E1 - 풀이

‘뉴런’이라는 용어는, 입력 말단(변수 x_i)에 들어온 자극의 합(z)에 따라 신경을 따라 전기화학 신호(변수 y)를 전달하는 신경계 세포에 빗대어 붙인 것이다. 인공 뉴런과 인공 신경망의 이론은 기본 물리 개념과 매우 닮은 방식으로 발전해 왔다. 이를 인정하여 2024년 노벨 물리학상은 John J. Hopfield와 Geoffrey E. Hinton에게 “인공 신경망으로 기계 학습을 가능하게 한 기초적인 발견과 발명”의 공로로 주어졌다. 인공 뉴런은 역학적, 전기적, 광학적 신호를 변환하는 실제 물리계일 수도 있다.

과제 1

멀티미터를 저항계 모드로 하여 A-가변 저항의 출력 단자 세 쌍에 차례로 연결한다. 가변 저항의 손잡이를 돌려 각 쌍의 최대·최소 저항을 잰다.

단자:	$R_{\min}(\Omega)$	$R_{\max}(\Omega)$
A1-A2	1000	1000
A1-A3	222	1222
A2-A3	222	1222

부하 저항이 A1이나 A2에 연결되어 있다면 A1-A3과 A2-A3 쌍의 $R_{\min}$은 0에 가까워야 하는데, 측정은 그렇지 않다. 따라서 부하 저항은 A3과 가변 저항의 슬라이더 사이에 연결되어 있다. 이 경우 A1-A3과 A2-A3 쌍 모두 $R_{\min} = R_L$, $R_{\max} = R_P + R_L$이므로

$$R_L = 222\,\Omega \quad R_P = 1000\,\Omega$$

	과제 1	점수
A	세 단자 쌍 사이의 저항을 쟀다고 쓰거나 그림으로 보임.	0.2
	저항의 결과:	
B	$R_P \approx 1000\,\Omega \pm 120\,\Omega$	0.1
C	$R_L \approx 220\,\Omega \pm 6\,\Omega$	0.1
D	저항이 단자 3에 연결되어 있다고 결론지음.	0.1
	과제 1 합계	0.5

과제 2

필요한 연결은 그림 1과 같다.

	과제 2	점수
A	가변 저항이 X1과 X2에 연결됨	0.2
	접지와 전원에 올바르게 연결됨	0.3
	잘못된 연결마다 -0.1 X1 / X2가 A1/A2에, V+와 GND가 가변 저항의 나머지 단자에 연결된 특정한 경우에는 -0.2 고정 감점. 이 구성은 입력 전압을 제한된 범위(0 V - 2.67 V)에서만 바꿀 수 있다.	
	가변 저항의 단자 2개만 연결했으면 -0.5	
	과제 2 합계	0.5

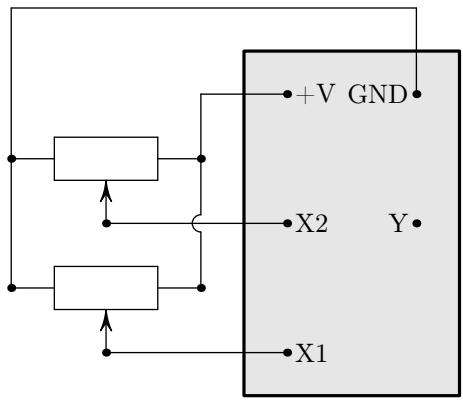


그림 1: 과제 2의 올바른 구성

과제 3

가변 저항의 손잡이를 돌려 보면 입력 전압이 0 V와 ≈ 3.25 V 사이에서 서로 독립적으로 바뀜을 확인할 수 있다(상자 안의 보호 회로 때문에 회로를 연결하면 이 전압이 조금 줄어든다). 따라서 입력 전압의 어떤 조합이든 그림 2처럼 $x_1 - x_2$ 평면의 색칠된 정사각형 안의 한 점에 대응시킬 수 있다. 출력 전압이 일정한 점들은

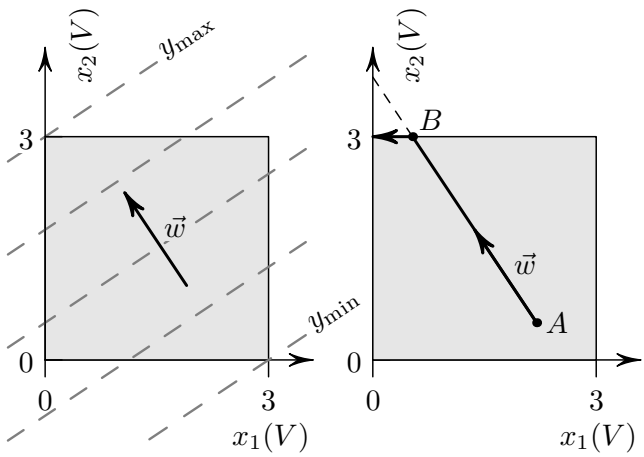


그림 2: 과제 3

$x_1(V)$	$x_2(V)$	$y(V)$
0.00	0.00	2.30
3.15	0.00	1.15
3.15	3.15	2.56
0.00	3.15	2.73

표 1: 꼭짓점에서의 출력 전압

다음 식을 만족한다.

$$w_1 x_1 + w_2 x_2 + b = const,$$

이는 벡터 $\boldsymbol{w} = (w_1,\, w_2)$에 수직인 평행 직선족을 정의한다(그림 2의 점선). 어떤 가중치에 대해서든 최대 전압 $y_{\max}$와 최소 전압 $y_{\min}$은 언제나 직사각형의 꼭짓점에서 나타남이 분명하다. 따라서 최대 전압 $y_{\max}$를 정하려면 모서리 세 곳만 재면 된다. 먼저 이웃한 두 모서리를 잰다. 그러면 이 둘을 잇는 변을 따라 최댓값을 찾을 수 있다. 전압이 더 높은 모서리에서 그 모서리의 다른 변을 따라 세 번째 모서리로 간다. 네 번째 모서리는 세 번째로 잰 모서리보다 낮아야 하므로, 이로써 가장 높은 전압을 정할 수 있다. 표 1은 네 꼭짓점에서 잰 출력 전압을 정리한 것이다. 출력 전압의 최댓값은

$$y_{\max} = 2.73\,\mathrm{V}$$

이며, 이에 해당하는 입력 전압은 다음과 같다.

$$x_1 = 0.00\,\mathrm{V}; \quad x_2 = 3.15\,\mathrm{V}.$$

	과제 3	점수
A	$y_{\max}$를 얻는 데 세 번의 측정으로 충분하다는 전략 네 번 측정하면 감점 네 번 넘게 측정하면 점수 없음 **참고:** x_i의 손잡이를 돌리며 y의 변화를 보는 것은 x_i마다 적어도 2번의 측정으로 센다. x_1의 손잡이를 조금 돌리고 이어서 x_2의 손잡이를 돌려 w_i의 부호를 결론지은 뒤에야 $y_{\max}$에 이르도록 입력을 맞추는 풀이는 적어도 5번의 측정으로 세며, 여기서는 점수를 주지 않는다.	0.7 -0.3
B C	측정의 아래 한계 < 0.02 V 측정의 위 한계 > 3 V 참고: 이 0.1 + 0.2점을 받으려면 학생은 x_1과 x_2의 입력 값을 명시적으로 적거나, 적어도 GND나 +V에 바로 연결했다면 그렇다고 적어야 한다.	0.1 0.2
D	측정마다 0.1, 최대 0.3	0.3
E	$y_{\max}$ = 2.73 V ± 0.04 V의 값 유효숫자가 셋보다 많으면 감점 유효숫자가 하나뿐이면 감점	0.2 -0.2 -0.2
	과제 3 합계	1.5

과제 4

세 매개변수는 입력 전압 하나를 일정하게 두고 다른 입력 전압을 바꾸면서 출력 전압을 재는 측정 두 계열로 정할 수 있다. 출력 전압의 x_1과 x_2에 대한 의존성은 y를 보조 변수로 바꾸어 선형화할 수 있다.

$$z = \ln \frac{y}{A - y} \approx \ln \frac{y}{y_{\max} - y} \tag{1}$$

왜냐하면

$$z = w_1 x_1 + w_2 x_2 + b \tag{2}$$

식 (1)에서 미지의 A를 $y_{\max}$로 근사하면 계산한 z 값에 큰 계통 오차가 생기므로 최대 출력 전압에 가까운 측정은 피해야 한다. 따라서 알맞은 측정은 x_1, x_2 평면의 경로 (0, 0)–(3, 0)–(3, 3) V를 따르는 것이다. 표 2와 3은 각각 선 (0, 0)–(3, 0) V와 (3, 0)–(3, 3) V를 따라 잰 결과를 정리한 것이다. (1)로 계산한 변수 z의 값은 표의 마지막 열에 있다. 그림 3은 표 2의 데이터를 변수 z와 x_1으로 나타내고 일차 맞춤을 함께 그린 것이다. 가중치 w_1은 맞춤 직선의 기울기에 해당한다.

$$w_1 = \frac{\Delta z}{\Delta x_1} = -0.62\,\mathrm{V}^{-1} \tag{3}$$

x_2 = 0.00 V이므로, 바이어스 b는 맞춤 직선이 z축과 만나는 점으로 어림할 수 있다.

$$b = 1.67 \tag{4}$$

$x_1(V)$	$y(V)$	z
0.00	2.31	1.68
0.26	2.24	1.50
0.59	2.15	1.29
0.83	2.08	1.15
1.09	2.00	0.99
1.32	1.92	0.85
1.72	1.76	0.59
1.98	1.65	0.41
2.20	1.57	0.29
2.53	1.44	0.10
2.88	1.29	-0.12
3.02	1.23	-0.21

표 2: x_2 = 0.00 V에서의 측정

$x_2(V)$	$y(V)$	z
0.00	1.23	-0.21
0.22	1.38	0.01
0.51	1.56	0.28
0.81	1.74	0.55
1.06	1.88	0.78
1.37	2.04	1.07
1.75	2.21	1.43
1.99	2.30	1.65
2.22	2.38	1.89
2.53	2.47	2.21
2.74	2.52	2.44
3.02	2.57	2.72

표 3: x_1 = 3.02 V에서의 측정

표 3의 z와 x_2 데이터와 그 일차 맞춤을 그림 4에 나타냈다. 맞춤 직선의 기울기가 가중치 w_2를 준다.

$$w_2 = \frac{\Delta z}{\Delta x_2} = 0.96\,\mathrm{V}^{-1} \tag{5}$$

식 (2)에 따르면, x_1 = 3.02 V에서 맞춤 직선이 z축과 만나는 점 -0.22는 다음 식을 만족한다.

$$-0.22 = w_1 x_1 + b = -1.87 + b \tag{6}$$

따라서 바이어스의 두 번째 어림값 b = 1.65를 얻는다. b의 가장 그럴듯한 어림값으로는 두 그래프에서 얻은 b 값의 평균을 택해야 한다.

$$b = 1.66 \pm 0.01 \tag{7}$$

	과제 4	점수
A	식 (1)과 (2) 또는 그와 동등한 식으로 $y - x$ 의 존성을 선형화함	0.4
다음 B-Q 부분에는 점수를 주지 않는다: X1 및/또는 X2 단자에 바뀌는 전압을 줄 수 있는 회로가 전혀 기록되어 있지 않은 경우.		
B	(0,3) 모서리를 피함(명시적인 근거가 없어도 됨). 단, 쓸 수 있는 데이터 세트를 두 개 기록했을 때만 점수를 줌	0.3
	x_1을 바꾸며 잰 y의 원시 측정값	
C	x_1이 대략 고르게 분포함	0.1
	데이터 점 수 ≤ 3	0
D	4-5	0.1
	6-7	0.2
	≥ 8	0.3
	x_2를 바꾸며 잰 y의 원시 측정값	
E	x_2가 대략 고르게 분포함	0.1
	데이터 점 수 ≤ 3	0
F	4-5	0.1
	6-7	0.2
	≥ 8	0.3
G	y를 z로 바꿈	0.2
	z 대 x_1 그래프	
H	크기와 축	0.2
I	그래프의 값	0.2
J	회귀 직선 (데이터가 실제로 선형일 때만. y 대 x_1을 그리면 그렇지 않다)	0.2
	z 대 x_2 그래프	
K	크기와 축	0.2
L	그래프의 값	0.2
M	회귀 직선 (데이터가 실제로 선형일 때만. y 대 x_2를 그리면 그렇지 않다)	0.2
N	w_1 값이 -0.6 V^{-1}와 -0.65 V^{-1} 사이	0.2
O	w_2 값이 0.93 V^{-1}와 1.01 V^{-1} 사이	0.2
P	b 값이 1.64와 1.70 사이 **참고:** 이 경계는 엄격하며, 가깝더라도 벗어나면 여기서 점수를 주지 않는다.	0.2
Q	유효숫자가 2-3자리가 아니면 전체 감점 (드문 경우에만 -0.2)	-0.4
	과제 4 합계	3.5

과제 5

X1이 +V에 연결되어 있으므로 입력 전압 x는 어떻게든 X2를 통해 주어야 한다. 편리하게도 이 과제에서 만들 뉴런은 가중치 $w_2/2$가 필요한데, 이는 X2의 입력 전압을 절반으로 줄여 사실상 얻을 수 있다. 이를 위해 가변 저항 하나로 입력 전압을 절반으로 나눌 수 있다. 올바른 위치를 찾으려면 손잡이를 돌리면서 단자 1-2와 2-3 사이의 저항을 잰다. 가변 저항의 비선형

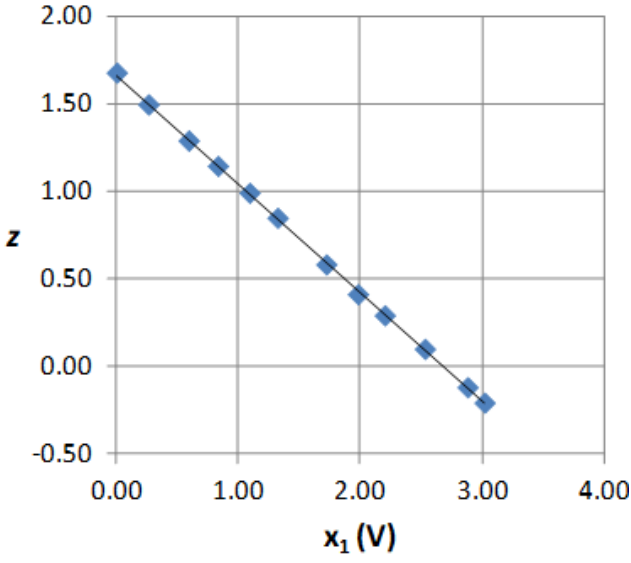


그림 3: 과제 4의 x_1(V) 대 z 그래프

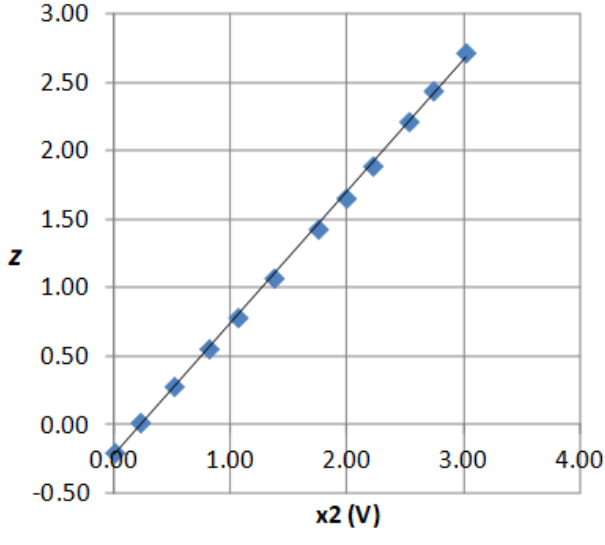


그림 4: 과제 4의 x_2(V) 대 z 그래프

거동 때문에 최종 위치는 물리적인 가운데 위치가 아니다. 또는 가변 저항에 전압을 걸었다면 전압계 기능으로 맞출 수도 있다. 변형된 뉴런의 회로는 그림 5와 같다.

이 회로에서 입력 전압 x는 다음 관계로 x_2로 바뀐다.

$$x_2 = \frac{1}{2}x$$

따라서 중간 함수 z는 다음과 같이 된다.

$$z = w_1 U_{+V} + \frac{w_2}{2}x + b.$$

즉 새 바이어스 b_5는 상수 부분이므로

$$b_5 = w_1 U_{+V} + b \approx -0.35.$$

가변 저항의 다른 끝을 접지 대신 +V에 연결해도 되며 이것도 완전히 옳다. 그러면 유효 가중치는 같지만 b_5는 약 1.2로 달라진다.

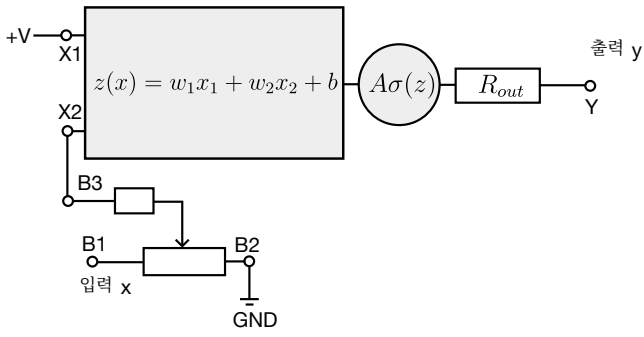


그림 5

$x(V)$	$y(V)$	z
0.00	1.13	-0.36
0.20	1.19	-0.27
0.40	1.25	-0.18
0.60	1.32	-0.08
0.80	1.39	0.02
1.00	1.46	0.12
1.20	1.51	0.20
1.40	1.58	0.30
1.60	1.63	0.38
1.80	1.69	0.47
2.00	1.77	0.59
2.20	1.82	0.67
2.40	1.87	0.75
2.56	1.93	0.86

표 4

그러나 이 풀이에서는 그림 5의 경우만 고려한다.
회로를 꾸미면 (+V와 GND에 연결한) A-가변 저항으로 새 뉴런의 입력에 바뀌는 전압을 줄 수 있다. 이렇게 몇 번 재어 회로가 원하는 대로 동작하는지 확인할 수 있으며, 그 데이터는 표 4와 같다.

역 활성화 함수로 선형화하면

$$z = -\left(\ln\frac{A}{y} - 1\right)$$

z를 x에 대해 그려 기울기에서 유효 가중치를, 절편에서 바이어스 b_5를 정할 수 있다(그림 6).

실험으로 $b_5 \approx -0.36$을 얻으며 이는 이론값에 가깝고, 유효 가중치는 $0.47\ \mathrm{V}^{-1} \approx w_2/2$이다. 일차 맞춤도 데이터 점과 잘 맞으므로, 회로가 기대를 충족함을 보였다.

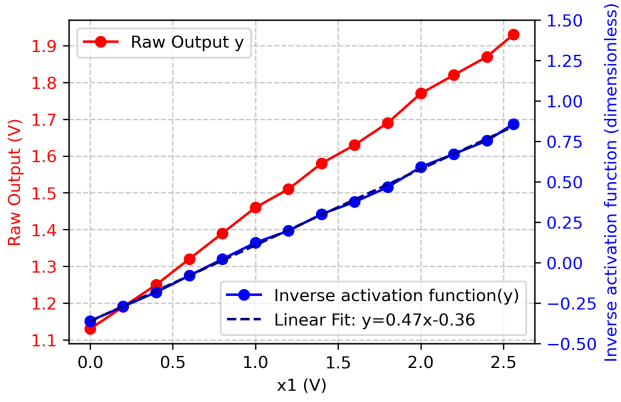


그림 6

	과제 5	점수
A	회로의 아이디어와 그림	0.3
B	b_5의 이론 유도와 계산	0.2
	공식 $b_5 = w_1 U_{+V} + b$만 쓰면 부분 점수	*0.1*
	다음 C-I 부분에는 점수를 주지 않는다: 쓴 회로가 과제 4의 회로와 다르지 않거나, X1을 +V에 연결한 것만 바꿔었거나, 여기서나 앞 과제에서 바뀌는 전압을 줄 수 있는 회로의 기록이 없는 경우.	
	x를 바꾸며 잰 y의 원시 측정값	
C	x의 전체 범위를 씀	0.1
D	데이터 점 수 ≤ 2	0
	3-4	0.1
	≥ 5	0.2
	z 대 x 그래프	
E	크기와 축	0.2
F	그래프의 변환한 값	0.2
G	회귀 직선	0.2
H	b_5의 비교	0.1
I	유효숫자가 2-3자리가 아니면 전체 감점	-0.2
	과제 5 합계	1.5

과제 6

a

내부 직렬 출력 저항 R_{out}을 정하는 방법은 (적어도) 두 가지이다. 뉴런의 출력을 알려진 값으로 두고 Y 단자를 전류계로 접지에 바로 연결하여(사실상 단락시켜) 뉴런 출력 전압을 잰 단락 전류로 나눌 수 있다.
또는 +V를 X2에 연결해 뉴런을 알려진 개방 전압 U_{open}으로 두고, Y를 가변 저항 R_P를 거쳐 접지에 연결한 뒤 그 양단의 전압 강하 U_P를 잰다. R_{out}이 얼마나 작은지 모를 때 위험한 전류를 막을 수 있으므로 이 방법이 더 안전하다. 측정값은 다음과 같다.

$$U_{\text{open}} \approx 2.71\,\text{V}, \qquad U_{\text{P}} \approx 2.11\,\text{V}$$

이로부터

$$R_{\text{out}} = \left(\frac{U_{\text{open}}}{U_{\text{P}}} - 1 \right) R_{\text{P}} \approx 284\,\Omega$$

b

회로가 다음 함수를 근사하도록 하려 한다.

$$y_6(x) = A_6 \cdot \sigma(w_2 x + b) + B_6$$

여기서 B_6 = 1.48 V이다. 먼저 w_1은 y_6에 영향을 주지 않으므로 X1 단자를 접지에 연결해야 함이 분명하다. Y 단자의 전압을 높이려면 그림 7처럼 Y 단자와 전원 전압 사이에 가변 저항 형태의 전압 분배기를 더해야 한다.

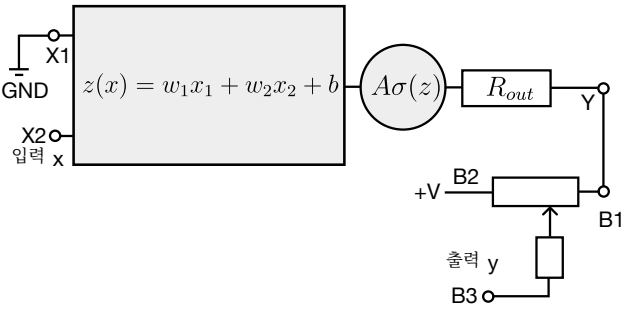


그림 7

출력 전압은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y = (1 - \eta) A\sigma(w_2 x + b) + \eta U_{+V},$$

여기서 η는 R_P와 R_{out}을 합친 전압 분배 비이다.

$$\eta = \frac{out \qquad a}{R_{out} + R_P}$$

R_a는 R_P 중 B1과 B3 사이에 있는 부분이다. 이를 써서 주어진 B_6 값으로 η를 얻는다.

$$\eta = \frac{B_6}{U_{+V}} \approx 0.458 \Rightarrow \frac{R_a}{R_P} = \frac{1}{R_P} \left(\frac{R_{out} + R_P}{2} - R_{out} \right) \approx 0.389$$

따라서 A_6의 이론값을 얻는다.

$$A_6 = A(1 - \eta) = A \left(1 - \frac{B_6}{U_{+V}} \right) \approx 1.5\,\text{V}. \qquad (8)$$

뉴런이 기대대로 동작하는지 실험으로 확인하려고, 다시 남은 가변 저항으로 여러 입력 전압 x를 걸고 출력 y를 기록한다. 멀티미터로 내부 B-가변 저항을 올바른 비로 맞출 수 있다. 가변 저항에 전류가 흐르지 않을 때만 저항계 모드로 재야 함을 잊지 말 것. 데이터를 선형화하려고 x 값에 시그모이드 함수 $\sigma(z(x))$를 적용해 눈금을 바꾼다. 얻은 수치는 표 5와 같다.

$\sigma(w_2x+b)$를 x에 대해 그리면 기울기 A_6, 절편 B_6인 일차 함수가 기대된다. 원시 데이터는 그림 8에, 일차 맞춤은 그림 9에 있다.

$x(V)$	$y(V)$	$A\sigma(w_2x+b)(V)$
0.00	2.73	1.38
0.15	2.76	1.48
0.30	2.78	1.58
0.45	2.80	1.68
0.60	2.83	1.78
0.75	2.85	1.87
0.90	2.86	1.96
1.20	2.89	2.11
1.50	2.91	2.25
1.80	2.92	2.36
2.10	2.94	2.45
2.40	2.95	2.52
2.70	2.96	2.58
3.00	2.96	2.62
3.23	2.97	2.65

표 5

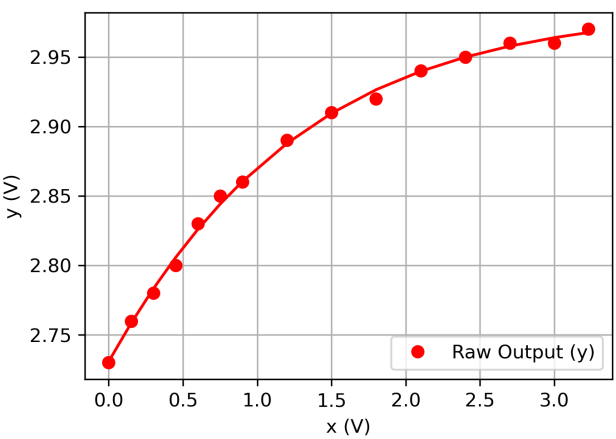


그림 8

맞춤으로부터 $A_6 \approx 1.53$, $B_6 \approx 1.45$를 읽으며, 이는 유효숫자 2자리까지 이론값과 일치한다. 일차 맞춤 함수가 데이터 점과 잘 맞는다는 사실은 뉴런이 의도대로 동작함을 더 확인해 준다.

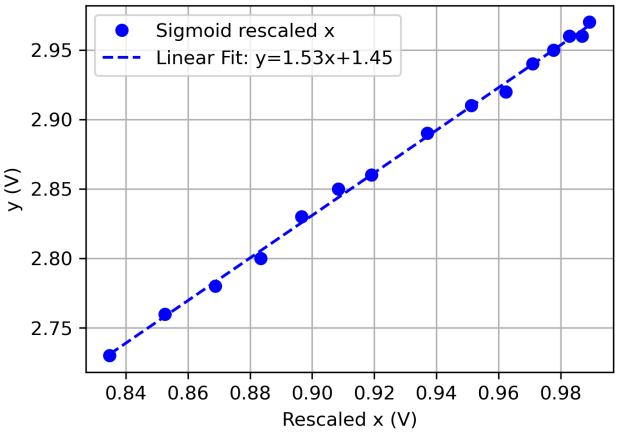


그림 9

	과제 6	점수
A	출력 저항의 아이디어	0.2
B	측정	0.2
C	$R_{\text{out}} = 284\,\Omega \pm 15\,\Omega$	0.1
D	회로의 아이디어와 그림	0.5
다음 E-L 부분에는 점수를 주지 않는다: 쓴 회로가 과제 4나 과제 5의 회로와 같거나, X1을 GND에 연결한 것만 바뀌었거나, 여기서나 앞 과제에서 바뀌는 전압을 줄 수 있는 회로의 기록이 없는 경우.		
E	A_6의 유도 (8) R_{out}을 무시하면 감점	0.4 -0.2
F G	x를 바꾸며 잰 y_6의 원시 측정값 x의 전체 범위를 씀 데이터 점 수 ≤ 2 3-4 >= 5	 0.1 0 0.1 0.2
H I J	y_6 대 $\sigma(z(x))$ 그래프 크기와 축 그래프의 변환한 값 회귀 직선	 0.2 0.2 0.2
K	측정값과 이론값의 일치	0.2
L	유효숫자가 2-3자리가 아니면 전체 감점	-0.2
	과제 6 합계	2.5