E1 - 압전 효과 - 풀이

과제 E.1 - 공의 탄성

탄성 η는 튀기 직전과 직후의 운동 에너지 비로 계산할 수 있다. 공기 저항이 작으므로 이 에너지들은 떨어뜨린 높이 h, 또는 튀어 오른 높이 h_b에 정비례한다. h나 h_b를 되도록 정밀하게 재려면 시차 오차를 줄이고, 자의 0점이 끝에서 비켜나 있다는 점을 고려하는 방법을 고안해야 한다. 아래에 그 방법 중 하나를 설명한다.

자를 못으로 받침대 날개 한쪽에 붙이고, (빨아들여) 공을 낙하 장치의 검은 관에 붙인 뒤, 매달린 공의 가장 낮은 점에서 자의 눈금을 읽는다. 이렇게 잰 양을 s라 하면, 바닥 나무의 두께(t = 4 mm)와 자 눈금의 시작 높이(z = 5 mm)를 통해 $h = s - t - z$로 h와 이어진다.

서로 다른 높이 4개에서 떨어뜨린 높이와 튀어 오른 높이를 기록하고, 높이마다 실험을 5번 반복한다. 일차 맞춤(그림 1)으로 기울기 $\gamma = (81 \pm 1)\% =: \eta$를 얻는다. 따라서 에너지 손실 비율 $1 - \eta$는 다음과 같다.

$$\frac{\Delta E}{E_0} = 1 - \eta = (19 \pm 1)\% \qquad (1)$$

이 과제의 틀에서, 높이마다 비를 계산해 이 4개 비의 평균을 내는 것도 맞는 방법이지만 덜 정밀하므로 부분 점수만 준다.

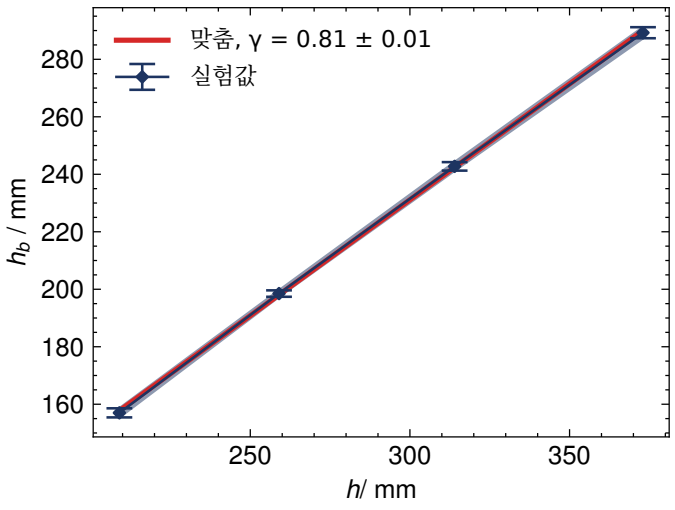


그림 1

E.1 - 공의 탄성		점수
a	**접근과 측정**	**0.9**
	튀어 오른 뒤 운동 에너지의 비율을 h_b/h로 구할 수 있다는 아이디어	0.3
	높이 쌍(h와 h_b) 3개마다 0.1, 최대 9쌍까지 (h가 같아도 됨)	0.3
	서로 다른 h 값마다 0.1, 최대 3개까지	0.3
b	**평가와 결과**	**1.1**
	그래프 평가 또는 계산기 맞춤 또는: 점별 평균으로 평가	0.5 or 0.3
	$1 - \eta$* 값이 0.19 ± 0.04 안 또는 $1 - \eta$ 값이 0.19 ± 0.06 안	0.6 or 0.3
E.1 합계		**2.0**

특수한 경우와 감점

* 학생이 $1 - \eta$ 대신 η를 계산해도 위 표에 따라 만점을 준다.

- **특수한 경우: 여러 번 튀기** 높이를 달리하며 공이 여러 번 튀는 데 걸리는 시간이나 튀기를 멈출 때까지의 전체 시간을 재는 것도 맞는 접근이다. 그 바탕 이론으로 η를 뽑아낼 수 있는 올바르게 선형화된 꼴을 보여야 하며, 그러면 이 접근으로도 만점을 받을 수 있다. 올바른 선형화 없이 이 접근을 택하면 처음 0.3점을 빼고 나머지는 보통대로 채점하므로, 총 1.7점까지 받을 수 있다.

과제 E.2 - 압전 특성

a) 축전기의 전기용량 축전기를 전지로 충전하고, 2 V 직류 전압 범위의 멀티미터에 연결한 뒤, 그림 2의 위쪽 스위치로 전지를 끊는다. 아래쪽 스위치가 없으면 스위치를 끊는 순간 초시계로 시간을 재기 시작한다. 아래쪽 스위치가 있으면 먼저 위쪽 스위치를 끊고, 아래쪽 스위치를 연결하는 순간부터 시간을 잰다.

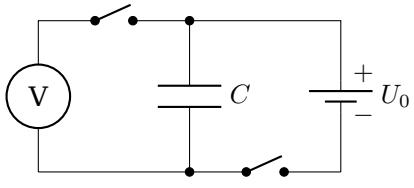


그림 2

이제 축전기는 전압계의 내부 저항(R_V = 11.1 MΩ)을 통해 방전한다. 5초마다 전압 눈금을 적는다(표 2 참고). 축전기의 방전은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\ln \frac{U(t)}{U_0} = -\frac{t}{R_V C} \qquad (2)$$

데이터를 그래프로 그리고 일차 함수로 맞춘 뒤 기울기에서 C를 계산한다(그림 3).

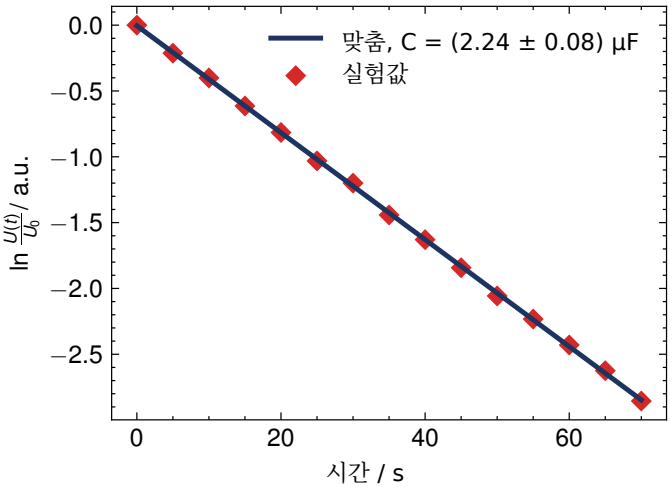


그림 3

최종적으로 얻는 전기용량은 다음과 같다.

$$C = (2.24 \pm 0.08)\mu\text{F} \tag{3}$$

E.2a - 전기용량		**점수**
a	**접근과 측정**	**0.9**
	전압계의 내부 저항으로 방전시킨다는 아이디어 (회로도로 나타냄!)	0.3
	축전기 전압의 지수 감쇠를 식 2와 동등하게 나타냄	0.2
	잰 시간 20 s마다 0.1, 최대 40 s까지	0.2
	데이터 점 (전압, 시간) 4개마다 0.1, 최대 8개까지	0.2
b	**평가와 결과**	**1.1**
	그래프 평가 또는 계산기 맞춤 또는 점별 평균	0.5 or 0.3
	C 값이 (2.28 ± 0.08) μF 안 또는 C 값이 (2.28 ± 0.12) μF 안	0.6 or 0.3
E.2a 합계		**2.0**

특수한 경우와 감점

- 이 채점 기준의 기준 전기용량은 축전기 약 *20*개의 평균이므로 식 *(3)*과 조금 다르다.
- 방전하는 동안 축전기에서 나가는 전체 전하 $q = \int V/R\ dt$를 계산할 수도 있다. 이 경우에도 위 표를 쓸 수 있으며*(*식 *2* 대신 $q = \int V/R\ dt$에 *0.2*를 줌*)*, 수치 적분이 그래프 평가를 대신한다.

b) 압전 소자의 전기용량 E.2a와 같은 측정 방법으로는 압전 소자가 너무 빨리 방전해 직접 방전 거동을 잴 수 없으므로, 압전 소자의 전기용량이 C보다 훨씬 작음을 알 수 있다. 그러나 주어진 스위치와 축전기로 전지로 압전 소자를 충전한 뒤 훨씬 큰 전기용량 C로 방전시키는 주기를 여러 번 거칠 수 있는 회로(그림 4)를 만들 수 있다.

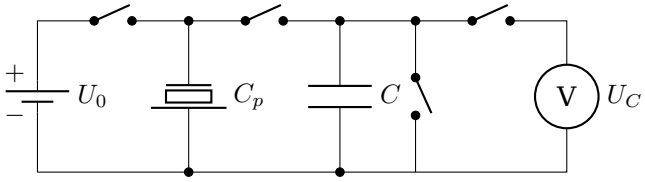


그림 4: 과제 E.2b의 회로도

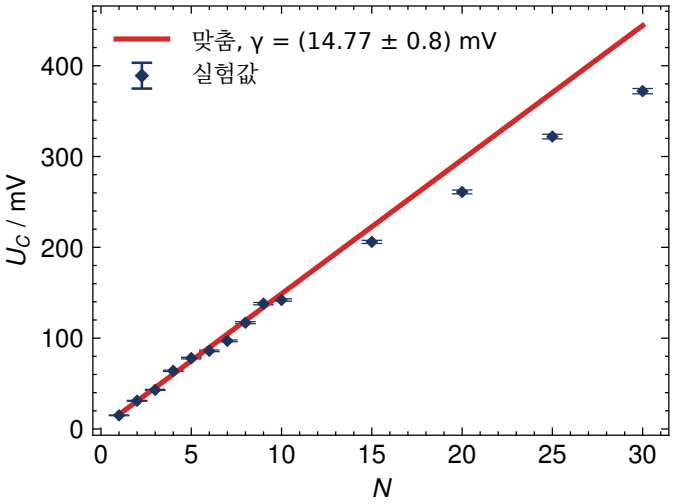


그림 5

여러 주기(10번 넘게)가 지난 뒤 스위치로 전압계를 연결해 축전기 전압 U_C를 잴 수 있다. 전압을 잴 때마다 C와 C_p를 모두 방전시키는 것이 중요하며, 이는 회로의 스위치 두 개를 더 써서 할 수 있다. 이제 축전기 전압을 충전 주기의 함수로 그릴 수 있다(그림 5).

자세한 유도 충전 주기를 여러 번 거치면 축전기 전압은 압전 소자를 충전하는 데 쓴 전압에 다가간다. 주기마다 축전기로 옮겨지는 전하량은 작아진다.

N번째 충전 주기 동안 축전기로 옮겨지는 전하를 구해 보자. 처음에 축전기 전압이 U_{N-1}, 즉 저장된 전하가 $Q_{N-1} = CU_{N-1}$이라 하자. 이제 전하 $Q_p = C_pU_0$를 저장한, 완전히 충전된 압전 소자를 연결한다. 둘을 연결하면 합친 계는 저장된 전하가 $Q_{N-1} + Q_p$이고 전기용량이 $C + C_p$인 하나의 축전기처럼 행동하므로, 축전기와 압전 소자 양단의 새 전압은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} U_N &= \frac{Q_{N-1} + Q_p}{C + C_p} \\ &= \frac{C}{C + C_p} U_{N-1} + \frac{C_p}{C + C_p} U_0 \,. \end{aligned} \tag{4}$$

전압이 포화되면 한 충전 주기의 변화는 무시할 수 있으므로 $U_N = U_{N-1}$이다. 이 경우 (4)는 $U_N = U_{N-1} = U_0$을 준다. 즉 전압은 압전 소자를 충전하는 데 쓴 전압에서 포화된다.

포화에서 멀리 떨어져 있다고, 즉 $U_N \ll U_0$이라 하자. (4)를 다음과 같이 고쳐 쓴다.

$$\frac{C}{C+C_p}(U_N - U_{N-1}) + \frac{C_p}{C+C_p}U_N = \frac{C_p}{C+C_p}U_0 \ . \qquad (5)$$

조건 $U_N \ll U_0$이면 다음과 같이 근사할 수 있다.

$$\frac{C}{C+C_p}(U_N - U_{N-1}) = \frac{C_p}{C+C_p}U_0 \ ,$$

이것의 간단한 선형 해는 다음과 같다.

$$U_N = N\frac{C_p U_0}{C} \ . \qquad (6)$$

이 선형 해는 $NC_p \ll C$일 때 좋은 근사이다. $U_0 \approx 1.405$ mV를 잰다. 이 선형 관계를 맞추면 C_p를 잴 수 있다. 여기서 그림 5의 맞춤으로 얻는 값은 다음과 같다.

$$C_p = (23.5 \pm 2.4)\text{nF} \qquad (7)$$

참고: 다음의 정밀한 계산은 만점을 받는 데 필요하지 않다. 점화식 (4)의 일반해는 다음과 같이 구할 수 있다. $X_N = U_0 - U_N$이라 하자. 이는 U_N이 포화값에서 떨어진 거리이다. 그러면 (5)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$X_N = \frac{C}{C+C_p}X_{N-1} \ .$$

처음 조건은 $U_0 = 0$이므로 $X_0 = U_0$이다. 그러면

$$X_N = \left(\frac{C}{C+C_p}\right)^N U_0 \ .$$

원래 변수로 돌아가면 다음을 얻는다.

$$U_N = U_0 - \left(\frac{C}{C+C_p}\right)^N U_0 \ . \qquad (8)$$

실제로 $N \to \infty$ 극한에서 이 결과는 앞에서 구한 포화값과 같은 값을 준다.

학생은 선형 모형 $U_N \propto N$으로 맞출 것으로 기대한다. 그러나 (8)을 쓰고 다음 식으로 맞춰도

$$\log\left(\frac{U_0 - U_N}{U_0}\right) = N\log\left(\frac{C}{C+C_p}\right), \qquad (9)$$

만점을 받는다.

E.2b - 압전 소자의 전기용량		**점수**
a	**접근과 측정**	**1.4**
	압전 소자를 충전하는 측정 방법 (회로도로 나타냄!)	0.1
	축전기로 방전시킴 (회로도로 나타냄!)	0.2
	정밀도를 높이려고 여러 번 반복한다는 아이디어 (여러 번 충전하는 아이디어)	0.4
	잰 2주기마다 0.1, 6주기까지, 그 뒤로는 잰 4주기마다 0.1, 10주기까지	0.4
	데이터 점마다 반복 1회당 0.1, 점마다 최대 3회	0.3
b	**평가와 결과**	**1.1**
	$NC_p \ll C$ 근사로 식 6을 얻고 15 충전 주기까지의 값만 고려 또는 식 6을 쓰고 20 충전 주기까지의 값만 고려 또는 식 8 같은 엄밀한 해를 임의의 측정 범위에 씀 (큰 주기 수도 허용)	0.5 or 0.3 or 0.5
	C_p 값이 (23.5 ± 3) nF 안 또는 C_p 값이 (23.5 ± 5) nF 안	0.6 or 0.3
E.2b 합계		**2.5**

특수한 경우와 감점

- U_0을 재지 않고 1.5 V로 가정했으면 −0.1
- 회로도를 내지 않았으면 측정 방법과 압전 소자를 축전기로 방전시키는 부분의 처음 0.3점을 뺀다.
- **압전 소자와 축전기를 병렬로 연결한 경우:** 꽤 흔했다. 학생이 과제 E.2a의 측정을 압전 소자와 축전기의 병렬 회로로 되풀이했다면(즉 전기용량의 합을 쟀다면), 상대 오차가 구하려는 값 정도가 되므로 여전히 매우 부정확한 측정 방법이다. 그러나 나머지를 모두 요구대로 했다면 다음 부분 점수를 받을 수 있다.
  - 측정 방법에 0.1
  - 축전기로 방전시키는 아이디어에 0
  - 여러 번 충전하는 주기에 0
  - 잰 주기 수에 0
  - 반복에 최대 0.3
  - 병렬 축전기를 쓰는 접근에 0.2
  - ±5 nF 범위의 올바른 값에 최대 0.3
  - 따라서 총 0.9점까지 줄 수 있다.
- **감점: 학생이 압전 소자를 전압계로 직접 방전시킨 경우** 학생이 (E.2a처럼) 전압계와 압전 소자로만 된 회로를 썼다면, 회로를 그렸을 때에 한해 과제 전체에서 처음 0.1점만 받고, 그렇지 않으면 0점이다.

c) 응답 함수 압전 전압을 힘의 함수로 재려고 그림 6과 같이 회로를 꾸미고 다음과 같이 작동시킨다.

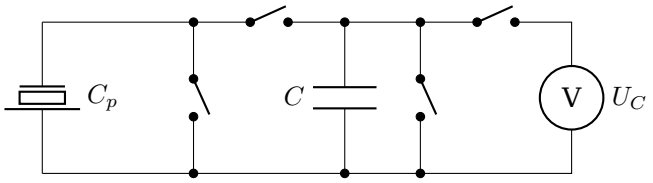


그림 6

축전기가 필요한 까닭은, 전압계를 압전 소자에 바로 연결하면 눈금을 읽기보다 빨리 방전하기 때문이다. 압전 소자를 저울에 올려놓고, 축전기와 잇는 스위치를 닫은 채로 저울을 누른다. 원하는 무게에 이르면 축전기를 떼어 내고 저울에서 무게를 뗀다. 하중을 받을 때의 전압이 축전기로 옮겨졌으므로 이제 전압계로 읽을 수 있다. 표시된 질량 값으로부터 $F = mg$로 힘을 계산하고, $C_p \ll C$를 써서 축전기 전압에 C/C_p를 곱하면 압전 전압을 얻는다. 요동을 가늠하고 평균값을 쓰려고 무게 값마다 측정을 5번 반복한다. 데이터는 표 4에 있다. 저울이 허용하는 힘 범위의 대부분을 쓰면 그림 7의 그래프를 얻는다.

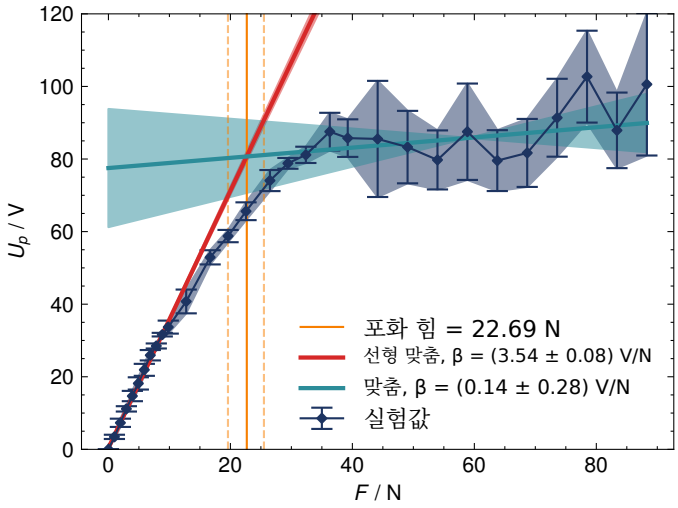


그림 7

F가 크면 전압은 잡음이 많아지고 포화되는 듯하다(다음 소과제 참고). 그러나 약 10 N까지는 의존성이 꽤 선형이다. 그 범위를 맞추면 압전 전압 계수를 얻는다.

$$\beta = (3.37 \pm 0.1)\text{V/N} \tag{10}$$

E.2c – 응답 함수		**점수**
a	**접근**	**0.9**
	압전 소자로 축전기를 충전한다는 아이디어	0.4
	그리고 그 뒤 전압계로 축전기 전압을 잼	0.1
	스위치로 압전 소자를 방전시킴 (회로도나 자세한 설명으로 나타냄!)	0.4
b	**측정** 측정마다 압전 소자를 방전시키지 않았거나, 압전 소자의 영점이 떠 있는 점이 뚜렷이 보이면 측정 점수를 절반으로 줌	**1.9** or **0.9**
	서로 다른 무게(힘) 값의 측정마다 0.05, 데이터 점 16개까지; 결과는 0.1 단위로 내림	0.8
	1 kg 폭의 무게 구간마다 데이터 점이 있으면 0.1, 6 kg까지	0.6
	데이터 점마다 반복 1회당 0.1 (측정 계열 전체의 평균 반복 횟수), 점마다 최대 5회	0.5
c	**평가와 결과**	**1.2**
	데이터 점을 정확히 그림	0.3
	선형 영역의 기울기를 그래프로 평가하거나 계산기로 맞춤, 또는 선형 영역의 점별 평균	0.4 or 0.2
	β 값이 (3.54 ± 0.2) V/N 안 또는 β 값이 (3.54 ± 0.4) V/N 안	0.5 or 0.3
E.2c 합계		**4.0**

특수한 경우와 감점

- 회로도를 내지 않았으면 접근의 처음 0.9점을 주지 않는다.
- 학생이 전압계만 써서 압전 전압을 직접 쟀다면, 압전 소자가 RC 시간 20 ms로 전압계를 통해 매우 빨리 방전하므로 결과를 믿을 수 없다. 따라서 이 접근은 매우 부정확하며 접근 점수는 주지 않는다(0/0.9). 측정에서는, 힘을 가한 뒤 순간 전압을 읽었고 **그리고** 그 결과가 주어진 힘에서 기대되는 값과 2.0배 넘게 다르지 않을 때만 점수의 50%(0.9/1.9)를 줄 수 있다. 평가와 결과 점수는 위 표에 따라 채점할 수 있다.

d) 포화 앞 과제에서 이미 충분히 큰 무게 값을 쟀다면 그 데이터를 그대로 쓸 수 있고, 아니면 이제 더 넓은 범위에서 데이터를 더 기록한다. 포화 영역의 잡음 때문에 점마다 여러 번 재서 평균하는 것이 중요하다. 포화점은 그림 7에서 보이듯이 작은 힘의 선형 영역과 포화 영역의 맞춤 함수가 만나는 점을 계산해 찾을 수 있다. 압전 소자의 넓이를 $A_p = \pi\, r_p^2 \approx 4.15{\cdot}10^{-4}$ m^{2}로 재었으므로 관련 값을 읽을 수 있다.

$$U_{sat} = (86 \pm 16)\text{V} \tag{11}$$

그리고

$$p_{sat} = F_{sat}/A_p = (55000 \pm 7000)\text{Pa} \tag{12}$$

따라서

$$\sigma_{max} = \frac{C_p U_{sat}}{A} = (4.9 \pm 0.9)\text{mC/m}^2 \qquad (13)$$

E.2d - 포화		**점수**
a	**접근과 측정**	**0.6**
	포화점을 양 끝 영역 맞춤 함수의 교점으로 정하는 방법 (그림 7의 데이터 사용)	0.4
	식 13의 공식	0.2
b	**평가와 결과**	**0.9**
	그래프 평가 또는 교점 계산	0.3
	U_{sat} 값이 (86 ± 25) V 안	0.2
	p_{sat} 값이 40 kPa에서 85 kPa 사이	0.2
	σ_{max} 값이 (4.9 ± 2) mC/m^2 안	0.2
E.2d 합계		**1.5**

특수한 경우와 감점

- E.2c에서 한 것 외에 추가 측정을 여기서 했다면 E-2c-b를 채점할 때 이를 고려한다.
- **흔한 경우** 포화를 그래프로 정하지 않고 그냥 누르면서 전압이 더 오르지 않는 힘을 어림했다면 다음 최댓값까지 점수를 줄 수 있다.
  - 평가 방법에 0.2/0.4 (원리적으로는 되지만 매우 부정확할 수 있으므로)
  - 공식을 썼으면 0.2
  - 그래프 평가에 0 - 상황을 올바르게 판단하려면 적어도 의미 있는 그래프 해석이 담긴 그래프(E.2c의 것이어도 됨)가 필요하다. 그것이 없으면(이 흔한 경우가 그렇다) 0이다.
  - 나머지 모든 값에 최대 3 × 0.2, 보통대로 채점.
  - 따라서 이 방법으로는 총 1.0/1.5점을 줄 수 있다.
- **감점:** E.2c에서 가한 힘에 대한 압전 전압 응답을 정량적으로 잴 방법이 없었다면(특히 E.2c를 하지 않았거나, 다른 것 없이 압전 소자에 바로 붙인 전압계로만 재려 했다면), 이 과제는 물리적으로 의미 있게 할 수 없으므로 언제나 0점이다.

과제 E.3 - 작은 넓이에서의 거동

과제 E.2c의 장치를 쓰되, 압전 소자의 표면 전체에 하중을 거는 대신 나무 막대로 합판 덮개의 구멍을 찔러 넣고 앞에서처럼 저울로 F_s를 잰다.

$U_p(F_s)$를 그리면(그림 8), E2.c와 거의 같은 의존성을 보이며 기울기 계수 β_s = (3.37 ± 0.1) V/N은 E2.c의 β와 거의 같다.

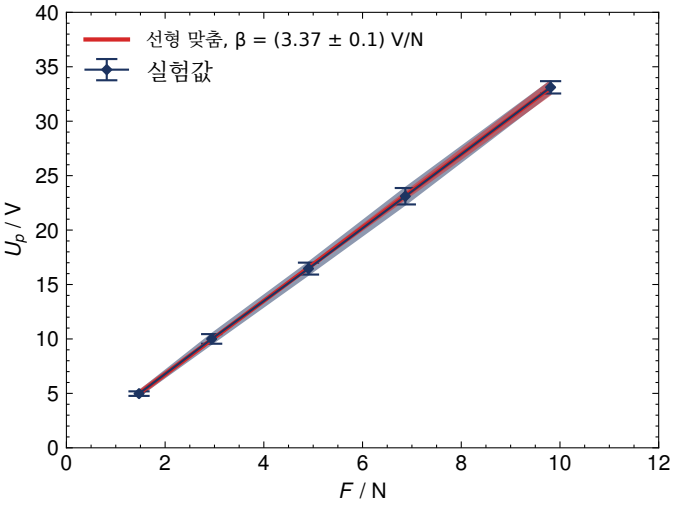


그림 8

넓이를 크게 제한해도 응답이 바뀌지 않는다는 것은 직관에 어긋나 보이는데, 압전 소자의 위 전극은 얇고 유연하기 때문이다. 이 실험에서 관찰하는 것은 다음과 같이 설명할 수 있다. 막대로 누르면 압전 소자 양단에 전압이 생기고, 이것이 결정 안에서 지름 방향의 기계적 응력을 만든다. 두꺼운 아래 전극은 결정 아랫부분이 지름 방향으로 수축하지 못하게 막는다. 한편 위 전극은 얇아서 나무판이 없다면 자유롭게 수축할 것이다. 그런 수축은 압전 결정을 그릇 모양으로 휘게 할 것이다. 나무 덮개판이 이를 막는다. 즉 기계적 응력은 압전 원판의 가장자리를 따라 커지고 누르는 점에서는 줄어든다. 그 결과 압력은 사실상 압전 결정 전체에 퍼진다. 따라서 이 부분의 정답은 응답에 뚜렷한 변화가 없다는 것이다.

E.3 - 작은 넓이 효과		**점수**
	막대를 구멍에 넣어 제한된 넓이에만 압력을 가한다는 아이디어	0.5
	여러 힘 값에서 U_p를 적절히 잼	0.3
	올바른 결과: 뚜렷한 변화 없음.	0.2
E.3 합계		**1.0**

특수한 경우와 감점

- **감점:** 막대를 구멍에 넣었다는 명시적인 그림이나 글 설명이 없으면, 측정이 이 부분에 의미 있다는 증거가 없으므로 해당 0.5점과 결과의 0.2점을 주지 않는다. 나무 덮개판의 더 작은 넓이에만 압력을 가한 접근도 마찬가지이다.
- U_p의 적절한 측정은 서로 다른 힘에서 적어도 세 점이 있어야 하며, 그 데이터로부터 기울기가 오차 범위 안에서 E.2c와 같다고 결론지을 수 있어야 한다(학생이 명시적으로 계산할 필요는 없다). 측정이 2개면 0.2점, 1개면 그래도 0.1점을 준다.
- **감점:** E2.c에서 가한 힘에 대한 압전 전압 응답을 재현성 있게 잴 방법이 없었다면(특히 E2.c를 하지 않았거나, 다른 것 없이 압전 소자에 바로 붙인 전압계로만 재려 했다면), 이 과제의 측정과 결론은 의미가 없다. 따라서 학생은

구멍으로 압력을 가한다는 아이디어에 대해 최대 0.5점만 받고 그 밖에는 받지 못한다. 그렇지 않으면 학생은 총 0점을 받는다.

과제 E.4 - 공의 변형

공을 압전 소자에 떨어뜨리면, 충돌 직전의 운동 에너지 일부는 탄성 변형으로 바뀌고 나머지는 열과 소리로 흩어진다. 변형이 최대인 점에서 운동 에너지는 0이고 공과 압전 소자에 걸리는 힘도 최대이다. 축전기에 납땜된 다이오드를 쓰면 전하가 거꾸로 흐르지 못하게 막아 측정하는 동안 최대 전압을 저장할 수 있다. 해당 회로도는 그림 9에 있다.

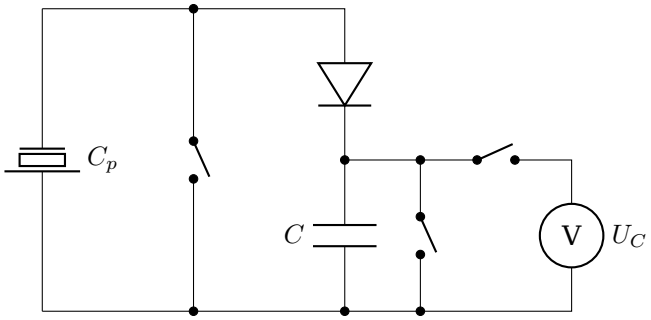


그림 9

공을 서로 다른 높이에서 압전 소자에 떨어뜨리면 충돌 전 운동 에너지가 달라진다. 매번 축전기에서 최대 전압을 읽고 C/C_p를 곱해 압전 전압으로 바꾼다. 여기에 과제 E.2c에서 구한 선형 기울기 β를 다시 곱하면 충돌 중 최대 힘 F_m을 얻는다. 이로써 처음 운동 에너지마다 최대 변형 x_m을 계산할 수 있다.

$$F = kx_m^{\alpha} \Rightarrow x_m = \left(\frac{F}{k}\right)^{1/\alpha} \tag{14}$$

힘을 적분해 충돌하는 동안 공이 이르는 최대 탄성 에너지를 구한다.

$$E_{elastic} = \int_0^{x_m} F(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1} k x_m^{\alpha+1} = \frac{k^{-1/\alpha}}{\alpha+1} F_m^{1+1/\alpha} \tag{15}$$

과제 E.1로부터, 높이 h에서 떨어뜨린 공의 탄성 에너지를 나타낼 수 있다.

$$E_{elastic} = \eta m g h \tag{16}$$

여기서 $m = (8 \pm 0.5)$ g은 저울로 잴 수 있다. 이를 써서 탄성 에너지를 최대 힘의 함수로 그릴 수 있다. 다만 이 선형 그래프(그림 10)는 학생에게 요구하지 않았으며, 여기서는 설명을 위해서만 보인다.

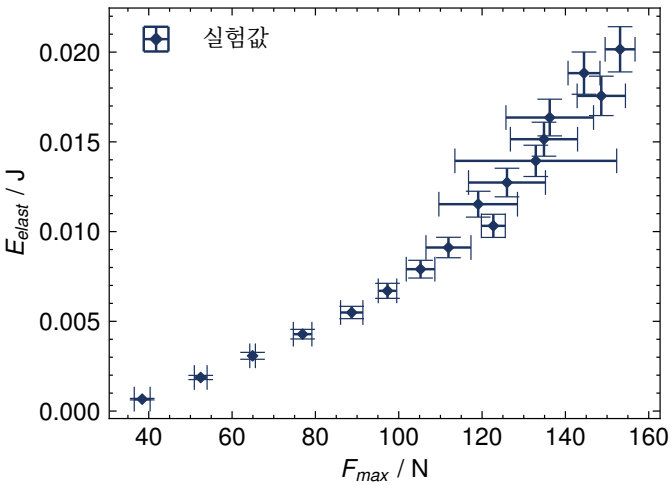


그림 10

F_m과 $E_{elastic}$ 모두에 로그를 취하면 일차 함수가 되며, 이를 그릴 수 있다(그림 11).

$$\ln E_{elastic} = \ln \frac{k^{-1/\alpha}}{\alpha+1} + \left(1+\frac{1}{\alpha}\right) \ln F_m \ . \tag{17}$$

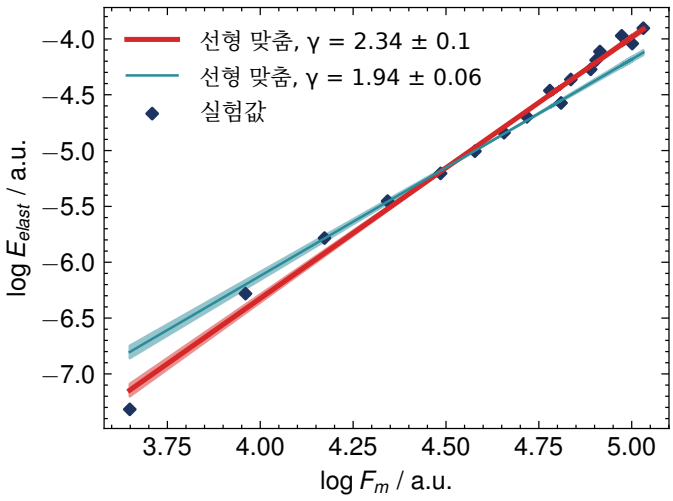


그림 11

기울기 γ를 뽑아내면 a 값은 다음과 같다.

$$\gamma = \left(1+\frac{1}{\alpha}\right) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\gamma - 1} \approx 0.75 \pm 0.06 \ , \tag{18}$$

더 올바른 방법은 범위 가운데의 깔끔하게 선형인 영역만 고려하는 것이다. 가장 왼쪽 데이터 점을 빼는 까닭은 바탕이 되는 높이 측정의 상대 불확도가 매우 낮기 때문이다. 가장 오른쪽 데이터 점들을 빼는 까닭은 힘-전압 곡선에 있다. 이미 포화 영역에 다가가기 시작하기 때문이다.

$$\gamma_2 = \approx 1.06 \pm 0.05 \ . \tag{19}$$

참고: 이 결과는 사실 놀랍다. 헤르츠 이론에 따르면 지수가

*3/2*일 것으로 기대했기 때문이다. 이것도 압전 소자가 판에 붙어 있다는 점과 관련된다. 결정이 그릇 모양이 되려 할 때 판이 공 쪽으로 조금 움직이므로, 공의 변형은 더 이상 충돌 중 공의 변위와 엄밀히 일치하지 않는다.

식 17을 쓰면 맞춤의 절편($y_0 = -15.7$)으로부터 k를 계산할 수 있다.

$$k = ((\exp y_0)(\alpha+1))^{-\alpha} \approx (84000 \pm 7000)\mathrm{N/m}^{\alpha} \qquad (20)$$

E.4 - 공의 변형		**점수**
a	**접근**	**1.5**
	다이오드와 축전기를 함께 써서 낙하 중 최대 압전 전압을 얻는다는 아이디어	0.5
	스위치로 압전 소자를 방전시킴 (회로도나 자세한 설명으로 나타냄!)	0.5
	낙하에서 탄성 운동 에너지 부분이 변형 에너지와 같다는 접근	0.5
b	**측정** 측정마다 압전 소자를 방전시키지 않았다면 점수를 절반으로 줌 (데이터 점의 전압 측정값이 기댓값 둘레에서 크게 요동하면 방전시키지 않은 것으로 봄)	**1.0** or **0.5**
	잰 높이 값 2개마다 0.1, 서로 다른 높이 값 8개까지	0.4
	잰 높이 범위 10 cm마다 0.1	0.3
	데이터 점마다 반복 1회당 0.1, 최대 3회	0.3
c	**평가와 결과**	**2.0**
	식 17과 동등한 선형화	0.8
	a와 k의 그래프 평가 또는 계산기 맞춤	0.7
	a 값이 1 ± 0.5 사이	0.3
	k 값이 (84000 ± 40000) N/m^a 사이	0.2
E.4 합계		**4.5**

특수한 경우와 감점

- 회로도를 내지 않았으면 다이오드를 쓴 측정 방법과 압전 소자를 축전기로 방전시키는 부분의 처음 *1.0*점을 뺀다.
- 압전 전압을 (축전기와 다이오드 없이) 전압계로 직접 쟀다면 데이터를 쓸 수 없다. 따라서 접근의 처음 *0.5 + 0.5*점을 줄 수 없고, 측정한 데이터에도 점수를 주지 않는다. 그러나 평가 부분은, 이 쓸 수 없는 데이터로 했더라도 올바른 평가 방법을 썼다면 점수를 빼지 않는다.

과제 E.5 - 상호작용 시간

덜 탄성적인 공이 튈 때 운동량 변화 Δp_1은 다음과 같이 어림할 수 있다.

$$\Delta p_1 = \int_t F_1(t)\mathrm{d}t = \frac{a_1}{b_1}\int f(t)\mathrm{d}t \propto F_{1\,\max}\tau_1,$$

여기서 $F_{1\ max} = a_1 F_{0\ max}$는 충돌 중 최대 힘이고, $\tau_1 \approx \tau_0/b_1$은 상호작용 시간이다.

다시 말해,

$$\frac{\Delta p_1}{\Delta p_0} = \frac{v_1}{v_0} = \frac{F_{1\,\max}}{F_{0\,\max}} \cdot \frac{\tau_1}{\tau_0}.$$

$v_1/v_0 = \sqrt{(h_1/h_0)}$와 $F_{1\ max}/F_{0\ max} = U_1/U_0$를 재면 시간 배율 τ_1/τ_0을 어림할 수 있다.

$$\frac{U_1}{U_0} = \frac{\tau_1}{\tau_0} \cdot \frac{\sqrt{h_1}}{\sqrt{h_0}}, \qquad \text{or} \qquad \tau \propto \frac{U}{\sqrt{h}}$$

측정값은 표 7에 있다. $U/\sqrt{(h_1)}$을 $\sqrt{(h_1)}$에 대해 그리면 측정 오차 안에서 수평임을 알 수 있다(그림 12). 다시 말해 τ는 이 힘 범위 안에서 크게 변하지 않는다.

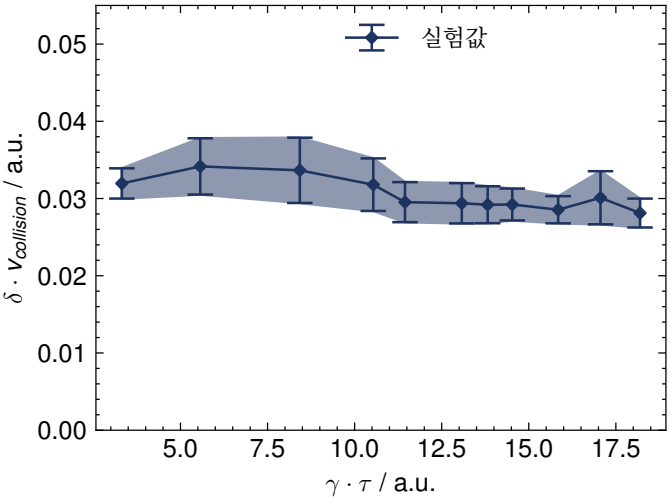


그림 12

E.5 - 상호작용 시간		**점수**
	이론	**0.5**
	a_1/b_1이 v에 어떻게 의존하는지 구함	0.3
	잴 수 있는 비로 나타냄	0.2
	측정과 그래프	**1.5**
	잰 힘 값마다 0.1, 서로 다른 힘 값 7개까지	0.7
	데이터 점마다 반복 1회당 0.1, 최대 3회	0.3
	그래프	0.2
	좌표가 이론과 관련됨	0.3
	결론 (τ가 v에 의존하지 않음)	**0.5**
E.5 합계		**2.5**

실험 일반 채점 기준

채점 일반 지침

- 사소한 실수(부호, 2배 인자, 결과의 역수 등)는 한 번만 −0.1점을 빼고, 실수를 고친 것처럼 나머지 과제를 채점한다 (오류 전파에 대한 감점 없음). 수치 결과도 마찬가지다.
- 측정 방법이 부족해 그래프를 그린 데이터의 질이 낮더라도, 데이터 점을 표의 데이터대로 올바르게 찍었다면 그래프 점수는 깎지 않는다.

E.1 - 공의 탄성		**점수**
a	**접근과 측정**	**0.9**
	튀어 오른 뒤 운동 에너지의 비율을 h_b/h로 구할 수 있다는 아이디어	0.3
	높이 쌍(h와 h_b) 3개마다 0.1, 최대 9쌍까지 (h가 같아도 됨)	0.3
	서로 다른 h 값마다 0.1, 최대 3개까지	0.3
b	**평가와 결과**	**1.1**
	그래프 평가 또는 계산기 맞춤 또는: 점별 평균으로 평가	0.5 or 0.3
	$1-\eta$* 값이 0.19 ± 0.04 안 또는 $1-\eta$ 값이 0.19 ± 0.06 안	0.6 or 0.3
E.1 합계		**2.0**

특수한 경우와 감점

* 학생이 $1-\eta$ 대신 η를 계산해도 위 표에 따라 만점을 준다.

- **특수한 경우: 여러 번 튀기** 높이를 달리하며 공이 여러 번 튀는 데 걸리는 시간이나 튀기를 멈출 때까지의 전체 시간을 재는 것도 맞는 접근이다. 그 바탕 이론으로 η를 뽑아낼 수 있는 올바르게 선형화된 꼴을 보여야 하며, 그러면 이 접근으로도 만점을 받을 수 있다. 올바른 선형화 없이 이 접근을 택하면 처음 0.3점을 빼고 나머지는 보통대로 채점하므로, 총 1.7점까지 받을 수 있다.

E.2a - 전기용량		**점수**
a	**접근과 측정**	**0.9**
	전압계의 내부 저항으로 방전시킨다는 아이디어 (회로도로 나타냄!)	0.3
	축전기 전압의 지수 감쇠를 식 2와 동등하게 나타냄	0.2
	잰 시간 20 s마다 0.1, 최대 40 s까지	0.2
	데이터 점 (전압, 시간) 4개마다 0.1, 최대 8개까지	0.2
b	**평가와 결과**	**1.1**
	그래프 평가 또는 계산기 맞춤 또는 점별 평균	0.5 or 0.3
	C 값이 (2.28 ± 0.08) µF 안 또는 C 값이 (2.28 ± 0.12) µF 안	0.6 or 0.3
E.2a 합계		**2.0**

특수한 경우와 감점

- 이 채점 기준의 기준 전기용량은 축전기 약 20개의 평균이므로 식 (3)과 조금 다르다.
- 방전하는 동안 축전기에서 나가는 전체 전하 $q = \int V/R \, dt$를 계산할 수도 있다. 이 경우에도 위 표를 쓸 수 있으며(식 2 대신 $q = \int V/R \, dt$에 0.2를 줌), 수치 적분이 그래프 평가를 대신한다.

E.2b - 압전 소자의 전기용량		**점수**
a	**접근과 측정**	**1.4**
	압전 소자를 충전하는 측정 방법 (회로도로 나타냄!)	0.1
	축전기로 방전시킴 (회로도로 나타냄!)	0.2
	정밀도를 높이려고 여러 번 반복한다는 아이디어 (여러 번 충전하는 아이디어)	0.4
	잰 2주기마다 0.1, 6주기까지, 그 뒤로는 잰 4주기마다 0.1, 10주기까지	0.4
	데이터 점마다 반복 1회당 0.1, 점마다 최대 3회	0.3
b	**평가와 결과**	**1.1**
	$NC_p \ll C$ 근사로 식 6을 얻고 15 충전 주기까지의 값만 고려 또는 식 6을 쓰고 20 충전 주기까지의 값만 고려 또는 식 8 같은 엄밀한 해를 임의의 측정 범위에 씀 (큰 주기 수도 허용)	0.5 or 0.3 or 0.5
	C_p 값이 (23.5 ± 3) nF 안 또는 C_p 값이 (23.5 ± 5) nF 안	0.6 or 0.3
E.2b 합계		**2.5**

특수한 경우와 감점

- U_0을 재지 않고 1.5 V로 가정했으면 −0.1
- 회로도를 내지 않았으면 측정 방법과 압전 소자를 축전기로 방전시키는 부분의 처음 0.3점을 뺀다.
- **압전 소자와 축전기를 병렬로 연결한 경우:** 꽤 흔했다. 학생이 과제 E.2a의 측정을 압전 소자와 축전기의 병렬 회로로 되풀이했다면(즉 전기용량의 합을 쟀다면), 상대 오차가 구하려는 값 정도가 되므로 여전히 매우 부정확한 측정 방법이다. 그러나 나머지를 모두 요구대로 했다면 다음 부분 점수를 받을 수 있다.
  - 측정 방법에 0.1
  - 축전기로 방전시키는 아이디어에 0
  - 여러 번 충전하는 주기에 0
  - 잰 주기 수에 0
  - 반복에 최대 0.3
  - 병렬 축전기를 쓰는 접근에 0.2
  - ±5 nF 범위의 올바른 값에 최대 0.3
  - 따라서 총 0.9점까지 줄 수 있다.
- **감점: 학생이 압전 소자를 전압계로 직접 방전시킨 경우** 학생이 (E.2a처럼) 전압계와 압전 소자로만 된 회로를 썼다면, 회로를 그렸을 때에 한해 과제 전체에서 처음 0.1점만 받고, 그렇지 않으면 0점이다.

E.2c – 응답 함수		**점수**
a	**접근**	**0.9**
	압전 소자로 축전기를 충전한다는 아이디어	0.4
	그리고 그 뒤 전압계로 축전기 전압을 잼	0.1
	스위치로 압전 소자를 방전시킴 (회로도나 자세한 설명으로 나타냄!)	0.4
b	**측정** 측정마다 압전 소자를 방전시키지 않았거나, 압전 소자의 영점이 떠 있는 점이 뚜렷이 보이면 측정 점수를 절반으로 줌	**1.9** or **0.9**
	서로 다른 무게(힘) 값의 측정마다 0.05, 데이터 점 16개까지; 결과는 0.1 단위로 내림	0.8
	1 kg 폭의 무게 구간마다 데이터 점이 있으면 0.1, 6 kg까지	0.6
	데이터 점마다 반복 1회당 0.1 (측정 계열 전체의 평균 반복 횟수), 점마다 최대 5회	0.5
c	**평가와 결과**	**1.2**
	데이터 점을 정확히 그림	0.3
	선형 영역의 기울기를 그래프로 평가하거나 계산기로 맞춤, 또는 선형 영역의 점별 평균	0.4 or 0.2
	β 값이 (3.54 ± 0.2) V/N 안 또는 β 값이 (3.54 ± 0.4) V/N 안	0.5 or 0.3
E.2c 합계		**4.0**

특수한 경우와 감점

- 회로도를 내지 않았으면 접근의 처음 0.9점을 주지 않는다.
- 학생이 전압계만 써서 압전 전압을 직접 쟀다면, 압전 소자가 RC 시간 20 ms로 전압계를 통해 매우 빨리 방전하므로 결과를 믿을 수 없다. 따라서 이 접근은 매우 부정확하며 접근 점수는 주지 않는다(0/0.9). 측정에서는, 힘을 가한 뒤 순간 전압을 읽었고 **그리고** 그 결과가 주어진 힘에서 기대되는 값과 2.0배 넘게 다르지 않을 때만 점수의 50%(0.9/1.9)를 줄 수 있다. 평가와 결과 점수는 위 표에 따라 채점할 수 있다.

E.2d – 포화		**점수**
a	**접근과 측정**	**0.6**
	포화점을 양 끝 영역 맞춤 함수의 교점으로 정하는 방법 (그림 7의 데이터 사용)	0.4
	식 13의 공식	0.2
b	**평가와 결과**	**0.9**
	그래프 평가 또는 교점 계산	0.3
	U_{sat} 값이 (86 ± 25) V 안	0.2
	p_{sat} 값이 40 kPa에서 85 kPa 사이	0.2
	σ_{max} 값이 (4.9 ± 2) mC/m^2 안	0.2
E.2d 합계		**1.5**

특수한 경우와 감점

- E.2c에서 한 것 외에 추가 측정을 여기서 했다면 E-2c-b를 채점할 때 이를 고려한다.
- **흔한 경우** 포화를 그래프로 정하지 않고 그냥 누르면서 전압이 더 오르지 않는 힘을 어림했다면 다음 최댓값까지 점수를 줄 수 있다.
  - 평가 방법에 0.2/0.4 (원리적으로는 되지만 매우 부정확할 수 있으므로)
  - 공식을 썼으면 0.2
  - 그래프 평가에 0 - 상황을 올바르게 판단하려면 적어도 의미 있는 그래프 해석이 담긴 그래프(E.2c의 것이어도 됨)가 필요하다. 그것이 없으면(이 흔한 경우가 그렇다) 0이다.
  - 나머지 모든 값에 최대 3 × 0.2, 보통대로 채점.
  - 따라서 이 방법으로는 총 1.0/1.5점을 줄 수 있다.
- **감점:** E.2c에서 가한 힘에 대한 압전 전압 응답을 정량적으로 잴 방법이 없었다면(특히 E.2c를 하지 않았거나, 다른 것 없이 압전 소자에 바로 붙인 전압계로만 재려 했다면), 이 과제는 물리적으로 의미 있게 할 수 없으므로 언제나 0점이다.

E.3 – 작은 넓이 효과		**점수**
	막대를 구멍에 넣어 제한된 넓이에만 압력을 가한다는 아이디어	0.5
	여러 힘 값에서 U_p를 적절히 잼	0.3
	올바른 결과: 뚜렷한 변화 없음.	0.2
E.3 합계		**1.0**

특수한 경우와 감점

- **감점:** 막대를 구멍에 넣었다는 명시적인 그림이나 글 설명이 없으면, 측정이 이 부분에 의미 있다는 증거가 없으므로 해당 0.5점과 결과의 0.2점을 주지 않는다. 나무 덮개판의 더 작은 넓이에만 압력을 가한 접근도 마찬가지이다.
- U_p의 적절한 측정은 서로 다른 힘에서 적어도 세 점이 있어야 하며, 그 데이터로부터 기울기가 오차 범위 안에서 E.2c와 같다고 결론지을 수 있어야 한다(학생이 명시적으로 계산할 필요는 없다). 측정이 2개면 0.2점, 1개면 그래도 0.1점을 준다.
- **감점:** E2.c에서 가한 힘에 대한 압전 전압 응답을 재현성 있게 잴 방법이 없었다면(특히 E2.c를 하지 않았거나, 다른 것 없이 압전 소자에 바로 붙인 전압계로만 재려 했다면), 이 과제의 측정과 결론은 의미가 없다. 따라서 학생은 구멍으로 압력을 가한다는 아이디어에 대해 최대 0.5점만 받고 그 밖에는 받지 못한다. 그렇지 않으면 학생은 총 0점을 받는다.

E.4 – 공의 변형		**점수**
a	**접근**	**1.5**
	다이오드와 축전기를 함께 써서 낙하 중 최대 압전 전압을 얻는다는 아이디어	0.5
	스위치로 압전 소자를 방전시킴 (회로도나 자세한 설명으로 나타냄!)	0.5
	낙하에서 탄성 운동 에너지 부분이 변형 에너지와 같다는 접근	0.5
b	**측정** 측정마다 압전 소자를 방전시키지 않았다면 점수를 절반으로 줌 (데이터 점의 전압 측정값이 기댓값 둘레에서 크게 요동하면 방전시키지 않은 것으로 봄)	**1.0** or **0.5**
	잰 높이 값 2개마다 0.1, 서로 다른 높이 값 8개까지	0.4
	잰 높이 범위 10 cm마다 0.1	0.3
	데이터 점마다 반복 1회당 0.1, 최대 3회	0.3
c	**평가와 결과**	**2.0**
	식 17과 동등한 선형화	0.8
	a와 k의 그래프 평가 또는 계산기 맞춤	0.7
	a 값이 1 ± 0.5 사이	0.3
	k 값이 (84000 ± 40000) N/m^a 사이	0.2
E.4 합계		**4.5**

특수한 경우와 감점

- 회로도를 내지 않았으면 다이오드를 쓴 측정 방법과 압전 소자를 축전기로 방전시키는 부분의 처음 1.0점을 뺀다.
- 압전 전압을 (축전기와 다이오드 없이) 전압계로 직접 쟀다면 데이터를 쓸 수 없다. 따라서 접근의 처음 0.5 + 0.5점을 줄 수 없고, 측정한 데이터에도 점수를 주지 않는다. 그러나 평가 부분은, 이 쓸 수 없는 데이터로 했더라도 올바른 평가 방법을 썼다면 점수를 빼지 않는다.

E.5 – 상호작용 시간		**점수**
	이론	**0.5**
	a_1/b_1이 v에 어떻게 의존하는지 구함	0.3
	잴 수 있는 비로 나타냄	0.2
	측정과 그래프	**1.5**
	잰 힘 값마다 0.1, 서로 다른 힘 값 7개까지	0.7
	데이터 점마다 반복 1회당 0.1, 최대 3회	0.3
	그래프	0.2
	좌표가 이론과 관련됨	0.3
	결론 (τ가 v에 의존하지 않음)	**0.5**
E.5 합계		**2.5**

원시 데이터 표

표 1: 과제 1의 데이터

S	364	305	250	200
$s1$	286	237	195	152
$s2$	286	241	193	151
$s3$	287	239	194	154
$s4$	282	238	196	155
$s5$	286	237	193	155
h	373	314	259	209
$h1$	290	241	199	156
$h2$	290	245	197	155
$h3$	291	243	198	158
$h4$	286	242	200	159
$h5$	290	241	197	159

표 2: 과제 2a의 데이터

U	t
mV	s
1408	0
1138	5
943	10
762	15
623	20
502	25
424	30
333	35
276	40
223	45
180	50
151	55
124	60
102	65
81	70

표 3: 과제 2b의 데이터

충전	U_c
	mV
1	15
2	31
3	43
4	64
5	78
6	86
7	97
8	117
9	138
10	142
15	206
20	261
25	322
30	372

표 4: 과제 2c의 데이터

m	$U1$	$U2$	$U3$	$U4$	$U5$
kg	mV	mV	mV	mV	mV
0.0	0	0	0	0	0
0.1	30	34	39	42	37
0.2	63	78	87	82	77
0.3	126	110	119	119	116
0.4	142	173	153	156	153
0.5	176	206	187	186	206
0.6	240	224	216	249	230
0.7	286	285	259	270	272
0.8	304	295	306	306	296
0.9	335	328	337	338	334
1.0	367	346	373	357	339
1.3	429	390	447	432	458
1.7	557	576	550	541	575
2.0	620	629	625	635	600
2.3	702	711	711	676	671
2.7	812	798	759	762	787
3.0	823	847	820	838	841
3.3	856	855	840	888	854
3.7	994	911	926	916	884
4.0	977	881	881	887	911
4.5	1060	1024	830	799	812
5.0	977	918	852	893	766
5.5	954	817	789	820	839
6.0	802	890	907	1089	942
6.5	892	736	836	903	842
7.0	985	867	859	815	795
7.5	984	968	833	1068	981
8.0	1110	993	1247	1022	1061
8.5	988	814	971	1003	874
9.0	1181	1267	944	1022	907

표 5: 과제 3의 데이터

m	$U1$	$U2$	$U3$	$U4$	$U5$	$U6$
kg	mV	mV	mV	mV	mV	mV
0.15	52	50	49	55	52	56
0.3	105	102	98	109	111	110
0.5	175	178	166	184	170	172
0.7	245	250	258	233	242	239
1.0	355	340	354	351	345	357

표 6: 과제 4의 데이터

S	h	$U1$	$U2$	$U3$	$U4$	$U5$
mm	mm	mV	mV	mV	mV	mV
363	334	437	411	410	424	422
341	312	399	395	380	398	413
320	291	411	414	414	378	425
300	271	337	358	423	385	369
280	251	356	345	393	401	358
260	231	320	311	361	461	373
240	211	303	364	361	332	371
220	191	315	340	329	287	365
200	171	332	326	336	345	347
180	151	305	322	280	316	315
160	131	297	297	284	295	273
140	111	276	271	269	260	261
120	91	253	238	235	241	252
100	71	215	203	205	217	217
80	51	178	177	176	180	181
60	31	150	141	138	146	146
40	11	103	103	116	102	104

표 7: 과제 5의 데이터

S	h	$U1$	$U2$	$U3$	$U4$	$U5$
mm	mm	mV	mV	mV	mV	mV
40	11	106	103	103	104	103
60	31	162	175	153	172	153
100	71	240	252	227	249	284
140	111	320	312	367	328	330
160	131	399	387	361	388	403
200	171	456	450	451	457	411
220	191	464	485	484	486	448
240	211	482	494	514	497	498
280	251	554	555	567	549	550
320	291	606	602	507	569	550
360	331	660	628	645	652	650