도 같은 결과를 얻는다). F_0을 재려면 상자가 정지해 있을 때($a_1 = 0$) F의 값을 찾는다. 힘이 일정하므로 계가 처음부터 평형에 있음을 알 수 있다. 처음 10개 값을 평균하면 $F_0 \approx 14.774\ N$이고

$$m_1 + m_2 + m_3 = \frac{F_0}{g} = \frac{14.774\,\mathrm{N}}{9.81\,\mathrm{N/kg}} \approx 1.506\,\mathrm{kg}.$$

정확한 답: 1.506 kg.

	$m_1+m_2+m_3$ 구하기	
1a	$a_1 = 0$일 때 $F = g\,\mathrm{sum}\ m_i$임을 알아챔	0.5
1b	F_0 측정 (14.77 ± 0.10 N) 측정만 하고 쓸 방법을 모르면 0점 sum m_i가 1.51 ± 0.01 kg 범위	0.3
1c		0.2
	합계:	**1.0**

참고: sum m_i가 맞더라도 만점을 받으려면 F_0의 측정이 필요하다. 원 데이터가 없는 풀이는 0.7점을 받는다. F_0/g를 은연중에 질량의 합으로 쓴 풀이는 1c에서 0.2점을 받는다.

2.2 m_1 구하기

첫 번째 운동 방정식에서 $F = m_1 a_1 + m_1 g + F_1$이다. 용수철 힘 F_1은 위치에만 의존하므로(그리고 매 실험의 처음에 같으므로), 실험 처음의 힘 F는 가속도에만 의존한다. 따라서 처음 힘이 가속도에 따라 얼마나 달라지는지 재면 m_1을 구할 수 있다.

가장 높은 정확도를 위해 최대 가속도(30 m/s^2)를 쓴다. 세 값의 평균은 $F_{30} \approx 40.487\ N$이므로

$$m_1 = \frac{F_{30} - F_0}{a} = \frac{(40.487 - 14.774)\,\mathrm{N}}{30\,\mathrm{m/s^2}} \approx 0.857\,\mathrm{kg}.$$

또한 $m_2 + m_3 = 0.649$ kg임을 안다. (정확도를 더 높이려면 F_{30}과 F_{-30}을 비교해 그 차를 구할 수도 있다.)

정확한 답: 0.857 kg.

	m_1 구하기	
2a	$F = m_1 a_1 + m_1 g + F_1$ 또는 그와 동등한 운동 방정식 (F_1을 $k_1(y_1 - y_2)$로 잘못 바꿔 넣어도 만점)	
2b	$m_1 = \Delta F/\Delta a_1$이라는 생각	0.5
2c	$\Delta a_1 \geq 10$ m/s^2 사용	0.2
2d	m_1이 0.857 ± 0.002 kg 범위 m_1이 0.857 ± 0.010 kg 범위 m_1이 0.857 ± 0.050 kg 범위	0.8 0.6 0.3
	합계:	**2.0**

참고: 반복 측정 없이 자유 낙하($a_1 = -g$)를 쓰면 2c에서 0점이다. Δa_1<10 m/s^2이더라도 여러 측정을 써서 전체적으로 그만큼 좋은 정확도를 얻으면 만점을 준다.

2.3 k_1 구하기

2.3.1 방법 1: 상자를 빠르게 움직인 뒤 힘의 변화

(끌림을 피하려고) 상자를 빠르게 가속했다가 감속한다. 상자의 높이를 빠르게 바꾸고 시간이 충분히 짧으면 두 번째 질량은 거의 정지해 있다고 가정할 수 있다. (엄밀히 말하면, $\Delta y_1 = a_1/2t^2$이면 $m_2 a_2 = k_1 \Delta y_1 - k_1 \Delta y_2 - \Delta F_2 \leq k_1 \Delta y_1$이므로 $a_2 \leq k_1/(2m_2)t^2 \cdot a_1$이다. 가정은 $t \ll \sqrt{(m_2/k_1)}$이면 성립한다.) 따라서 상자를 시간 t 동안 가속도 a_1로, 이어서 시간 t 동안 $-a_1$로 가속하면 $\Delta F \approx k_1 a_1 t^2$이다.

$k_1 \Delta y_1 = k_1 a_1 t$

가장 좋은 정확도를 위해 $a_1 = 30$ m/s^2와 $a_1 = -30$ m/s^2로 두 실험을 한다. $t = 0.01\ s$(가능한 가장 짧은 시간)를 쓴다. 각 실험을 5번씩 되풀이한다. 결과를 평균하면 $2t = 0.02\ s$에서의 힘은 $F_u \approx 14.890\ N$, $F_d \approx 14.652\ N$이다. 따라서

$$k_1 \approx \frac{F_\mathrm{u} - F_\mathrm{d}}{2a_1 t^2} = \frac{(14.890 - 14.652)\,\mathrm{N}}{2 \cdot 30\,\mathrm{m/s^2} \cdot (0.01\,\mathrm{s})^2} \approx 39.7\,\mathrm{N/m}$$

정확한 답: 39.2 N/m.

	k_1 구하기, 방법 1	
3.1a	이 방법을 쓰려는 생각	0.5
3.1b	t가 작으면 $\Delta\ y_1 \gg \Delta\ y_2$임을 알아챔	0.5
3.1c	k_1의 올바른 식	0.5
3.1d	측정 3번 이상	0.1
3.1e	$\Delta\ a_1 \geq 30$ m/s^2	0.2
3.1f	$2t \leq 0.08$ s	0.2
3.1g	k_1이 39.2 ± 1.0 N/m 범위	1.0
	k_1이 39 ± 4 N/m 범위	0.7
	k_1이 39 ± 8 N/m 범위	0.4
	k_1이 39 ± 15 N/m 범위	0.2
	합계:	**3.0**

2.3.2 방법 2: 상자를 가속하는 동안 힘의 변화

상자를 일정한 가속도 a_1로 가속하면, 앞의 방법과 비슷하게 t가 작을 때 $\Delta\ F \approx k_1 a_1/2t^2$이라고 결론 내릴 수 있다. 그러나 이 방법은 앞의 방법보다 덜 정확하다. a_1이 크면 끌림을 무시할 수 없고, a_1이 작으면 $\Delta\ F$의 분해능이 낮기 때문이다. 예를 들어 $a_1 = 30$ m/s^2, $t = 0.02\ s$를 골라 5개 값을 평균하면 $F_{t=0} \approx 40.482\ N$, $F_{t=0.02} \approx 40.792\ N$이고

$$k_1 \approx \frac{2\Delta F}{a_1 t^2} = \frac{2\cdot(40.792-40.482)\,\mathrm{N}}{30\,\mathrm{m/s^2}\cdot(0.02\,\mathrm{s})^2} \approx 51.7\,\mathrm{N/m}$$

이 답은 정답보다 약 30% 큰데, $t = 0.02\ s$에서 상자의 끌림이 약 0.08 N이기 때문이다. 더 좋은 선택은 $a_1 = 5$ m/s^2, $t = 0.02\ s$이다. 5개 값을 평균하면 $F_{t=0} \approx 19.058\ N$, $F_{t=0.02} \approx 19.100\ N$이고

$$k_1 \approx \frac{2\Delta F}{a_1 t^2} = \frac{2\cdot(19.100-19.058)\,\mathrm{N}}{5\,\mathrm{m/s^2}\cdot(0.02\,\mathrm{s})^2} \approx 42.0\,\mathrm{N/m}$$

끌림의 영향은 훨씬 작다(약 0.002 N).

	k_1 구하기, 방법 2	
3.2a	이 방법을 쓰려는 생각	0.5
3.2b	t가 작으면 $\Delta\ y_1 \gg \Delta\ y_2$임을 알아챔	0.5
3.2c	k_1의 올바른 식	0.5
3.2d	측정 3번 이상	0.1
3.2e	2 m/s^2 ≤ a_1 ≤ 10 m/s^2	0.2
3.2f	$t \leq 0.08$ s	0.2
3.1g	k_1이 39.2 ± 1.0 N/m 범위	1.0
	k_1이 39 ± 4 N/m 범위	0.7
	k_1이 39 ± 8 N/m 범위	0.4
	k_1이 39 ± 15 N/m 범위	0.2
	합계:	**3.0**

참고: 근거 없이 맞힌 답이나 물리적으로 말이 되지 않는 방법으로 얻은 답은 0점이다.

2.3.3 방법 3: 평형에서 y_1-y_2를 어림하고 $F_1 \approx k_1(y_1-y_2)$ 쓰기

용수철은 비선형이지만, 용수철이 완전히 선형이라면 성립할 $k_1 \approx F_1/(y_1-y_2)$로 k_1을 어림할 수 있다. 평형에서

$$F_1 = F_0 - m_1 g \approx 14.774\,\mathrm{N} - 0.857\cdot 9.81\,\mathrm{N} \approx 6.367\,\mathrm{N}$$

상자를 아래로 빠르게 가속하고 상자가 질량 2와 부딪칠 때까지의 시간 t를 재면, $\Delta\ y_1 = a_1/2t^2$으로 y_1-y_2의 처음 값을 어림할 수 있다. 이분 탐색으로 $|a_1| \geq 26.7$ m/s^2이면 $t \leq 0.13\ s$, $|a_2| \leq 26.6$ m/s^2이면 $t \geq 0.13\ s$임을 찾을 수 있다. 따라서

$$y_1 - y_2 \approx \frac{26.7\,\mathrm{m/s^2}}{2}\cdot(0.13\,\mathrm{s})^2 \approx 0.226\,\mathrm{m}$$

그리고

$$k_1 \approx \frac{F_1}{y_1-y_2} = \frac{6.367\,\mathrm{N}}{0.226\,\mathrm{m}} \approx 28.2\,\mathrm{N/m}$$

이 방법은 용수철의 비선형성 때문에도, y_1-y_2를 과대평가하기 때문에도(실제 값은 0.179 m) 값을 과소평가한다.

	k_1 구하기, 방법 3	
3.3a	이 방법을 쓰려는 생각	0.5
3.3b	y_1-y_2를 올바르게 어림	0.5
3.3c	k_1의 올바른 식	0.5
	합계:	**1.5**

참고: 이 방법은 매우 부정확하므로 1.5점짜리이다. 쓸 방법 없이 거리 y_1-y_2만 어림하면 0점이다.

m_2와 m_3이 단단히 연결되었다고 보고 느린 정규 모드 진동수에서 k_1을 눈대중으로 구하는 방법은, 의미 있는 진전(정규 모드 주기와 k_1 또는 m_2+m_3의 합리적인 값)이 있으면 생각과 식에 각각 0.5+0.5점을 주었다. $T = 2\pi\sqrt{(m/k)}$라고만 쓰면 0점이다.

2.4 m_2, m_3, k_2 구하기

2.4.1 방법 1: 고유 진동수 구하기

이 방법은 매우 정확하지만 두 매개변수를 풀려면 대수 계산이 많이 필요하다. 다른 방법으로 이미 한 매개변수를 구했다면 나머지 하나를 구하는 데 써도 된다.

먼저 상자가 정지해 있을 때 계의 고유 진동수를 구한다. $x_2 = \Delta\ y_2$, $x_3 = \Delta\ y_3$을 평형 근처의 작은 변위라 하자. 그러면

$$m_2\ddot{x}_2 = -k_1 x_2 - k_2(x_2 - x_3)$$

$$m_3\ddot{x}_3 = k_2(x_2 - x_3)$$

이 방정식은 $x_2 = A\cos(\omega\ t)$, $x_3 = B\cos(\omega\ t)$로 놓아 풀 수 있다. 여기서 A와 B는 상수이다.

(또는 복소수 tilde $x_2 = Ae^{i\omega\, t}$, tilde $x_3 = Be^{i\omega\, t}$를 써도 된다.) ddot $x_2 = -\omega^2 A\, \cos\,(\omega\, t)$, ddot $x_3 = -\omega^2 B\, \cos\,(\omega\, t)$이므로

$$-m_2\omega^2 A\cos(\omega t) = -k_1 A\cos(\omega t) - k_2(A-B)\cos(\omega t)$$

$$-m_3\omega^2 B\cos(\omega t) = k_2(A-B)\cos(\omega t)$$

시간 의존성이 지워진다.

$$-m_2\omega^2 A = -k_1 A - k_2 A + k_2 B$$

$$-m_3\omega^2 B = k_2 A - k_2 B$$

두 번째 식에서 $B = k_2 A/(k_2 - m_3\omega^2)$를 얻고, 이를 첫 번째 식에 넣으면

$$-m_2\omega^2 A = -k_1 A - k_2 A + \frac{k_2^2}{k_2 - m_3\omega^2} A$$

예상대로 A가 지워지고(고유 진동수는 진동의 진폭에 의존하지 않으므로) 다음을 얻는다.

$$-m_2\omega^2(k_2 - m_3\omega^2) + (k_1+k_2)(k_2 - m_3\omega^2) - k_2^2 = 0$$

$$m_2 m_3\omega^4 - k_2 m_2\omega^2 - (k_1+k_2)m_3\omega^2 + k_1 k_2 = 0$$

$$\omega^4 - \left(\frac{k_2}{m_3} + \frac{k_1+k_2}{m_2}\right)\omega^2 + \frac{k_1 k_2}{m_2 m_3} = 0$$

이 복이차 방정식의 해가 고유 각진동수이다. 해 ω_1과 ω_2를 알면, 비에트 공식으로부터

$$\frac{k_2}{m_3} + \frac{k_1+k_2}{m_2} = c_1$$

$$\frac{k_1 k_2}{m_2 m_3} = c_2,$$

여기서 $c_1 = {\omega_1}^2{\omega_2}^2$, $c_2 = \omega_2^2$. ${\omega_1}^2+{\omega_2}^2$이다. 다음을 얻는다.

$$\frac{m_2}{k_1} + \frac{m_3}{k_2} + \frac{m_3}{k_1} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\frac{m_3}{k_2} = \frac{c_1}{c_2} - \frac{m_2+m_3}{k_1}$$

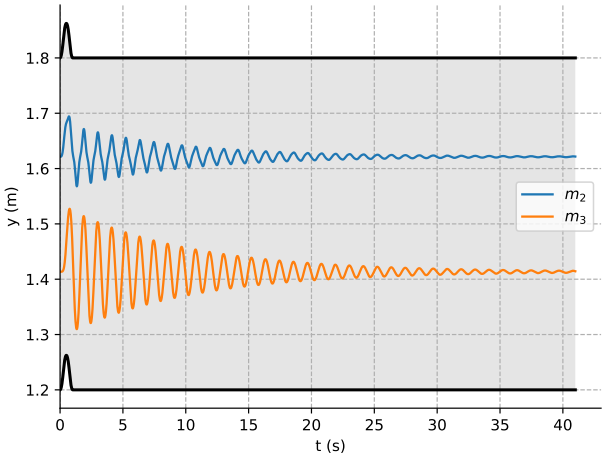
$$\frac{k_1}{m_2 c_2} = \frac{c_1}{c_2} - \frac{m_2+m_3}{k_1}$$

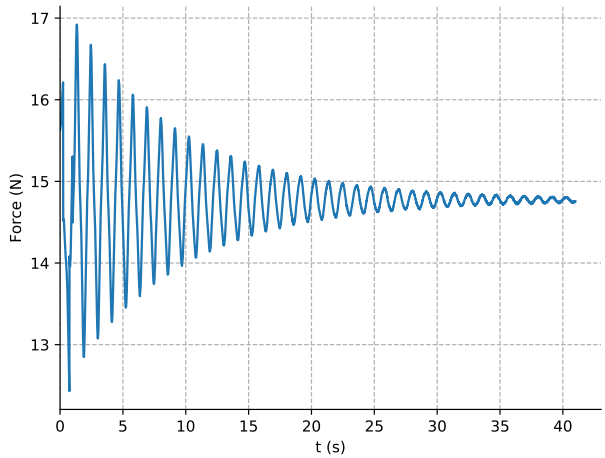
$$m_2 = \frac{k_1^2}{c_1 k_1 - c_2(m_2+m_3)}$$

이 식으로 m_2를 구할 수 있다. 그다음 m_3와 k_2도 쉽게 구한다.

고유 진동수를 찾으려면 상자를 여러 진동수로 흔든 뒤 멈추고 힘이 시간에 따라 어떻게 변하는지 보면 된다. 시행착오로 두 어림값 $T_1 \approx 1\ s$, $T_2 \approx 0.4\ s$를 얻을 수 있다. 더 낮은 진동수를 찾으려면 예를 들어 상자에 1 s 동안 펄스를 준다. (용수철의 비선형성을 피하려면) 주기를 잴 때 진동의 진폭이 충분히 작은지 확인해야 한다. 다음을 얻는다.

$$T_1 = \frac{(34.70 - 20.27)\,\mathrm{s}}{13} \approx 1.11\,\mathrm{s}.$$





마찬가지로 상자를 흔들거나 더 짧은 펄스를 주어 더 높은 고유 진동수를 키울 수 있다. 다음을 얻는다.

$$T_2 = \frac{(20.00 - 9.94)\,\mathrm{s}}{27} \approx 0.373\,\mathrm{s}.$$

따라서

$$\omega_1^2 = \left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 \approx 32.04\,\mathrm{Hz}^2$$

$$\omega_2^2 = \left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 \approx 283.8\,\mathrm{Hz}^2$$

그다음 c_1과 c_2를 계산하여 m_2를 구할 수 있다.

$$c_1 = \omega_1^2 + \omega_2^2 \approx 315.8\,\mathrm{Hz}^2$$

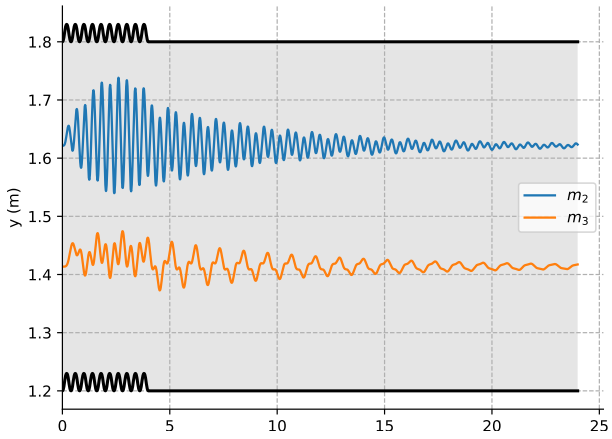
$$c_2 = \omega_1^2\omega_2^2 \approx 9093\,\mathrm{Hz}^4$$

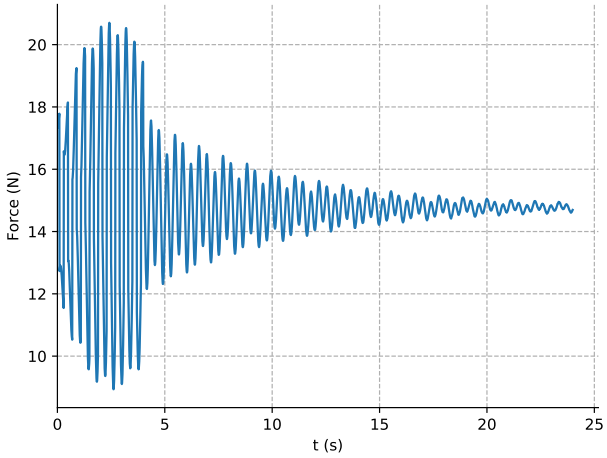
$$m_2 = \frac{k_1^2}{c_1 k_1 - c_2(m_2+m_3)} \approx 0.238\,\mathrm{kg}$$

$$m_3 = 0.649\,\mathrm{kg} - 0.238\,\mathrm{kg} = 0.411\,\mathrm{kg}$$

$$k_2 = \frac{c_2 m_2 m_3}{k_1} \approx 22.4\,\mathrm{N/m}$$

정확한 답: $m_2 = 0.236$ kg, $m_3 = 0.413$ kg, $k_2 =$





2.4.2 방법 2: 빠른 펄스

k_1을 구하는 방법 1처럼, 상자를 시간 t 동안 가속도 a_1로 가속했다가 시간 t 동안 $-a_1$로 감속한다. t가 작으면 상자를 움직이는 동안 y_2는 거의 변하지 않으므로
$\Delta F_1 = \Delta F \approx k_1 \Delta y_1$

또한 펄스 뒤에 질량 2가 움직이기 시작할 때, 짧은 시간 동안은 y_3이 거의 변하지 않는다. 따라서 질량 2가 크게 움직이기 전에는 $m_2 a_2 = \Delta\ F_1 - \Delta\ F_2 \approx \Delta\ F_1$이고, 질량 3이 크게 움직이기 전에는 $m_2 a_2 \approx k_1 \Delta\ y_1 - k_1 \Delta\ y_2 - k_2 \Delta\ y_2 = k_1 \Delta\ y_1 - (k_1 + k_2) \Delta\ y_2$이다. 따라서 t가 작으면 시간 t 직후에

$$F - F_0 = \Delta F_1 \approx m_2 a_2 = m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -\frac{m_2}{k_1} \frac{d^2 F_1}{dt^2} = -\frac{m_2}{k_1} \frac{d^2 F}{dt^2}.$$

이 방법은 앞의 방법보다 덜 정확하다. 근사를 많이 쓰고, 끌림을 무시하며, F의 분해능이 낮다. m_2의 처음 어림값을 쓰고 상자를 가속하는 동안의 $\Delta\ y_2$를 어림해 더 좋은 어림값을 얻으면 이 방법을 더 정확하게 만들 수 있을 것이다.

이론적으로는 k_2도 구할 수 있지만 더욱 부정확하다. $d^2F/(dt^2) = 0$이면 $a_2 = 0$이고, 이는 $k_1 \Delta\ y_1 \approx (k_1 + k_2) \Delta\ y_2$를 뜻한다.

가장 높은 정확도를 위해 $a_1 = 30$ m/s^2를 쓴다. F의 분해능과 작은 t 사이의 좋은 절충은 $t = 0.05\ s$로 보인다. 2차 도함수를 구해야 하고 정확도가 많이 필요하므로 10번 측정한 값을 평균한다. 결과는 표와 같다.

시간 (s)	F (N)	$\frac{dF}{dt}$ (N/s)
	12.572	
0.11	12.781	20.9
0.12	13.013	23.2
0.13	13.268	25.5
0.14	13.533	26.5
0.15	13.811	27.8
0.16	14.078	26.7
0.17	14.351	27.3
0.18	14.599	24.8

$t = 0.11\ s$에서 $d^2F/(dt^2) \approx 230$ N/s^2로 어림한다. 따라서

$$m_2 \approx -\frac{(F - F_0) k_1}{\frac{d^2 F}{dt^2}} = -\frac{(12.781 - 14.774)\,\mathrm{N} \cdot 39.7\,\mathrm{N/m}}{230\,\mathrm{N/s^2}}.$$

$$m_2 \approx 0.344\,\mathrm{kg}.$$

또한 $t \approx 0.15\ s$, $F = 13.811\ N$일 때 $d^2F/(dt^2) = 0$으로 어림한다. $\Delta\ y_1 = a_1 t^2 = -30$ m/s^2·$(0.05\ s)^2 = -0.075\ m$임을 안다.

At $F = 13.811$ N,

$$\Delta(y_1 - y_2) \approx \frac{(13.811 - 14.774)\,\mathrm{N}}{39.7\,\mathrm{N/m}} \approx -0.024\,\mathrm{m},$$

여기서 $\Delta\ y_2 \approx 0.051\ m$를 얻는다. $k_1 \Delta\ y_1 \approx (k_1 + k_2) \Delta\ y_2$이므로

$$k_2 \approx k_1 \left(\frac{\Delta y_1}{\Delta y_2} - 1 \right) \approx 18.4\,\mathrm{N/m}$$

	m_2, m_3, k_2 구하기, 모든 방법	
4a	올바른 방법	0.5
4b	m_2, m_3, k_2 값을 풀 수 있는 올바른 방정식	
	m_2와 m_3만 풀 수 있는 올바른 방정식	
4c	필요한 측정	
	쓸 계획 없이 고유 진동수(주기)만 구한 경우:	
	T_1이 1.11±0.02 s 범위	
	T_1이 1.11±0.10 s 범위	0.1
	T_2가 0.373±0.005 s 범위	0.3
	T_2가 0.373±0.050 s 범위	0.1
4d	k_2가 22.6±0.5 N/m 범위	1.0
	k_2가 22.6±1.0 N/m 범위	0.8
	k_2가 23±3 N/m 범위	0.6
	k_2가 23±6 N/m 범위	0.4
4e	m_2가 0.236±0.010 kg 범위 또는 m_3이 0.413±0.010 kg 범위	0.9
	m_2가 0.236±0.020 kg 범위 또는 m_3이 0.413±0.020 kg 범위	0.6
	m_2가 0.236±0.050 kg 범위 또는 m_3이 0.413±0.050 kg 범위	0.3
4f	4e에서 받은 점수로 m_2에서 m_3을, 또는 그 반대로 올바르게 계산	
	합계:	**4.0**

참고: 질량 2와 3의 운동 방정식에는 0점. ω^2에 대한 올바른 복이차 방정식은

4a에서 0.5점을 받고, 4b의 점수는 k_1, m_2+m_3, ω_1, ω_2만을 아는 매개변수로 하여 복이차 방정식에서 k_2, m_2, m_3를 올바르게 나타낸 경우에만 준다. ω^2에 대한 식을 얻으면 부분 점수를 줄 수 있다(결과가 조금 틀리면 0.4점, 행렬식을 세우면 0.2점). 연립방정식을 풀 계획은 있지만 방법을 모르면서 T_1과 T_2를 구하면 0.3/0.1점을 준다. ω^2에 대한 복이차 방정식이 있으면 "계획"으로 보고, 이 경우 T_1과 T_2를 구하면 같은 오차 허용 범위로 각각 0.5/0.2점을 준다.

근거 없이 맞힌 답이나 물리적으로 말이 되지 않는 방법으로 얻은 답은 0점이다.

2.4.3 방법 3: 평형에서 y_2-y_3를 어림하고 $F_2 \approx k_2(y_2-y_3)$를 써서 k_2/m_3 어림하기

k_1을 구하는 방법 3으로 y_1-y_2를 구한 뒤, 상자를 위로 빠르게 가속하여 마찬가지로 $y_3-(y_1-a)$를 어림할 수 있다($a = 0.6\ m$). 이 방법은 질량의 높이를 무시할 수 있다고 가정한다(실제로 그렇다). 다시 이분 탐색으로 $a_1 = 25.6$ m/s^2에서 충돌까지의 시간이 $t = 0.13\ s$임을 찾는다. 따라서

$$y_3 - (y_1 - a) \approx \frac{a_1}{2} t^2 \approx 0.216\,\mathrm{m}$$

$$y_2 - y_3 = a - (y_1 - y_2) - (y_3 - y_1 + a)$$

$$y_2 - y_3 \approx 0.6\,\mathrm{m} - 0.226\,\mathrm{m} - 0.216\,\mathrm{m} \approx 0.158\,\mathrm{m}$$

$$\frac{k_2}{m_3} \approx \frac{g}{y_2 - y_3} \approx 62.1\,\mathrm{N/(kg\,m)}$$

실제 값은 $y_2-y_3 = 0.208$ m이고 $\frac{k_2}{m_3} = 5$. /( )

	k_2/m_3 어림하기	
4.1a	이 방법을 쓰려는 생각	0.5
4.1b	y_3-y_1+a를 올바르게 어림	0.5
4.1c	k_2/m_3의 올바른 식	0.2
4.1d	k_2/m_3이 55 ± 10 N/(kg m) 범위	0.3
	합계:	

참고: 쓸 방법 없이 거리 y_3-y_1+a만 어림하면 0점이다.