E1 - 자석 진자 - 풀이

동기

VIRGO 중력파 검출기의 진동 차단 장치(그림 1)에서는 서로 밀어내는 자석을 써서 매달림 장치의 수직 진동 진동수를 약 1.5 Hz에서 0.5 Hz 아래로 옮긴다. 이렇게 하면 몇 Hz 진동수의 중력파에 대한 검출기의 감도가 좋아진다.

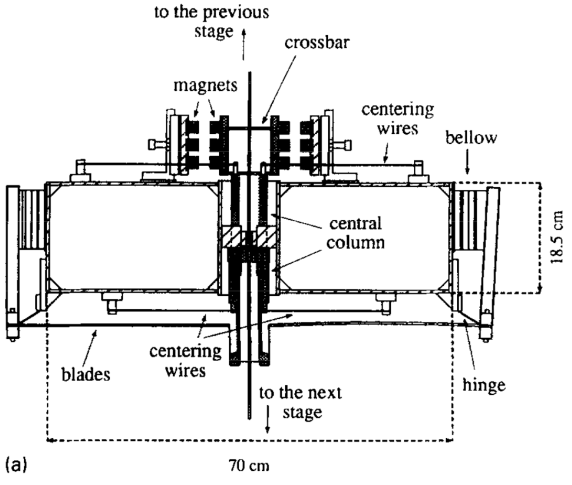


그림 1: VIRGO 중력파 간섭계의 기계식 매달림 장치 일부인 자기 반(反)스프링. 출처: NIM A 394 (1997) 397-408.

변형된 진자 진동수의 유도 (학생에게 주어짐)

물리 진자의 운동은 $y = 0$ 평면에 묶여 있다(자유도 1). 진자가 평형일 때 원점에 오도록 (y축 방향의) 자기 쌍극자를 진자에 붙인다. y축 위 $y = \pm\ d$에 y 방향 자기 쌍극자를 두 개 더 둔다. 진자에 붙은 자석들의 합성 쌍극자 모멘트는 j_1, 외부 자석의 쌍극자 모멘트는 둘 다 j_2이다.

원점의 점 쌍극자 $\boldsymbol{m}$이 위치 $\boldsymbol{r}$에 만드는 자기장은 다음과 같다.

$$\vec{B}(\vec{m},\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\left(\frac{3\vec{r}\cdot(\vec{m}\cdot\vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}\right) \qquad (1)$$

따라서 $(0,\ d,\ 0)$에 놓인 쌍극자 $(0,\ j_2,\ 0)$이 x축 위에 만드는 자기장의 y 성분은 다음과 같다.

$$B_y(d,x) = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot j_2\cdot\frac{2d^2 - x^2}{\left(x^2+d^2\right)^{5/2}} \qquad (2)$$

이 함수는 d에 대해 대칭이므로 두 외부 자석은 x축 위에서 같은 기여를 한다. $x = 0$ 둘레의 테일러 급수의 첫 항들은 다음과 같다.

$$B_y(d,x) = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot j_2\cdot\left(\frac{2}{d^3} - \frac{6x^2}{d^5} + \frac{45}{4}\frac{x^4}{d^7} + \mathcal{O}\left(x^6\right)\right) \qquad (3)$$

각도 φ의 함수로 쓴 진자의 퍼텐셜 에너지는 다음과 같다.

$$U(\varphi) = Mgs(1-\cos\varphi) + j_1 \cdot 2B_y\left(d, 2\ell\cdot\sin(\varphi/2)\right), \quad (4)$$

여기서 s는 자석 진자의 질량 중심에서 회전축까지의 거리, ℓ은 진자 자석에서 회전축까지의 거리이다. 상수와 고차항을 무시하면

$$U(\varphi) \approx Mgs\varphi^2/2 + \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot j_1 \cdot 2j_2 \cdot \left(-\frac{6}{d^5}\ell^2\varphi^2\right), \quad (5)$$

$$U(\varphi) \approx \left(Mgs - \frac{6\mu_0}{\pi}\cdot j_1\cdot j_2\cdot\frac{\ell^2}{d^5}\right)\cdot\varphi^2/2, \quad (6)$$

진자의 운동 에너지는 $T(\dot\varphi) = I\dot\varphi^2/2$이며, $\partial_\varphi U(\varphi) = (\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\partial_{\dot\varphi}T(\dot\varphi)$로부터 고유 진동수를 얻는다.

$$\omega^2 = \left(Mgs - \frac{6\mu_0}{\pi}\cdot j_1\cdot j_2\cdot\frac{\ell^2}{d^5}\right)\Big/ I \quad (7)$$

다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\omega^2 = \omega_0^2 \pm \omega_{mag}^2 \quad (8)$$

여기서 $\omega_0{}^2 = Mgs/I$, $\omega_{\mathrm{mag}}{}^2 = 6\mu_0/(I\pi)\cdot j_1\cdot j_2\cdot\ell^2/d^5$이며, 더하기 부호는 외부 자석이 끌어당기는 극성일 때, 빼기 부호는 밀어내는 극성일 때이다.

과제 1 - 자석과 진자 몸체의 질량 (1.0점)

무게를 재는 저울 없이도 자석과 진자의 질량비를 정하는 방법은 여러 가지이다.

A) 자석이 있을 때와 없을 때(또는 자석의 위치를 바꿔 가며) 진자의 질량 중심을 찾는다

B) 자석을 수평으로 옮겨 붙였을 때 진자가 기우는 각도를 잰다(레이저로 각도를 재면 매우 정밀함)

C) 자석의 수직 위치에 따른 진자 진동수를 재고, 예를 들어 가장 빠르게 진동하는 위치를 이용한다

방법마다 정밀도가 크게 다르다(대개 B가 가장 좋고 C가 가장 나쁘다). 수치 결과가 좋으면 어느 방법으로든 만점을 받을 수 있다.

모든 진자를 분석용 저울로 달았다. 질량 분포는 $M_{\mathrm{pen}} = (44.7 \pm 1.7)$ g(평균과 표준 편차)이었다. 진자 자석 두 개의 질량은 사양 $M_{\mathrm{mag}} = (7.68 \pm 0.01)$ g과 잘 맞는다. 명목 질량비는 다음과 같다.

$$M/m = 5.82 \pm 0.22. \quad (9)$$

진자 자석 열두 개를 잰 결과는 한 쌍의 사양 질량 7.68 g과 일치한다. 여섯 쌍을 따로 재면 표본 표준 편차는 0.035 g에 불과하다.

표 1: 진자의 물리적 매개변수

물리량	값
진자 몸체의 질량	$M_{\mathrm{pen}} = (44.7 \pm 1.7)\,\mathrm{g}$
진자 자석의 질량	$M_{\mathrm{mag}} = (7.68 \pm 0.03)\,\mathrm{g}$
자석-축 거리	$\ell = (23.0 \pm 0.1)\,\mathrm{cm}$
질량 중심-축 거리 (자석 없음)	$s_0 = (12.0 \pm 0.1)\,\mathrm{cm}$
질량 중심-축 거리 (자석 있음)	$s_1 = (13.6 \pm 0.1)\,\mathrm{cm}$
자석 없을 때의 주기	$T_0 = 2\pi/\omega_0 = (863 \pm 5)\,\mathrm{ms}$
자석 있을 때의 주기	$T_1 = 2\pi/\omega_1 = (885 \pm 3)\,\mathrm{ms}$
관성 모멘트 (자석 있음)	$I = (1.38 \pm 0.02)\,\mathrm{g\cdot m^2}$
진자 자석의 쌍극자 모멘트	$j_1 = (0.96 \pm 0.01)\,\mathrm{A\cdot m^2}$
외부 자석의 쌍극자 모멘트	$j_2 = (2.30 \pm 0.03)\,\mathrm{A\cdot m^2}$

자석 질량은 진자 질량보다 장치마다 더 일정하므로(그리고 두 측정은 주어진 합 때문에 완전히 반상관되므로) 점수는 구한 자석 질량에만 준다. 허용 범위는, 주어진 값 52.3 g에 대한 전체 질량의 편차 때문에 생기는 자석 질량의 흩어짐을 덮을 만큼 넓게 잡았다.

A: 질량 중심 방법 예를 들어 자 위에 진자를 올려 균형을 잡아, 먼저 자석이 없을 때의 질량 중심(S)을 진자에 표시하고, 자석을 S에서 되도록 먼 위치 P(예: 아래쪽 가운데)에 붙인 뒤 새 질량 중심(S′)을 잰다. S′ 둘레의 돌림힘 균형으로부터

$$M \cdot \overline{SS'} = m \cdot \overline{S'P} \tag{10}$$

SS' = (1.6 ± 0.1) cm, $S'P$ = (9.4 ± 0.1) cm를 재었다면

$$M/m = 5.9 \pm 0.4. \tag{11}$$

각 질량은 합과 비로 나타낼 수 있다.

$$m = \frac{M+m}{1+M/m} = (7.6 \pm 0.5)\,\mathrm{g} \tag{12}$$

$$M = (M+m)\cdot\frac{M/m}{1+M/m} = (44.7 \pm 0.6)\,\mathrm{g}. \tag{13}$$

B: 기울기 각 방법 (더 가벼운 시제품 진자) 자석을 회전축에 대해 (진자 면에 투영한) 위치 $(x_m,\ y_m)$에 두면, 진자는 연직에서 각 a만큼 기운 채 멈춘다. 이 각은 거리 d의 스크린에서 레이저 점이 움직인 거리 $\delta\, y$를 보면 정밀하게 잴 수 있다.

$$\tan\alpha = \delta y/d \tag{14}$$

참고: 거울의 회전축이 레이저 빔과 나란하므로 2배 인자가 없다.

연직과, 회전축과 자석 평형 위치를 잇는 직선 사이의 각을 β라 하면 돌림힘 균형은 다음과 같다.

$$M \cdot s_0 \cdot \sin\alpha = m \cdot \sqrt{x_m^2 + y_m^2} \cdot \sin\beta \tag{15}$$

여기서

$$\tan(\alpha+\beta) = x_m / y_m \tag{16}$$

회전축에서 질량 중심까지의 거리는 $s_0 = (11.4 \pm 0.1)$ cm이다. 한 번만 잴 때 가장 좋은 자석 위치는 진자의 가장 넓은 부분의 가장자리 근처이다. $x_m = (7.7 \pm 0.1)$ cm, $y_m = (18.0 \pm 0.1)$ cm, $d = (55 \pm 1)$ cm일 때 $\delta\, y = (5.9 \pm 0.1)$ cm를 얻었다. 이로부터 $\alpha = 6.12^\circ$, $\beta = 17.0^\circ$, 그리고 $M/m = 4.7 \pm 0.4$를 계산한다.

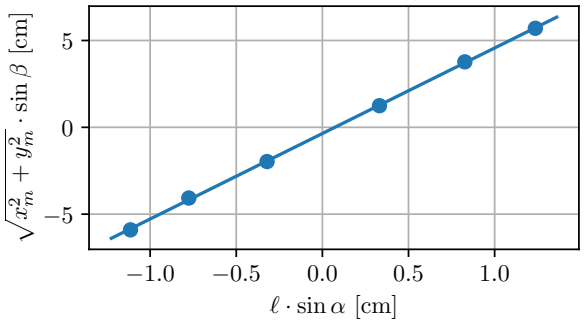


그림 2: 여러 자석 위치에 대한 기울기 각 분석.

더 정밀하게 하려면 여러 자석 위치에 대한 돌림힘 균형을 그래프로 그려야 한다(그림 2). 기울기로 $M/m = 4.92 \pm 0.03$(맞춤 오차만)을 얻는다. 절편 (-0.36 ± 0.02) cm는 질량 중심이 진자의 대칭축에서 1 mm 벗어난 것을 알아채지 못해 β의 좌표계가 1° 돌아간 것으로 설명할 수 있다.

C: 진동수 방법 (더 가벼운 시제품 진자) 진자 진동수는 회전축에 대해 $(0,\ y)$에 놓인 자석의 위치에 다음과 같이 의존한다.

$$\omega^2 = \frac{M s_0 + m y}{I + m y^2} \cdot g. \tag{17}$$

이 함수는 다음 위치에서 하나뿐인 최댓값 ω_{max}를 가진다.

$$y_{max} = \sqrt{I/M + \left(\frac{M s_0}{m}\right)^2} - \frac{M s_0}{m}. \tag{18}$$

ω_{max}의 식에서 y_{max}를 없애면 M/m을 풀 수 있다.

$$m/M = \frac{4\omega_{max}^2}{\Omega^2} \cdot \left(\frac{\omega_{max}^2}{\omega_0^2} - 1 \right) \tag{19}$$

여기서 $\Omega^2 = g/s_0$, ${\omega_1}^2 = Ms_0 g/I$.

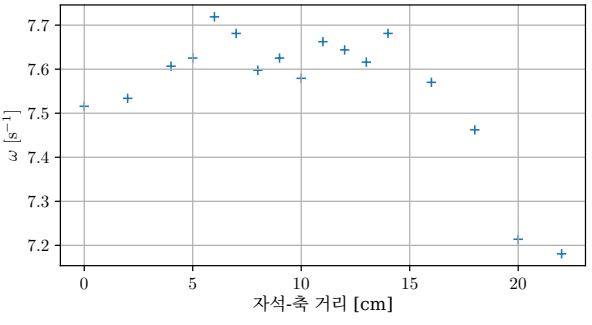


그림 3: 자석의 수직 위치에 따른 진자 진동수.

여러 y 값을 훑어 $y_0 = (10 \pm 3)$ cm, $\omega_{max} = (7.65 \pm 0.05)$ s^{-1}, $\omega_1 = (7.50 \pm 0.06)$ s^{-1}, $\Omega = (9.28 \pm 0.04)$ s^{-1}를 얻는다. $M/m = 6.7$ ... 14로 계산된다.

이 장치처럼 질량비가 비교적 크면 이 방법은 충분히 정밀하지 않다.

변형: 자석이 있을 때와 없을 때의 진동수
진자 진동수로 질량비를 얻는 방법은 많다. 널리 쓰인 방법은 명목 자석 위치만 써서 자석이 있을 때와 없을 때의 진동수를 비교하는 것이었다. 두 진동수의 식은 다음과 같다.

$$I \cdot \omega_0^2 = Mgs_0 \tag{20}$$

그리고

$$(I + m\ell^2) \cdot \omega_1^2 = (M + m)gs_1 \tag{21}$$

질량비는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$M/m = \frac{\ell^2/g - s_1^2/\omega_1^2}{s_1^2/\omega_1^2 - s_0^2/\omega_0^2} = 6.1 \pm 0.3. \tag{22}$$

E1.1 – 질량		**점수**
A	**질량 중심 방법**	**0.6**
	거리 SS'와 $S'P$의 측정 (자석 위치를 바꿔 반복할 때마다 0.1)	0.4
	질량비의 식	0.2
B	**기울기 각 방법**	**0.6**
	데이터 점 수. 1개: 0.1, 2개: 0.3, ≥3개: 0.4	0.4
	질량비의 식 (또는 질량을 구하는 동등한 계산)	0.2
C	**진동수 방법**	**0.6**
	ω_1과 ω_0의 측정 (5회 이상 진동으로 반복할 때마다 0.1, 반복 없으면 10회 진동마다 0.1)	0.4
	질량비의 식	0.2
	M_{mag}의 수치	**0.4**
	값이 (7.7 ± 1.0) g 안	or 0.2
	값이 (7.7 ± 1.5) g 안	or 0.1
	불확도의 타당한 어림	0.2
질량 합계		**1.0**

과제 2 - 자기 쌍극자 모멘트 (4.0점)

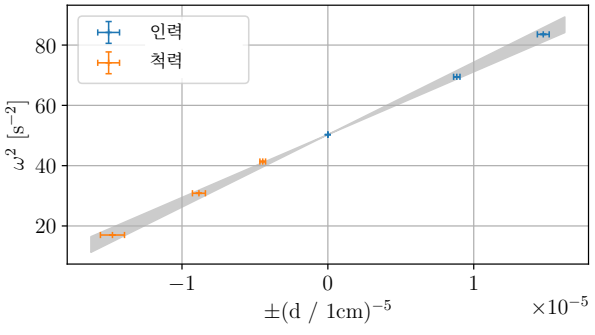


그림 4: 외부 쌍극자 자석에 의한 자기 진동수 이동의 결정.

a) 데이터 수집 가능한 외부 쌍극자 방향 두 가지를 모두 쓰면 다룰 수 있는 진동수 범위가 가장 넓어진다. 끌어당기는 방향에서 가장 가까운 거리는 자석이 레일에서 진자 쪽으로 미끄러지지 않고 버티는 한계로 정해지며 약 $d = 7$ cm이다. 밀어내는 방향에서는 $d = 8.4$ cm 근처의 완전 상쇄점으로 정해지며, 실제로는 약 9 cm까지 쓸 수 있다.

밀어내는 방향에서 자석 간격이 더 가까우면 진자는 이중 우물 퍼텐셜에서 움직이며 진폭 0 근처의 거동이 잘 정의되지 않는다. 식 (8)은 음의 ω^2을 주며, 비켜난 극소점 둘레의 진동에는 맞지 않는다. 따라서 이런 데이터 점은 이 문제에 쓸모가 없다. 이는 진자가 평형일 때 자석들이 한 직선 위에 있어야 한다는 힌트에 명시되어 있다.

ω^2을 d^{-5}에 대해 그려야 하므로, d^{-5}에서 데이터 점이 고르게 퍼지도록 작은 d를 훨씬 촘촘하게 재야 한다. 이상적으로는 고른 간격을 미리 계산할 수 있다. 예: $(0^{-0.2}, 0.25^{-0.2}, 0.5^{-0.2}, 0.75^{-0.2}, 1^{-0.2})\cdot d_0 =$

(∞, 1.32, 1.15, 1.06, 1)· d_0. 무한대 점은 자석을 치워서 기록한다.

b) 비자화 밀어내는 자석 간격을 음수로 세어 $\pm{\omega_{\mathrm{mag}}}^2$의 부호를 흡수하면, 끌어당김과 밀어냄 데이터를 한 그래프에 합칠 수 있다.

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \frac{6\mu_0}{I\pi}\cdot j_1 \cdot j_2 \cdot \frac{\ell^2}{d^5} \tag{23}$$

ω^2을 d^{-5}에 대해 그리면 기울기 $k = 6\mu_0\ell^2/(I\pi)\cdot j_1\cdot j_2$, 절편 ${\omega_1}^2$인 직선으로 맞출 수 있다.

그림 4의 예시 데이터는 기울기 $k = (2.14 \pm 0.05)\ 10^6\mathrm{cm}^5/\mathrm{s}^2$를 준다. 쌍극자 모멘트의 곱을 얻으려면 자석-축 거리 $\ell = (23.0 \pm 0.1)$ cm를 재고 관성 모멘트 I를 구해야 한다. I는 교란 없는 진동수 ${\omega_1}^2 = (M_{\mathrm{pend}} + M_{\mathrm{mag}})gs_1/I$에서, 주어진 전체 질량과 중력 가속도, (균형으로 잰) 질량 중심-축 거리 $s_1 = (13.6 \pm 0.1)$ cm를 써서 얻을 수 있다.

$$I = \frac{(M_{pend} + M_{mag})gs_1}{\omega_1^2} = (1.38 \pm 0.02)\,\mathrm{g\cdot m}^2 \tag{24}$$

쌍극자 모멘트의 곱은 다음과 같다.

$$j_1 \cdot j_2 = k \cdot \frac{I\pi}{6\mu_0\ell^2} = (2.33 \pm 0.05)\,(\mathrm{Am}^2)^2. \tag{25}$$

비 $j_2/j_1 = 2.4$가 주어졌으므로 각 쌍극자 모멘트는 다음과 같다.

$$j_1 = \sqrt{j_1 \cdot j_2 / 2.4} = (0.98 \pm 0.01)\,\mathrm{Am}^2. \tag{26}$$

$$j_2 = \sqrt{j_1 \cdot j_2 \cdot 2.4} = (2.36 \pm 0.03)\,\mathrm{Am}^2. \tag{27}$$

진자 자석의 실제 질량 $M_{\mathrm{magnets}} = 7.68$ g을 쓰면 비자화는 다음과 같다.

$$j_1/M_{magnets} = (0.128 \pm 0.030)\,\mathrm{Am}^2/\mathrm{g}. \tag{28}$$

기댓값은 NdFeB–N42의 제조사 잔류 자화(1.29 T–1.32 T)와 밀도(7.4 g/cm³–7.5 g/cm³)로 계산할 수 있다.

$$\frac{B_r}{\mu_0\cdot\rho} = 0.137\,\mathrm{Am}^2/\mathrm{g} - 0.142\,\mathrm{Am}^2/\mathrm{g}. \tag{29}$$

관측된 비자화가 10% 작은 것은 작은 자석의 가장자리 효과, 즉 자화가 균일하지 않을 수 있기 때문이라고 설명할 수 있다. 외부 자석과 진자 자석의 쌍극자 모멘트 비에서도 가장자리 효과의 단서가 있다. 자기력계로 잰 비 2.4가, 코팅을 빼고 잰 부피 비 2.2보다 크다.

다섯 가지 장치에서 데이터 수집과 선형 회귀를 했더니, 기울기는 ±5% 안에서 일치했고(관측된 자기 모멘트 편차로 설명됨) 오프셋(진동수의 제곱)은 ±1% 안에서 안정했다. 허용 수치 범위는 이 편차를 덮는다.

E1.2 – 자기 쌍극자 모멘트		**점수**
a)	**진동수 측정**	**2.0**
	인력과 척력을 모두 사용	0.3
	가장 가까운 d 설정 ≤ 9 cm (≤ 10 cm 이면 0.1)	0.3
	작은 $\lvert d\rvert$에서 더 촘촘한 간격	0.3
	d 설정마다 0.1 (∞ 포함)	0.6
	d 값마다 10회 진동당 0.1	0.5
b)	**비자화**	**2.0**
	ω^2 대 d^{-5}, ω 대 $d^{-5/2}$, 또는 $\log\lvert\omega^2 - {\omega_1}^2\rvert$ 대 $\log d$의 그래프	(1.0)
	데이터 점을 바르게 찍음 (각각 0.1)	0.5
	올바른 축 이름과 눈금	0.1
	데이터가 반쪽 이상을 차지	0.1
	추세선을 그림	0.1
	기울기를 읽음	0.1
	기울기 오차를 어림	0.1
	I를 구하는 식	0.3
	$j_1 \cdot j_2$를 구하는 식	0.2
	j_1을 구하는 식	0.2
	j_1/M_{mag}의 수치 = 0.125 $\mathrm{Am^2/g}$, 또는 $j_1 \cdot j_2$ = 2.2 $(\mathrm{Am^2})^2$ (±10% 안 0.3, ±20% 안 0.2, ±30% 안 0.1)	0.3
자기 쌍극자 모멘트 합계		**4.0**

그래프 분석 대신 두 데이터 점으로 기울기를 계산했다면 '데이터 점 찍기'에 0.2/0.5점을 주고, 축·공간·추세선에는 점수를 주지 않는다(총 0.6점 손실). 나머지는 일반 채점 기준을 따른다.

과제 3 - 미지의 외부 자석 (3.0점)

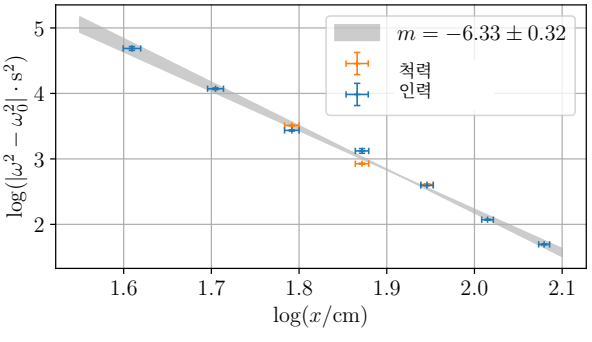


그림 5: 미지 자석의 거듭제곱 법칙 결정.

a) 데이터 수집 실험해 보면 미지 자석은 쌍극자처럼 180° 회전에 대해 반대칭이 아니라 대칭임을 알 수 있다. 그래도 미지 자석끼리 바꾸거나(서로 반대로 자화되어 있다고 주어짐) 진자 자석을 뒤집어 끌어당김과 밀어냄을 모두 얻을 수 있다. 진자 자석을 뒤집으면 자석 위치가 정확히 같지 않을 경우 ω_1을 다시 재야 할 수 있다.

전체 자기장 세기가 더 약하므로, 거리를

끌어당기는 방향에서 $d = 5$ cm까지, 밀어내는 방향에서 약 $d = 5.5$ cm까지 줄일 수 있다. 로그 눈금에서 고른 간격을 얻으려면 이어지는 측정 사이에 거의 같은 비율로 커지는 d 값을 고르면 된다.

끌어당김과 밀어냄을 합쳐 정밀도를 높일 수는 없지만, 주어진 간격에서 자기 진동수 이동의 절댓값을 독립적으로 두 번 재는 데 쓸 수 있다. 다룰 수 있는 d 범위가 더 넓고 전체적으로 진동이 더 빠르므로(상대 정밀도가 더 높음) 끌어당기는 방향만 골라도 된다.

b) 거듭제곱 법칙 자기 진동수 이동 제곱의 절댓값 $|{\omega}^2 - {\omega_1}^2|$을 자석 거리에 대해 로그-로그 축에 그리면(그림 5) 기울기 $a = -6.33 \pm 0.32$인 직선으로 맞출 수 있으며, 이는 거듭제곱 법칙 ${\omega_{\mathrm{mag}}}^2 \propto d^{-6}$을 뜻한다.

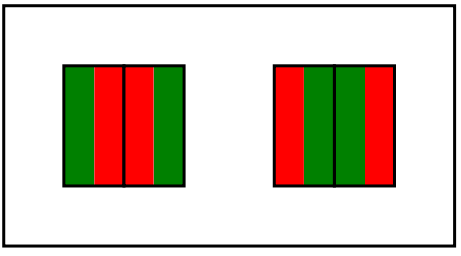


그림 6: 미지 외부 (사중극자) 자석의 쌍극자 배치.

c) 쌍극자 배치 자기 진동수 이동의 지수가 쌍극자 자석보다 1 크므로, 거리에 따른 자기장의 지수도 쌍극자 법칙보다 1 크다, 즉 $B \propto r^{-4}$라고 결론 내릴 수 있다. (사실 자기 진동수 이동의 제곱은 자기장의 곡률을 따르므로, 미분이 거듭제곱 지수에 2를 더한다.)

우리가 찾는 것은 자기 사중극자 배치이다. 이는 크기가 같고 방향이 반대인 쌍극자 자석들을 배열해(배열 전체의 쌍극자 모멘트를 상쇄해) 만들 수 있다. 포장과 맞는 가장 단순한 해(그림 6)는, 각 미지 외부 자석 안에 같은 축 위에 반대 방향으로 놓인 원기둥 쌍극자 자석 두 개가 있는 것이다. 하나는 N극이 바깥을, 다른 하나는 S극이 바깥을 향한다.

지름 방향으로 자화된 원기둥(즉 S극이 대칭축 쪽, N극이 바깥쪽, 또는 그 반대)으로 된 것도 맞는 해이다. 만들기는 더 어렵지만 최저차까지는 실제 자석과 구별할 수 없는 자석이 된다.

반대 방향 쌍극자로 사중극자를 만드는 다른 방법(예: 쌍극자가 자기 모멘트와 나란하지 않은 방향으로 비켜난 것)은 미지 외부 자석의 원통 대칭 때문에 제외된다(예를 들어 쌍극자 자기장 안에서 미지 자석을 돌려 보면 확인할 수 있다).

E1.3 – 미지의 외부 자석		**점수**
a)	**데이터 수집**	**1.0**
	가장 가까운 d 설정 ≤ 6 cm	0.2
	작은 $\lvert d\rvert$에서 더 촘촘한 간격	0.2
	서로 다른 d 설정 2개마다 0.1	0.3
	d 값마다 10회 진동당 0.1	0.3
b)	**거듭제곱 법칙**	**1.5**
	$\ln(\lvert\omega^2 - {\omega_1}^2\rvert)$ 대 $\ln(d)$의 그래프	(1.0)
	데이터 점을 바르게 찍음 (각각 0.1)	0.5
	올바른 축 이름과 눈금	0.1
	데이터가 반쪽 이상을 차지	0.1
	추세선을 그림	0.1
	기울기를 읽음	0.1
	기울기 오차를 어림	0.1
	지수 값 (-6 ± 0.5: 0.5, -6 ± 1: 0.2)	0.5
c)	**쌍극자 배치**	**0.5**
	가능한 쌍극자 배치의 스케치	0.3
	근거 (반전에 대한 자기 대칭, 반대 극이 가운데에 있음, 자기적 원통 대칭, 또는 쌍극자 모멘트의 상쇄 각각 0.1)	0.2
미지의 외부 자석 합계		**3.0**

그래프 분석 대신 두 데이터 점으로 기울기를 계산했다면 1.2b)의 채점 기준을 적용한다.

1.3c)에서 근거에 점수를 받지 못했다면 올바른 배치에도 점수를 주지 않는다.

과제 4 - 비선형 진자 (2.0점)

a) 상쇄 거리 상쇄 거리를 정밀하게 찾는 방법은 E1.2의 분석을 쓰는 것이다. 기울기 $k = (2.14 \pm 0.05)\ 10^6\mathrm{cm}^5/\mathrm{s}^2$, y절편 ${\omega_1}^2 = (50.3 \pm 0.3)\ \mathrm{s}^{-2}$인 회귀 직선의 x절편을 구하면 된다. ${d_{comp}}^5 = k/{\omega_1}^2$, 즉 $d_{comp} = (8.43 \pm 0.05)$ cm를 얻는다.

상쇄점에 손으로 다가가며 극소점이 둘로 갈라지지 않는지 꼼꼼히 확인하는 방법도 있다.

덜 유용한 방법은 $d < d_{comp}$에서 갈라진 극소점들의 각 간격 $\Delta\varphi$를 d의 함수로 기록하는 것이다. 이 관계는 심하게 휘어 있어 $\Delta\varphi = 0$으로 정밀하게 외삽하기에 알맞지 않다.

b) 주기의 거듭제곱 법칙 중력과 자기 퍼텐셜의 2차 항이 완전히 상쇄되는 점 근처에서는 진자 진동수가 진폭에 흥미롭게 의존하는 것을 볼 수 있다.

그림 7은 완전 상쇄에 가까운 여러 자석 간격(검정)과 외부 자석이 없을 때(빨강)의 주기를 수치 계산한 것이다.

실험으로 만들 수 있는 배치에서는 세 영역을 구별할 수 있다.

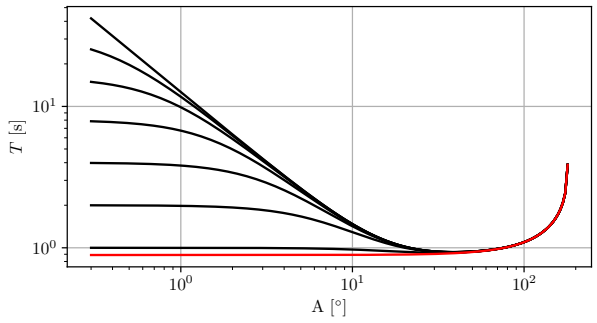


그림 7: 상쇄 정도에 따른 진자 주기 대 진폭의 수치 계산.

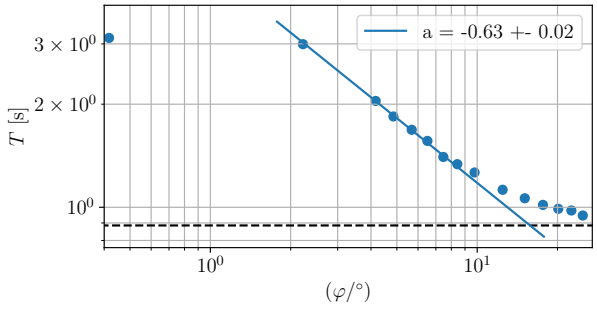


그림 8: 측정한 진자 주기 대 진폭.

- 작은 진폭에서는 주기가 일정하며, 불완전한 상쇄로 남은 작은 2차 퍼텐셜 항이 이를 정한다
- 중간 진폭 범위에서는 자기적 4차 퍼텐셜이 지배하여, 진폭 φ에 대해 이론적으로 $T(\varphi) \propto \varphi^{-1}$이 된다.
- 큰 진폭에서는 국소적인 자기 퍼텐셜의 영향이 작다. 주기는 교란 없는 진자의 주기에 가까워진다.

관련된 중간 진폭 범위의 넓이는 상쇄의 질에 달려 있으며, 이는 예를 들어 상쇄된 작은 진폭 주기와 자석 없는 작은 진폭 주기의 비 $T_0/T(\varphi = 0)$로 나타낼 수 있다.

4차 퍼텐셜이 어느 진폭 영역에서도 완전히 지배하지 않으므로, 실험에서는 대개 이론 지수 -1에 이르지 못한다. 거듭제곱 법칙의 최대 기울기 기댓값은 $T_0/T(\varphi = 0)$의 함수로 수치 계산할 수 있다(그림 9). (최댓값 둘레에서 진폭 2배에 걸쳐 평균한 지수는 이 최댓값에 매우 가깝다.)

그림 8의 데이터는 $T_0/T(\varphi = 0) = 4.08$에 해당하는 상쇄 정도에서 얻었다. 이 경우 예상 최대 지수는 -0.645(진폭 2배에 걸쳐 평균하면 -0.63)이다. 이는 진폭-주기 관계에서 가장 가파른 부분 둘레의 선형 회귀와 잘 맞는다.

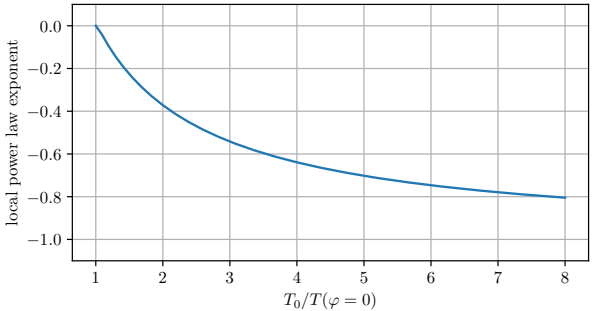


그림 9: ‘상쇄 정도’에 따른 거듭제곱 법칙의 최대 기울기.

E1.4 - 비선형 진자		**점수**
a)	**상쇄점**	**0.5**
	$d_{comp} = (83.3 \pm 2.0)$ mm의 수치 (4 mm 안이면 0.2)	0.5
b)	**진폭 의존성**	**1.5**
	진폭 값 2개마다 0.1 각 진폭 값에서 진동마다 0.1	0.4 0.3
	로그-로그 그래프 논의 (작은 진폭의 평탄 영역, 중간 진폭의 거듭제곱 법칙, 큰 진폭의 평탄 영역에 각각 0.1)	0.5 0.3
비선형 진자 합계		**2.0**