E1: 색과 온도

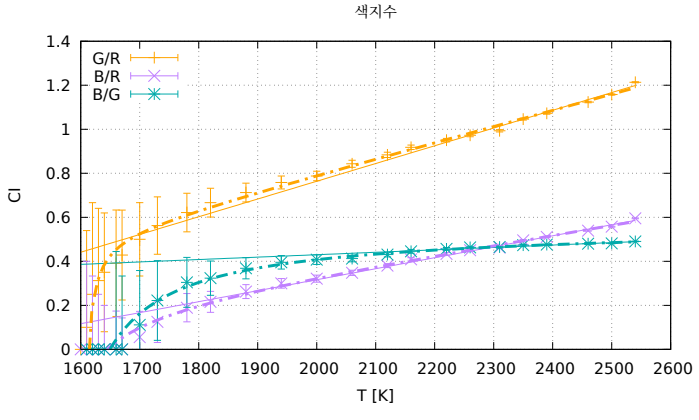
이론

적외선 온도계로는 여러 이유로 필라멘트 온도를 잴 수 없다. (기기에 적힌) 적외선 온도계의 측정 범위는 500 °C까지일 뿐이다. 필라멘트는 너무 작아서 그것만 따로 잴 수도 없다. 유리 전구의 적외선 불투명도도 보장되지 않는다. 따라서 온도를 재는 유일한 방법은 색지수를 통해 간접적으로 재는 것이며, 색지수와 온도의 관계는 주어져 있다.

빈의 변위 법칙에 따르면 온도가 낮을 때 빛에는 초록과 파랑보다 빨강 성분이 더 많고, 온도가 높을 때는 초록과 그 다음 파랑이 빨강보다 빨리 늘어나 비 G/R, B/R, B/G가 커진다. 그러나 어느 필터 쌍이 가장 알맞은지 따져 보아야 한다. 각 필터를 통해 잰 값은 필터의 전체 불투명도를 포함한 분광 응답에 의존한다. 또 조도계의 파장별 감도에도 의존한다. 이론적 예측 대신, 온도를 아는 기준 측정값이 주어져 있다. 세 쌍의 비를 모두 그리면 B/G가 온도에 따라 훨씬 적게 변하므로 가장 알맞지 않음을 알 수 있다. B/R와 G/R는 비슷하지만 파란 필터의 투과율이 더 낮아 정확도가 낮다(상대 오차가 크다). 어느 필터 쌍을 골라도 측정을 진행할 수 있지만 최종 정확도에 영향을 준다. 결과를 평균하는 것도 방법이지만, B/G 조합을 넣으면 최종 결과의 정확도가 낮아질 수 있다.

색지수를 온도로 바꾸는 데 그래프를 쓰려면 추세선이 필요하다. 범위의 대부분은 선형 추세로 충분하지만, 관계가 완만해지는 낮은 온도에서는 그렇지 않다. 범위 전체에 걸쳐 두 추세를 이어 붙이거나 손으로 매끄러운 곡선을 그려 범위를 넓힐 수 있다. 기준 측정값의 흩어짐 때문에 지그재그 보간은 덜 알맞다.

그림 1: 필터 쌍마다의 세 가지 색지수. 범위의 위쪽 부분에 대한 선형 맞춤과 매끄러운 곡선을 함께 나타냈다.



비 대신 표의 절댓값을 쓰는 것은 옳지 않다. 광원의 고유한 광선속과 측정 거리가 주어지지 않았기 때문이다.

실험

온도가 전력에 어떻게 의존하는지 재려면 전원 장치에서 전압과 전류를 읽는다. 예상되는 $T(P)$ 곡선을 얻으려면 충분히 촘촘하게, 특히 온도가 빠르게 변하는 낮은 전력에서 촘촘하게 측정해야 한다. 관계를 더 정밀하게 다루고 이상값을 믿을 만한 측정과 구별하려면 적어도 8개의 전력/온도에서 측정하기를 권한다. 각 전력 설정에서, 조도계의 센서를 필터로 덮어 선택한 필터를 통한 조도를 잰다. 조도계를 덮으면 필터가 벽과 바닥에서 반사된 빛까지 모든 빛을 거르므로 측정이 더 좋아진다. 필터를 광원 옆에 두면 필터가 탈 위험도 있다. 미리 계획하여 과제 2에 필요한 필터 없는 조도도 동시에 잴 수 있다.

각 색지수는 보정 그래프에서 읽어 온도로 바꾼다. 다른 손실과 주위 온도의 기여를 무시하면 슈테판-볼츠만 법칙을 써서 관계를 어림할 수도 있다.

$$T \propto \sqrt[4]{P}. \tag{1}$$

여러 환경에서 여러 전구로 측정한 결과에 따르면 맞춤은

$$T = (1220\,\mathrm{KW}^{-1/4} \pm 20\,\mathrm{KW}^{-1/4})\sqrt[4]{P}, \tag{2}$$

이며, 이것을 학생 측정값의 RMS를 정하는 기준으로 쓴다. 배경 조도는 모든 필터를 통해 재야 한다. 대부분 0이겠지만, 좋은 실험자라면 확인해야 하며, 크다면 측정값에서 빼야 한다. 이는 학생이 책상 등을 켜 두었는지 알아내는 방법이기도 하다 — 배경이 다른 참가자들과 크게 다르다면.

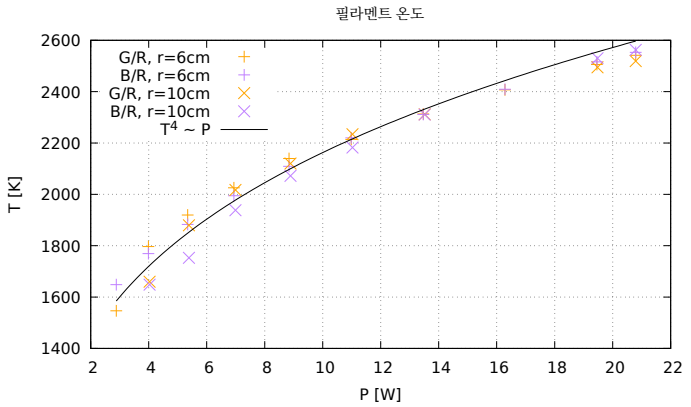
낮은 전력에서도 정확하게 잴 수 있도록 광원과 조도계 사이의 거리는 충분히 짧아야 한다. 전력 범위마다 거리를 다르게 할 수도 있지만, 필라멘트의 유한한 크기의 효과와 주위와 광원 받침 윗부분에서의 반사 변화가 영향을 줄 수 있으므로 주의해야 한다.

채점 기준

모든 과제에 공통인 채점 지침

- 점수의 최소 단위는 0.1점이다.
- 유효숫자의 수가 알맞지 않은 측정/결과는 0.1점을 깎을 수 있다(오류 전파 금지 규칙 적용).
- 오타로 인한 단순 계산 오류는, 채점 기준에 따로 정하지 않는 한 0.1점을 깎는다.

그림 2: 전력에 따른 온도와, 슈테판-볼츠만 법칙의 예측을 겹쳐 그린 것. 두 거리와 두 필터 조합으로 잰 결과를 비교했다. 추세는 비슷하며 ±100 K 안에 있고, 여러 번 측정한 결과 RMS는 약 ±40 K이다.



• 차원이 틀린 결과를 낳는 이론 유도의 오류는, 채점 기준에 따로 정하지 않는 한 그 유도 점수의 적어도 50%를 깎는다.
• 전파된 오류는, 계산을 크게 단순화하거나 나중에 타당성을 쉽게 확인할 수 있는 틀린 결과로 이어지지 않는 한 거듭 감점하지 않는다.
• 감점은 같은 항목(A1, A2, ...) 안에서 점수를 0 아래로 내릴 수 없다.

보정		점수
A1	**그래프 그리기**	**1.0**
	충분한 수의 데이터 점에 대해 범위 전체에서 색지수를 계산함	0.3
	색지수 그래프	0.5
	알맞은 축 이름과 눈금	0.1
	정밀하게 읽을 만큼 충분한 그래프 크기 (≥ 1/2쪽)	0.1
	잘못 계산하거나 잘못 그린 점마다	−0.1
A2	추세선	**0.5**
	매끄러운 추세 곡선 또는 선형 추세의 조합	0.5
	선형 추세선 하나(어떤 온도에서 이상값이 생김)	or 0.3
	지그재그로 이은 점(=읽을 때 보간을 씀) 또는 점들을 하나하나 이은 곡선	or 0.1
보정 합계		**1.5**

이 항목은 주어진 표에 바탕한 보정 데이터(표, 그래프)에만 해당한다. 적외선 측정을 바탕으로 그린 그래프는 0점이다. 색지수 그래프 하나에도, 여러 색지수를 같은 그래프나 따로 그린 그래프에도 만점을 준다.

절댓값을 그린 경우: 색지수 대신 한 필터를 통한 절댓값이나 여러 필터 값의 차를 그렸다면 A1에 최대 0.2점을 준다(축과 눈금이 맞으면, 위의 표 참고). 조도는 거리와 광원의 밝기에 의존하므로 절댓값으로는 온도를 정할 수 없다. 그래도 A2의 점수는 줄 수 있다.

측정		점수
B1	**데이터 수집 †**	**1.2**
	필터 2–3개를 통해 $n \le 8$개 점에서 U, I, E를 잼(필터 1개만이면 $3/4n$을 반올림; 적외선 온도계로 잴 때 흔히 그렇듯 U, I 또는 RG(B)만 잰 경우 최대 0.3)	$0.1n$
	P를 계산함	0.1
	색지수를 계산하거나 (그래프 또는 A2의 추세에서) 바로 온도로 바꿈	0.1
	5 W 아래에 점이 없음	−0.1
	16 W 위에 점이 없음	−0.1
	RGB 배경을 잼	0.1
	배경이 일정함을 확인함 (예: 처음과 끝에 잼)	0.1
B2	온도 그래프 ‡	**0.9**
	온도를 정함	0.3
	데이터 그래프	0.3
	최적 곡선을 더함	0.1
	알맞은 축 이름과 눈금	0.1
	알맞은 그래프 크기	0.1
	잘못 정하거나 잘못 그린 점마다	−0.1
	G/B 지수를 씀	−0.2
B3	결과의 질 ‡	**0.4**
	관계의 비선형성이 보임	0.1
	단조가 아닌 관계	−0.1
	최적 곡선에서의 RMS가 40 K 이내	0.3
	최적 곡선에서의 RMS가 80 K 이내	or 0.2
	최적 곡선에서의 RMS가 120 K 이내	or 0.1
측정 합계		**2.5**

† 데이터 제시: U와 I를 바로 곱해 P 값만 제시해도 감점하지 않는다.

배경: 배경에 대한 점수는 측정값에서 배경을 빼거나 배경을 합리적으로 무시할 수 있을 때만 준다.

‡ 적외선 측정: 온도를 적외선 측정이나 온도를 정하기에 알맞지 않은 다른 방법으로 "정했다면" B2에는 점수를 주지 않는다. 의미 없는 데이터에서는 비선형성이 질의 지표가 아니므로 B3도 마찬가지이다.

B3의 RMS를 정하려면 식 2와 비교하여 평균 제곱 편차의 제곱근을 취한다. 큰 편차가 예상되는 아주 낮은 전력의 이상값은 합리적으로 뺀다. RMS 계산은 보조 엑셀 파일로 할 수 있다.

E2: 광효율

이론

광원은 모든 방향으로 똑같이 빛을 내지 않는다. 광선속 Φ의 각분포(광도)를 입체각에 대해 적분해야 한다. 광원에서 거리 r에 있고 빛이 수직으로 닿도록 놓은 조도계는 광원을 둘러싼 가상의 적분 구면의 일부의 조도 E를 잰다.

$$\Phi = \oint E(\Omega) r^2 \mathrm{d}\Omega. \tag{3}$$

LED는 반구로만 빛을 내고 정면 방향을 축으로 원통 대칭이므로 식을 간단히 할 수 있다.

$$\Phi_{LED} = 2\pi \int_0^{\pi/2} E(\theta) r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta, \tag{4}$$

그리고 백열전구는 대칭축이 정면 방향에 수직이고 전체 입체각으로 빛을 낸다.

$$\Phi_W = 4\pi \int_0^{\pi/2} E(\theta) r^2 \cos\theta \, \mathrm{d}\theta. \tag{5}$$

적분은 수치로 계산해야 한다. 사다리꼴 공식이나 심프슨 공식을 쓰거나, 힌트에 주어진 구면 띠의 넓이 공식을 쓸 수 있다.

$$\Phi = 2\pi r^2 \sum_i E(\theta_{i+1/2})(\cos\theta_i - \cos\theta_{i+1}) \tag{6}$$

백열전구에 대해서도 같다(단 sin ⇔ cos). 여기서 계산 점을 구간의 가운데에 고르는 것이 구간 끝점 하나를 고르는 것보다 좋다. 단 예외는 "가장자리" 측정으로, 측정점이 실제로 구간의 가운데에 있다 — LED의 정면 점은 구면 모자의 가운데에 있다. 백열전구의 "극"도 마찬가지이다.

정면에서 잰 조도와 광선속의 비는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Phi = C r^2 E(0), \tag{7}$$

또는 더 직관적으로, 등방 광원에 대한 보정 인자로

$$\Phi = \{4\pi, 2\pi\} \tilde{C} r^2 E(0). \tag{8}$$

해석적 어림

한 가지 방법은 빛의 분포에 대한 합리적인 가정으로 측정 없이 이 인자를 어림하는 것이다. LED는 광선속이 코사인 분포인 평면 광원으로 볼 수 있다.

$$\tilde{C}_{LED} = \frac{\int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \, \mathrm{d}\theta}{\int_0^{\pi/2} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta} = \frac{1}{2} \tag{9}$$

이는 실험과 잘 맞는다. 백열전구도 가는 필라멘트 모형에 따라 비슷하게 가정할 수 있다. 대칭축의 방향이 달라서 결과가 다르다.

$$\tilde{C}_W = \frac{\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta \cos\theta \, \mathrm{d}\theta}{\int_0^{\pi/2} \cos\theta \, \mathrm{d}\theta} = \frac{\pi}{4} \approx 0.79. \tag{10}$$

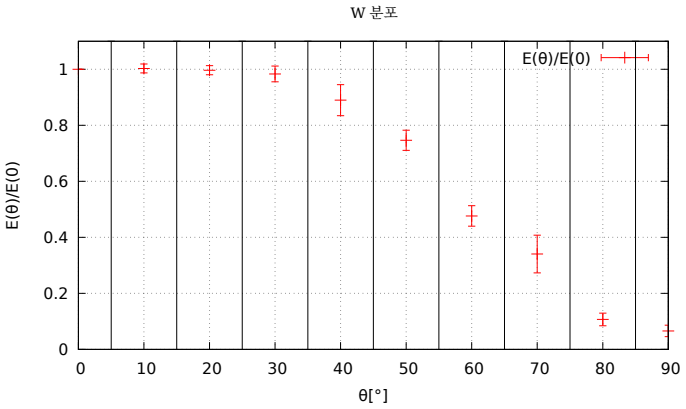
이 근사들은 꽤 효과적으로 쓸 수 있지만 실험 과제에서 꼭 필요한 것은 아니다.

실험

각 의존성을 재려면 광원까지의 알맞은 거리를 골라야 한다. 너무 멀면 신호가 약해지고 배경이 눈에 띄게 된다. 신호 대 배경의 비를 높이려면 가장 높은 전력에서 각 의존성을 재는 것이 좋다. 필터 하나를 통해 재도 된다.

백열전구는 너무 가까이에서 재면 필라멘트의 유한한 크기가 문제가 된다. 이는 10 cm보다 가까운 거리에서 눈에 띈다. 색지수 측정에서는 문제가 아니었지만, 광선속의 절댓값을 어림할 때는 중요하다.

그림 3: 백열전구의 각 분포. $r = 15$ cm, $P = 20.6$ W에서 10° 간격으로 잼. 세로선은 식 (6)의 분할 각이다. $C = 10.01$ (tilde $C = 0.80$)을 얻는다.

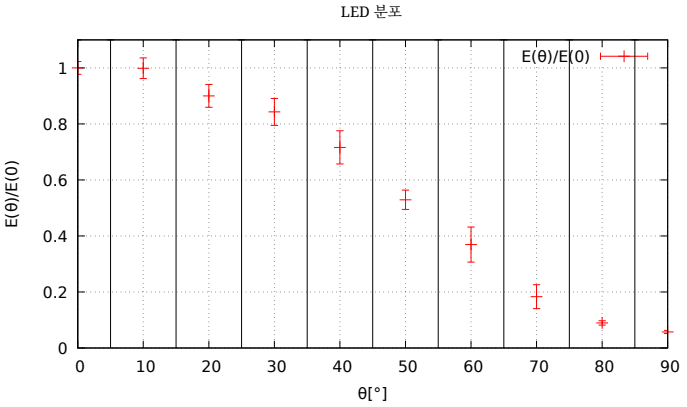


빛 분포의 변곡점을 잘 나타내려면 ϑin$[0,\pi/2]$ 구간에서 적어도 5번 재야 한다. 광원을 제자리에서 돌리거나, 고정된 광원에 대해 조도계를 여러 각으로 놓으면 된다.

빛의 분포는 좌우 대칭이라고 가정하거나, ϑin$[-90^\circ, 90^\circ]$ 범위 전체를 재어 비대칭과 각도 오프셋을 고려할 수 있다. 정면 측정은 대칭인 띠의 가운데에 있으므로, 범위의 절반만 적분하고 두 배 하는 경우 두 번 세지 않도록 조심해야 한다.

변환 인자를 알면, 검출할 수 있는 가장 낮은 조도부터 허용 최대 전력까지의 범위를 덮는 전력에서 정면 조도를 재어 광효율을 구할 수 있다.

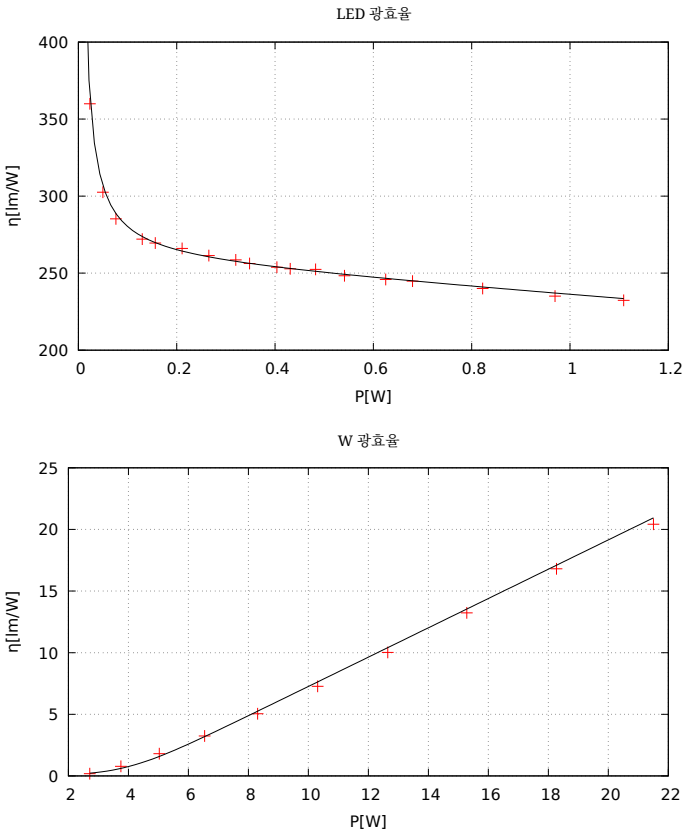
그림 4: LED의 각 분포. $r = 10$ cm, $P = 1.33$ W에서 10° 간격으로 잼. 세로선은 식 (6)의 분할 각이다. $C = 2.63$을 얻는다.
$C = 0.42$



	C	$\tilde{C}$
LED	10.01	0.80
	2.63	0.42

표 1: 두 광원에 대해 정면에서 잰 조도와 광선속 사이의 변환 인자의 예. 광원의 차이와 다른 오차 때문에 값은 더 넓은 분포 안에서 달라지며, 이는 채점표의 괄호 안 범위로 나타냈다.

그림 5: 입력 전력에 따른 두 광원의 광효율.



전력. 백열전구의 경우 시간을 아끼려면 이 측정을 과제 1과 동시에 할 수 있다. 각 의존성과 같은 거리에서 잴 필요는 없다. 여러 거리를 써도 된다. 빛을 더 반사하거나 막지 않도록 광원 근처에 다른 물체를 두지 않아야 한다 — 광원을 흰 종이 위에 바로 놓거나, 검은 종이 가리개나 필터 같은 장애물을 전구에 너무 가까이 두지 말 것.

광효율을 그리려면, 전원 장치에서 읽은 $P = UI$를 써서 각 광원에 대해 식 (3)으로 얻은 Φ를 나눈다. 결과를 보면 백열전구의 광효율은 낮은 전력에서 0에서 시작해 온도가 올라감에 따라 전력과 함께 커진다. LED는 가장 낮은 전력에서 광효율이 가장 크고, 높은 전력에서는 주로 발광 접합의 온도가 올라가서 줄어든다. 설정할 수 있는 가장 낮은 전류에서는 전원 장치의 표시가 더 이상 믿을 만하지 않다 — 예를 들어 LED는 0 A에서도 약하게 빛날 수 있다. 원점의 극은 이 오차 원인 때문이라고 볼 수 있다.

채점 기준

기본 식은 풀이의 별도 절에 써도 되고, 풀이의 여러 부분에 나누어 써도 된다.

이론적 배경		**점수**
A1	식 (3) 또는 그와 동등한 식	**0.5**
	r^{-2} 의존성	0.2
	각 의존성(비등방성을 알아챔)	0.3
A2	원통 대칭을 고려함(각각)	2×0.1
	광원마다 올바른 대칭축을 고름 (각각)	2×0.1
	올바른 2π와 4π 인자(각각 LED와 전구)	0.1
	센서의 넓이가 계산에 들어간다고 가정함	-0.2
이론 합계		**1.0**

2×는 광원(전구, LED)마다 하나씩이라는 뜻이다.

각 측정		**점수**
B1	백열전구 측정	**0.9**
	0과 $\pi/2$ 사이 $n \le 6$개 이상의 각에서 잼	$0.1n$
	보조 데이터(전력, 거리)를 명시함	0.2
	각 범위 전체 $[-90^\circ,90^\circ]$를 잼 (예: 광원을 돌려서)	0.1
	최대 조도가 100 lx 아래	-0.2
	10 cm보다 가까이에서 잼	-0.1
B2	적분 절차	**0.7**
	힌트를 씀	0.7
	↳구간 끝에서의 값	-0.1
	↳적도를 두 번 셈	-0.1
	사다리꼴 공식이나 비슷한 공식을 씀	or 0.7
	↳가장자리 값을 잘못 다룸	-0.1
	↳적도를 두 번 셈	-0.1
	식 (10) 또는 비슷한 식을 해석적으로 유도함	or 0.7
	가중치 없이 값을 평균함	or 0.3
B3	텅스텐에 대한 C 결과의 정확도	**0.3**
	C 또는 그와 동등한 양을 계산함	0.1
	Cin[9.7,10.3]	0.2
	Cin[9.4,10.6]	or 0.1
B4	LED 각 측정	**0.9**
	0과 $\pi/2$ 사이 $n \le 6$개 이상의 각에서 잼	$0.1n$
	보조 데이터(전력, 거리)를 명시함	0.2
	각 범위 전체 $[-90^\circ,90^\circ]$를 잼 (예: 광원을 돌려서)	0.1
	최대 조도가 100 lx 아래	-0.2
B5	적분은 B2와 같음	**0.7**
B6	LED에 대한 C 결과의 정확도	**0.3**
	C 또는 그와 동등한 양을 계산함	0.1
	Cin[2.8,3.2]	0.2
	Cin[2.6,3.4]	or 0.1
B7	배경을 잼	0.1
	배경이 일정한지 확인(여러 번 측정)	0.1
각 측정 합계		**4.0**

각 의존성을 그래프로 그리는 것은 절차에 필요하지 않지만, 적분 절차를 달리 하지 않았다면 0.2점으로 친다.

각 의존성을 재지 않았지만 두 변환에 대해 맞는 해석적 값을 얻었다면, 측정을 뺀 모든 점수를 받을 수 있다(광원마다 1.9점 가운데 1.0점).

해석적 추정과 실험적 추정을 비교했거나 해석적 모형을 실험 데이터에 맞추었다면 절차가 올바른 것이며, 쓴 방법에 꼭 필요하지 않은 단계에서 잃은 점수를 보상하도록 광원마다 최대 +0.3점을 더 줄 수 있다.

광효율 측정		**점수**
C1	백열전구 측정	**0.7**
	백열전구에 대해 $n \le 7$개 점에서 U, I, E를 잼	$0.1n$
	16 W 위의 측정이 없음	-0.1
C2	전구 광효율 그래프	**0.8**
	$n \le 6$개 점을 바꾸어 그림(광효율이 아닌 광선속으로 바꾸었으면 최대 0.3)	$0.1n$
	축 이름이 없음	-0.1
	단조 모양에서 벗어남	-0.1
†	RMS < 0.2 안의 값	0.2
	RMS < 0.5 안의 값	or 0.1
C3	LED 측정	**0.7**
	LED에 대해 $n \le 7$개 점에서 U, I, E를 잼	$0.1n$
	0.2 W 위의 측정이 2개보다 적음	-0.2
	0.2 W 아래의 측정이 2개보다 적음	-0.1
C4	LED 광효율 그래프	**0.8**
	$n \le 6$개 점을 바꾸어 그림(광효율이 아닌 광선속으로 바꾸었으면 최대 0.3)	$0.1n$
	축 이름이 없음	-0.1
	단조 모양에서 벗어남	-0.1
‡	RMS < 5 안의 값	0.2
	RMS < 10 안의 값	or 0.1
광효율 합계		**3.0**

† 더 잘 맞는지 확인하려면 C 인자를 범위 [9.4, 10.6] 안에서 바꾸어 본다. 이렇게 하면 잘못 정한 C에서 오는 전파 오차와 전구마다의 작은 출력 차이를 없앨 수 있다.

‡ 더 잘 맞는지 확인하려면 C 인자를 범위 [2.6, 3.4] 안에서 바꾸어 본다. LED는 빛의 분포와 절대 세기가 다를 수 있으므로 추세를 1:1로 맞출 수 없다. 특이점이 LED 자체에 중요하지 않으면서 RMS를 키울 수 있으므로 가장 낮은 전력의 이상값도 평가에서 뺀다. 이는 전원 장치의 전압 바이어스와 접합의 비저항에 의존한다.

RMS 비교: 그래프로 그린 풀이를 기준과 덜 주관적으로 비교하려고 제곱평균제곱근 비교를 한다. 통제된 환경에서 더 많이 측정해 얻은 경험적 모형 곡선(그림 5)으로부터의 제곱 편차의 평균이다. 전구의 광효율에는 다음을 쓴다.

$$\eta(P) = \ln(1 + \exp(1.189P - 4.632)) \tag{11}$$

이는 바닥에서 매끄럽게 평평해진 선형 함수일 뿐이다. LED에는 다음을 쓴다.

$$\eta(P) = 2.56/P - 23.78P + 259.56 \tag{12}$$

여기서 세기의 차이는 C_2/C_4의 C를 바꾸어 보상할 수 있다. ($1/P$ 부분의) 전원 장치 표시의 오프셋 차이에 의한 변화는 RMS 계산에서 낮은 전력 측정을 합리적으로 빼서 보상할 수 있다. 모든 값은 접두어 없는 기본 단위이다(간단히 하려고 생략).

각 의존성을 무시했다면 이 표를 채점의 지름길로 쓴다.

A1	r^{-2} 의존성만	0.2
A2	2π 또는 4π 인자만 맞음	0.1
B1-B6	해당 없음	0.0
B7	배경을 잼	0.1
	배경이 일정한지 확인(여러 번 측정)	0.1
C1	변화 없음	0.7
C2	올바른 C로 다시 맞추어 RMS 확인	0.8
C3	변화 없음	0.7
C4	올바른 C로 다시 맞추어 RMS 확인	0.8

E3: 복사 가열

이론

판은 광원의 전력 P와 표적과 광원 사이의 거리 r로 정해지는 복사선속 밀도 j를 받는다. 광원은 모든 방향으로 같은 양의 빛을 내지 않으므로, 전체 복사선속을 정면 복사선속 밀도로 바꾸는 데 과제 2에서 구한 보정 인자 C를 써야 한다.

$$P = Cr^2 j \rightarrow j = \frac{P}{Cr^2}. \tag{13}$$

꼭 필요하지는 않지만, C, r, ϑ(입사각)의 공간적 변화를 고려하도록 판 전체에 대해 (수치로) 적분/평균하는 것도 옳다: $j(\pi\ r^2) = \text{int}\ Cr^{-2}\cos\ \vartheta\ dA$.

입사한 선속 밀도는 주위로 직접, 그리고 판을 통한 열전도로 흩어진다. 앞면 온도를 T_F, 뒷면 온도를 T_B라 하자. 에너지 보존으로 다음 연립방정식을 얻는다.

$$j = h(T_F - T_0) + \frac{\lambda}{d}(T_F - T_B) \tag{14}$$

$$0 = h(T_B - T_0) + \frac{\lambda}{d}(T_B - T_F). \tag{15}$$

이 연립방정식으로부터 다음 관계를 얻는다.

$$j = h(T_F + T_B - 2T_0) \tag{16}$$

$$j = (h + 2\frac{\lambda}{d})(T_F - T_B). \tag{17}$$

식 (14, 15)의 어떤 선형 결합으로도 h와 λ를 모두 정할 수 있다. 쓸 수 있는 특별한 선형 결합은 각 온도를 따로 분리하는 것이다.

$$T_F - T_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{h + 2\frac{\lambda}{d}}\right) j \tag{18}$$

$$T_B - T_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h + 2\frac{\lambda}{d}}\right) j. \tag{19}$$

이 계에서 $2\lambda/d$>h이지만 크기의 차수는 같다. T_F의 기울기를 $1/(2h)$로, T_F−T_B의 기울기를 $(2\lambda/d)^{-1}$로 다루는 것은 합리적인 근사이지만, 이론적으로 옳지는 않다.

오차 분석 오차는 기울기에서 전파해야 한다. 예를 들어 기울기 $k_1 = 1/h$와 $k_2 = 1/(h+2\lambda/d)$를 얻었다면 오차를 전파해야 한다. 여러 항의 오차 기여를 그냥 더하는 것과 오차의 제곱을 더하는 것(독립 오차) 모두를 인정한다. 예:

$$h = \frac{1}{k_1} \pm \frac{\sigma_1}{k_1^2} \tag{20}$$

$$\lambda = \frac{d}{2}(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}) \pm \frac{d}{2}\left(\frac{\sigma_1}{k_1^2} + \frac{\sigma_2}{k_2^2}\right) \tag{21}$$

다른 기울기 정의에도 마찬가지이다.

알베도

흰 판에서는 입사 선속의 일부만 흡수되므로, 알베도를 a라 하면 j를 $j(1-a)$로 바꾼다.

$$j = (1-a)\frac{P}{Cr^2}. \tag{22}$$

따라서 두 판에 대해 잰 기울기의 비는 $(1-a)$이다. 이는 추세 기울기의 비, 온도 차의 비 등으로 나타낼 수 있다.

실험

복사선속 밀도는 두 가지 주된 방법이나 그 조합으로 바꿀 수 있다: 거리를 바꾸거나 전구에 흐르는 전류를 바꾼다. 두 방법 모두 인정하지만, 전류를 바꾸면 전구의 스펙트럼과 효율도 바뀌므로 치우치고 비선형인 결과가 나올 수 있다. 학생들은 매개변수 하나만 바꾸는 것이 올바른 절차임을 알아야 한다.

이 과제에 필요한 측정은 검은 판과 흰 판에 대해 여러 전력에서의 앞면과 뒷면 온도이다. 평형을 기다리는 것이 필수적이며, 이는 뒷면 온도가 안정될 때까지 기다리는 것을 포함한다. 가장 낮은 선속 밀도부터 재는 것이 좋다. 판의 처음 실온에서 평형까지 시간이 가장 적게 걸리기 때문이다.

표적을 광원에 너무 가까이 두면 안 된다. 탈 위험이 있을 뿐 아니라, 전구에 가까우면 빛이 판 위에 매우 고르지 않게 분포하기 때문이다. 높은 온도에서 대류율이 커지는 것도 선형 영역에서 벗어나기 시작한다. 표적을 광원에서 너무 멀리 두면 가열이 무시할 만큼 작아져, 특히 흰 판에서 온도 차의 상대 오차가 매우 커진다.

이 과제의 측정에는 오차의 원인이 많다. 서로 다른 거리와 각도에서 재면 (재는 부분이 여전히 빛을 받고 있다면) 배경이나 광원에서 반사된 적외선 복사의 비율이 달라질 수 있다. 측정이 너무 오래 걸리면 판이 식기 시작할 수 있다(몇 초면 알아챌 수 있다). 공기의 흐름이 대류 열 손실을 키울 수 있고, 측정 중에 주위 온도가 바뀔 수도 있다(특히 광원을 벽에 너무 가까이 두거나 전원 장치의 팬 배기가 측정 장치에 너무 가까울 때). 오차는 온도 상승이 가장 작은 낮은 복사선속과 흰 판에서 가장 두드러진다.

이런 이유로 데이터 점마다 여러 번 재어 결과를 평균하고, 기울기 오차를 줄이도록 충분히 넓은 범위를 다루는 것이 좋다. 추세를 그리려면 적어도 3개의 점이 필요하지만 5개가 더 좋다. 점이 많을수록 이상값을 찾아내고 오차가 가장 적은 측정을 쓰기 쉽다. 조건 변화에 따른 온도 차 신호의 오차를 줄이려면 뒷면과 앞면 온도를 짝지어 잇달아 재는 것이 가장 좋다.

참고: 주위 온도 T_0는 공기 온도와 주변 벽, 천장, 다른 물체와의 복사 교환을 합친 유효 온도이다. 그 값은 필요 없고 선형 추세의 기울기만 필요하다. 선형 관계가 원점을 지난다는 가정과 함께 쓰면, 부정확한 T_0는 부정확한 결과로 이어질 수 있다. 주위의 온도를 재어서는 T_0를 믿을 만하게 정할 수 없지만, 광원이 없을 때 판의 평형 온도를 재어 어림할 수 있다.

여러 복사선속에서 잰 앞면과 뒷면의 온도는 처리하여 그래프로 그려 필요한 기울기를 뽑아내야 한다. 검은 판에 대해서는 식 (14, 15), 식 (16, 17), 또는 선형 독립인 어떤 쌍을 바탕으로 두 그래프가 필요하다. 선형 회귀로 기울기 h와 $h+2\lambda/d$(또는 그 역수)를 얻는다. T_0는 (식 16) 또는 그와 동등한 그래프의 추세선의 $j=0$ 절편으로 정하는 것이 가장 좋으며, 다른 방법으로 정한 T_0와 맞아야 한다. 올바르게 쟀다면 (식 17)의 추세선의 절편은 오차 범위 안에서 0이어야 한다.

T_0를 잘 쟀다면 (판의 색마다) 한 입력 전력에서의 측정으로 필요한 기울기를 계산할 수 있다. 이는 그래프 없이 할 수 있다. 그러나 여러 번 측정하면 통계적 오차의 영향이 줄고 오차를 더 잘 추정할 수 있으므로, 측정이 하나뿐이면 오차가 크다.

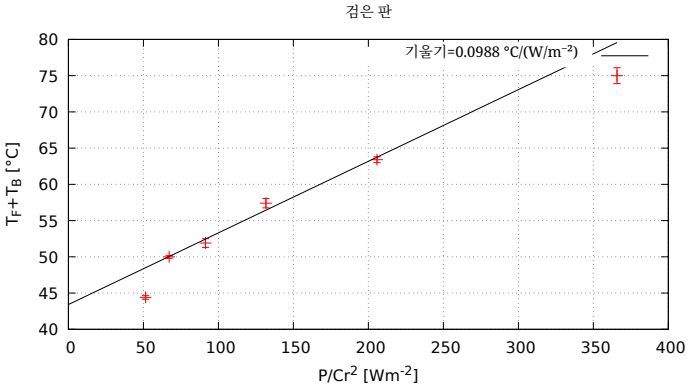
과제에서 복사 조도 단위로 정의한 알베도는, 측광 단위로 재는 조도계로는 잴 수 없다. 게다가 흰 판에서 반사된 빛은 기하학적 조건과 반사광의 각 분포를 더하며, 이는 쉽게 고려할 수 없다.

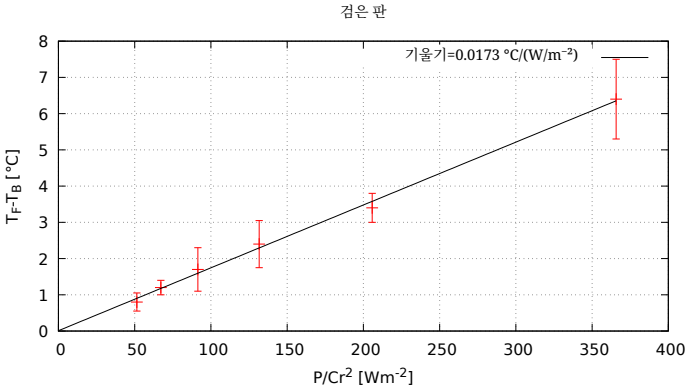
알베도는 관계 (14, 15, 16, 17) 가운데 어느 것으로든 검은 판과 흰 판의 해당 직선 기울기의 비로 어림할 수 있다. 따라서 h와 λ가 같다고 가정하면 흰 판에서는 판의 한쪽 면만 재어도 알베도를 정할 수 있다. 차의 기울기나 뒷면 온도의 기울기는 온도 상승이 아주 작아 측정에 큰 상대 오차를 더하므로 가장 알맞지 않다.

채점 기준

기본 식은 풀이의 별도 절에 써도 되고, 풀이의 여러 부분에 나누어 써도 된다.

그림 6: 식 (16, 17)에 대한 검은 판의 측정. 거리 r를 바꾸어 선속 밀도 j를 바꾸었다. 첫 그래프의 기울기는 h^{-1}이므로 $h = 10$ W m^{-2} K^{-1}이다. 가장 낮은 측정과 가장 높은 측정은 맞춤에서 뺐다. 절편은 $2T_0$이다. 둘째 그래프의 기울기는 $(h+2\lambda/d)^{-1}$이므로 $\lambda = 0.072$ W m^{-1} K^{-1}이다. 절편은 0에 꽤 가깝다.



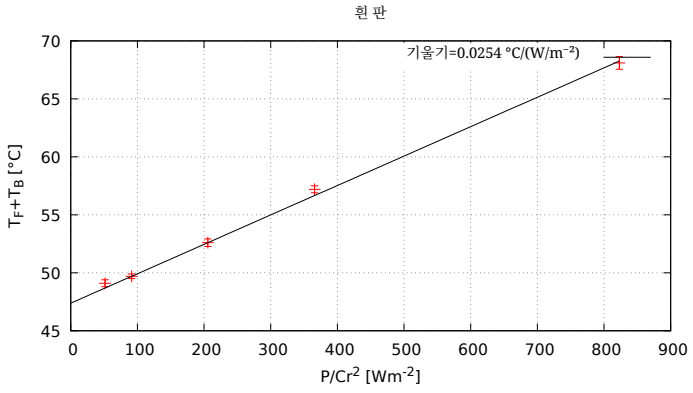


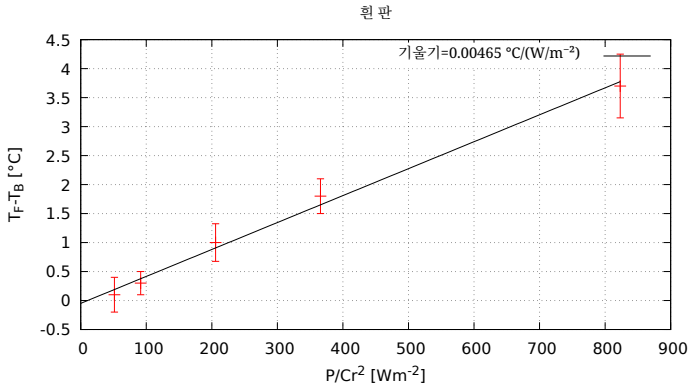
	이론적 배경	점수
A1	복사 전력에서 복사 조도로	**0.4**
	식 (13) 또는 그와 동등한 식이 맞음	0.3
	과제 2의 같은 기하가 적용됨을 앎 (C 또는 그와 동등한 양)	0.1
A2	열교환 균형	**0.6**
	식 (14, 15) 또는 그와 동등한 식이 각각 맞음	2×0.3
	식마다 부분적으로 맞으면, 예: (14)에서 $T_B = T_0$로 가정하거나 (17)에서 2나 h를 빠뜨림	or 0.1
A3	알베도 균형	**0.2**
	식 (22) 또는 그와 동등한 식이 맞음	0.2
	이론 합계	**1.2**

식 $P/A = h(T-T_0)$의 왼쪽이 광원의 전력 전체를 판의 넓이에 나누어 준다고 가정하면 이해가 부족한 것이므로 이론 부분은 0점이다.

전도를 전혀 고려하지 않으면 A2에는 최대 0.1점을 준다.

그림 7: 식 (16, 17)에 대한 흰 판의 측정. 첫 그래프에서 검은 판 결과와의 기울기 비는 $(1-a) = 0.0254/0.0988 = 0.26$이다. 둘째 그래프도 거의 같은 $(1-a) = 0.27$로 이를 확인해 준다.
$0.00465/0.0173 = 0.27$





측정		**점수**
B1	T_F(검은 판)를 $n \le 5$번 잼	$0.1n$
B2	T_B(검은 판)를 $n \le 5$번 잼	$0.1n$
B3	T_F, T_B 또는 둘 다(흰 판)를 $n \le 5$번 잼	$0.1n$
B4	변하지 않는 값을 잼(U, I를 바꾸었으면 거리, 거리를 바꾸었으면 U, I)	0.2
	측정 오차를 추정함(적어도 판의 색마다 따로) – 기기의 정밀도는 올바른 오차 추정이 아니다	0.2
	측정 오차를 추정함 (모두 공통)	or 0.1
	(거리가 아니라) 전류를 바꾸어 잼	−0.2
열 손실 합계		**1.9**

h와 λ를 정하려면 두 그래프에서 두 추세선을 뽑아내야 한다. 같은 그래프에 그리면 둘로 치지만, 세로축의 이름을 올바르게 붙여야 한다. 추세선의 $j = 0$ 절편은 온도 차의 경우 0이고, 그렇지 않으면 주위 온도와 관련된다. 기울기를 읽을 때 변환을 올바르게 하는 한, 축으로 j 대신 r^{-2}나 P를 써도 된다.

열 손실 매개변수		**점수**
C1	두 그래프 가운데 첫 번째	**0.8**
	올바르게 바꾸어 그린 점 $n \le 5$개	$0.1n$
	올바른 추세선	0.1
	올바른 기울기 읽기	0.1
	기울기 오차 추정	0.1
	절편이 예상과 맞지 않음	−0.1
	축 이름, 눈금이 없거나 크기가 알맞지 않음	−0.1
C2	두 그래프 가운데 두 번째	**0.8**
	C1과 같은 세부 배점	
C3	h 계산	**0.8**
	기울기와의 올바른 대수 관계	0.2
	수치가 [10, 14] 안	0.3
	수치가 [8, 16] 안	or 0.2
	수치가 [6, 18] 안	or 0.1
	올바른 오차 분석	0.2
	오차 추정 < 1(오차 분석이 합리적일 때)	0.1
C4	λ 계산	**0.8**
	기울기와의 올바른 대수 관계	0.2
	수치가 [0.06, 0.08] 안	0.3
	수치가 [0.05, 0.09] 안	or 0.2
	수치가 [0.04, 0.10] 안	or 0.1
	올바른 오차 분석	0.2
	오차 추정 < 0.01(오차 분석이 합리적일 때)	0.1
열 손실 매개변수 합계		**3.2**

값은 SI 기본 단위이다.

그래프 없이: 맞춤 과정 전체를 그래프 없이 수치로 했다면, 위의 채점에 해당하는 개념을 쓴다 — 그래프 대신 표, 추세선 대신 기울기 계산 등. 그래프는 필수가 아니므로 올바른 절차라면 만점을 받을 수 있다.

이 경우 오차 분석은 전체 절차(예: T_0를 알고 측정 하나를 쓰거나, 배경 없이 두 점을 씀)를 여러 번 측정해 통계를 내는 것일 수 있다. 다른 방법은 개별 측정의 오차에서 상대 오차를 전파하는 것이다. 주된 기준은 오차의 원인이 기기가 아니라 통계적이어야 한다는 것이다.

점의 개수에는 온도 차 그래프(식 17)의 원점도 포함된다.

기울기 오차가 주된 오차의 원인이다 — 거리와 전력은 정확하다고 볼 수 있다. 기울기의 오차 추정은 점들의 흩어짐으로 할 수 있으며(단 점이 5개보다 적으면 안 된다), (학생이 추정했다면) 오차 막대를 고려해도 되고 안 해도 된다.

오차 전파: 틀린 C 값을 썼다면 알맞은 값으로 다시 계산하여 그에 따라 채점한다.

알베도		**점수**
D1	하나 이상의 그래프	**1.0**
	올바르게 바꾸어 그린 점 $n \leq 5$개	$0.1n$
	개별 측정 오차를 추정함	0.1
	올바른 추세선	0.2
	올바른 기울기 읽기	0.1
	기울기 오차 추정	0.1
	절편이 예상과 맞지 않음	-0.1
	축 이름이 없음	-0.1
D2	데이터 처리	**0.7**
	a의 올바른 대수 식	0.2
	수치 $a$in$[0.65,0.75]$	0.2
	수치 $a$in$[0.6,0.8]$	or 0.1
	올바른 오차 분석	0.2
	오차 추정 < 0.05(오차 분석이 합리적일 때)	0.1
알베도 합계		**1.7**

두 온도를 모두 잴 수 있으므로 두 데이터 세트를 모두 써서 알베도를 추정하는 조합도 가능하다 — 두 기울기 비를 평균하는 것 등. 이것도 올바른 방법이다.

여러 데이터 점으로 점별 수치 계산만 한 경우 D1에 최대 0.5점(데이터 변환 0.3, 오차 추정 0.2), D2에 최대 0.7점을 준다. 데이터 점 하나로만 계산했다면 D1에 최대 0.2점(데이터 변환 0.1, 오차 추정 0.1), D2에 최대 0.5점(대수 식 0.2, 값 0.2, 오차 분석 0.1)을 준다.