E2 - 풀이

과제 a.

필름을 통과한 빛은 그림 13처럼 1차 회절 무늬와 2차 회절 무늬를 만든다.

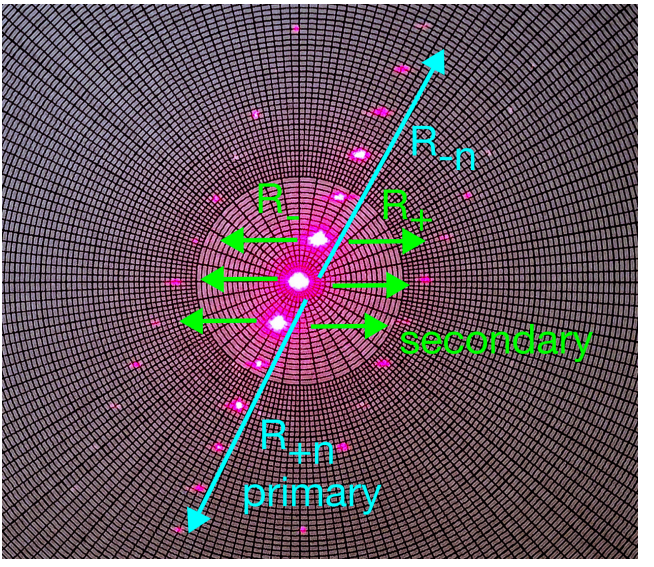


그림 13: 1차 무늬와 2차 무늬를 표시한 회절 무늬 사진.

2차 회절 무늬는 과제 d에만 필요하다. 1차 회절 무늬에서는 한 직선 위에 놓인 밝은 간섭 극대가 여럿 보인다. 이는 레이저 점의 단면 안에서 국소적으로, 필름 표면에 인쇄된 선들이 사실상 곧은 평행 줄무늬 여러 개로 된 회절격자를 이룬다는 뜻이다. 따라서 회절 극대는 그림 14처럼 비춰진 사인 곡선의 접선에 수직인 직선 위에 놓인다.

레이저를 수평 방향으로 훑으면 회절 무늬가 비춰진 점에서의 선 기울기에 따라 기운다. 레이저가 비춰진 사인 곡선의 마루나 골에 닿으면 무늬는 수직이 된다. 따라서 회절 무늬가 수직이 되는 연이은 두 위치 사이의 거리는 $l = \Lambda/2$이고, $\Lambda = 2l$이다.

실험 장치는 다음과 같이 꾸민다. 먼저 필름을 클립 두 개로 L자 받침대에 고정하고 조심스럽게 수직으로 맞춘다. 각도기는 0° 눈금이 수직을 향하도록 화면에 붙인다. 다음으로 레이저를 다른 L자 받침대에 고정하고 빔이 각도기의 중심에 닿도록 맞춘다. 극대의 변위를 크게 하여 정밀도를 높이려고 화면(각도기)을 필름에서 되도록 멀리 둔다(그림 15 참고). 필름이 달린 받침대를 레이저 빔을 가로질러 조금씩 옮기면서, 회절 무늬의 기울기 각 ϑ를 레이저 점과 필름 가장자리 사이의 거리 x의 함수로 잰다.

또 자를 대각선 눈금 위에 놓아

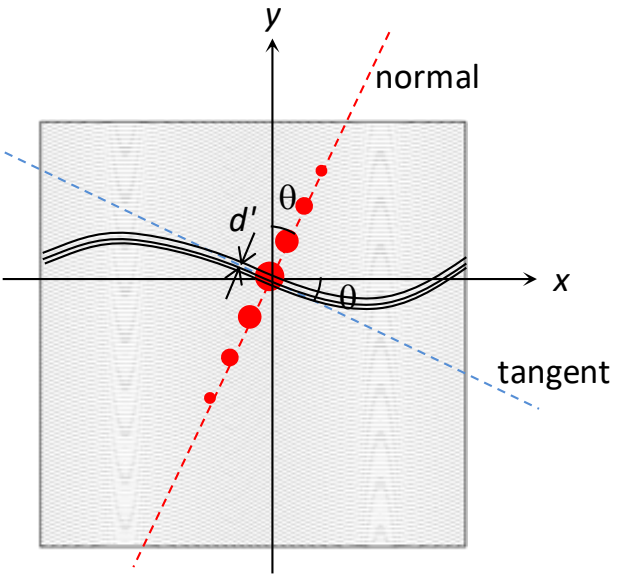


그림 14: 간섭 무늬의 정성적 스케치.



그림 15: 정밀도를 높이려고 책상 공간을 최대한 활용한 장치.

자의 한 가장자리가 눈금의 정렬선과 맞도록 한다. 필름이 달린 L자 받침대를 자의 가장자리를 따라 밀 것이다. 이렇게 하면 회절 극대와 받침대 정렬 사이에 주의를 나눌 필요 없이, 받침대를 밀면서 회절 극대가 어떻게 움직이는지 관찰하는 데 집중할 수 있다. 예시 데이터 세트는 표 7의 처음 두 열에 기록했고, ϑ 대 x의 그래프는 그림 16에 있다.

아래에서는 이 문제에서 묻는 양의 정밀한 실험 결과를 얻는 두 가지 접근을 설명한다. **접근 A**: 그래프 방법, **접근 B**: 임계 배치 둘레에서 회절 무늬를 꼼꼼히 훑는 방법.

접근 A. 그림 16에서 $\vartheta = 0°$에 해당하는 점 x_1과 x_2, 즉 사인 곡선의 연이은 마루와 골은, 영점 교차점에 가장 가까운

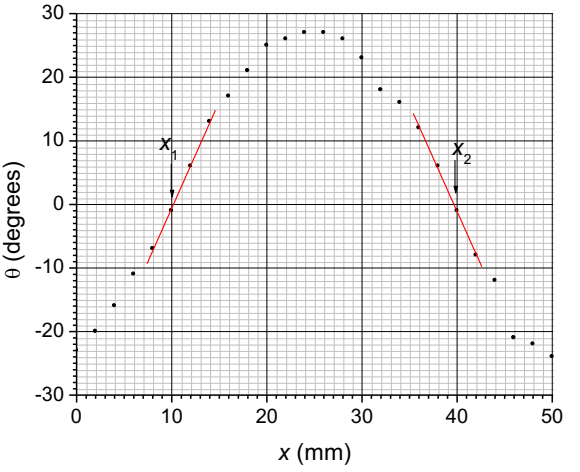


그림 16: ϑ 대 x의 그래프.

네 점을 일차 맞춤하여 얻을 수 있다.

$$x_1 = (10.0 \pm 0.5)\,\mathrm{mm} \qquad x_2 = (40.5 \pm 0.5)\,\mathrm{mm}\,.$$

따라서 $l = x_2 - x_1$ = 30.5 mm이고 불확도는 $\delta\, l = \sqrt{(\delta\, {x_1}^2 + \delta\, {x_2}^2)}$ = 0.7 mm이며,

$$\boxed{\Lambda = (61.0 \pm 1.4)\,\mathrm{mm}}\,.$$

접근 B. 또는 필름이 달린 받침대를 옮겨 회절 극대가 수직선 위에 늘어서게 하고 대각선 눈금에서 x_1을 읽는다. 다음으로 받침대를 자를 따라 밀어 회절 극대가 다시 수직선 위에 늘어서는 다른 위치를 찾고 그 눈금 x_2를 읽는다. 수직 정렬을 맞추기가 쉽지 않아 불확도가 생기므로 측정을 반복해야 한다. 측정 데이터는 아래 표와 같다.

번호	x_1/mm	x_2/mm
1	77.8	47.3
2	78.0	47.4
3	77.7	47.5
4	77.6	47.3
5	77.7	47.4
평균	77.76	47.38

이에 따라 다음을 계산한다.

$$\boxed{\Lambda = 2(x_2 - x_1) = 60.8\,\mathrm{mm}}\,.$$

그리고 $\Delta\Lambda$ = 0.16 mm

	과제 E2.a	점수
A	1차 회절 무늬의 기울기 변화를 사인 곡선의 위상과 연결하는 아이디어.	0.3
	회절 무늬가 수직이 되는 연이은 위치 사이에서 Λ 전체를 쟀다면 부분 점수	*0.1*
B	올바른 장치의 스케치 (레이저를 옆으로 옮겨 필름 위치를 훑고 뒤에 화면을 둠)	0.2
	두 '최대' 기울기 사이에서 $\Lambda/2$를 쟀다면 부분 점수	*0.1*
C	대각선 눈금으로 x를 잼 (데이터를 0.1 mm 정밀도로 기록)	0.2
	접근 A를 택한 경우:	
D	x를 사인 곡선 주기의 절반(30.5 mm) 이상에 걸쳐 바꿈	0.2
E	기록한 점의 수:	
	6개 이상 10개 미만	*0.2*
	10개 이상	0.3
	접근 B를 택한 경우:	
E!	x_1과 x_2 각각의 측정 횟수 n: $0.1(n-2)$, 총 최대	0.3
D!	데이터의 질: 개별 측정 사이의 표준 편차 $\lvert x_1 - x_2\rvert \le 0.2$ mm	0.2
	$\lvert x_1 - x_2\rvert \le 0.3$ mm	*0.1*
F	필름과 화면 사이의 거리 60 cm 이상	0.2
G	Λ 값이 58 mm와 64 mm 사이면 부분 점수	*0.1*
	Λ 값이 59.5 mm와 62.5 mm 사이면 부분 점수	*0.2*
	60 mm와 62 mm 사이	*0.3*
	만점: 60.5 mm와 61.5 mm 사이	0.4
H	적절한 오차 어림	0.2
	오차 어림 방법은 합리적이지만 직접 측정 불확도의 수치 어림이 분명히 지나치게 작거나 큰 경우	*0.1*
	오차 어림 방법 자체가 잘못되었거나 없는 경우	*0*
	과제 E2.a 합계	2.0

과제 b.

접근 A. 그림 14에서, 인쇄된 선에 수직한 방향으로 잰 회절격자의 주기는 다음과 같음을 쉽게 알 수 있다.

$$d' = d\cos\theta\,.$$

n차 회절 극대까지의 각은 다음과 같다.

$$\varphi = \sin^{-1}\left(\frac{n\lambda}{d\cos\theta}\right).$$

화면 위 0차와 n차 극대 사이의 거리는

$$R_n = L\tan\varphi \approx \frac{n\lambda L}{d\cos\theta}\,, \qquad (9)$$

이다. 여기서 L = 74.6 cm는 필름과 화면 사이의 거리이며, 관련된 각이 1 rad보다 훨씬 작으므로 $\sin\varphi \approx \tan\varphi$이다. 따라서 특정 차수의 극대를 골라 화면의 여러 점에서, 즉 여러 각 ϑ에서 거리 R을 재면, 거리 d를 표본 평균으로 계산할 수 있다.

$$d = n\lambda L \left\langle \frac{1}{R\cos\theta} \right\rangle$$

불확도는 d의 표본 표준 편차이다. 0차가 각도기 중심에서 조금 비켜나 있을 수 있으므로 대칭인 두 극대, n차와 $-n$차 사이의 거리 $D_n = R_n + R_{-n}$을 재고 다음을 계산한다.

$$d = 2\lambda L \left\langle \frac{1}{D_n\cos\theta} \right\rangle$$

표 7의 마지막 네 열은 5차 극대에 대해 잰 거리와 계산한 d 값을 정리한 것이다. d 값을 평균하면 다음을 얻는다.

$$\boxed{d = (60.1 \pm 0.5)\ \mu\text{m}}.$$

그러나 레이저 파장의 불확도도 염두에 두어야 한다. 측정 데이터와 레이저 파장의 상대 오차를 (상관없는 오차원에 쓸 수 있는) 피타고라스 규칙으로 더하면 다음을 얻는다.

$$\boxed{d = (60.1 \pm 0.7)\ \mu\text{m}}.$$

ϑ = 0°의 데이터를 쓰면 회절 극대로부터 선 간격 d를 바로 얻는다는 점에 주목한다.

$$d = 2\lambda / \sin\alpha_n = 2\lambda\sqrt{L^2 + D_n^2/4}/D_n. \tag{10}$$

접근 B. 여러 ϑ의 데이터 점을 많이 쓰는 대신, 앞 과제에서 찾은 위치 $x = x_1$이나 $x = x_2$를 고를 수 있다. 이 위치들이 가장 높은 정밀도를 주는 가로 위치이기 때문이다. 접근 A와 마찬가지로, 가능한 한 높은 정밀도를 얻으려고 관찰할 수 있는 가장 높은 차수 n = 6의 대칭 회절 극대 사이 거리를 정한다. D_n을 정하는 가장 좋은 방법은 극대 위치에 화면에 점을 찍고 점 사이 거리를 자로 재는 것이다(각도기를 깨끗하게 두려면 받침대에 종이를 한 장 더 붙여도 된다). 꼼꼼히 하면 한 번의 측정도 매우 정밀하므로 이 과제에서는 반복 측정이 필요 없다. 측정 결과는 L = 810 mm에서 D_6 = 105.5 mm이며, 이로부터 d = 59.7 µm이다. 어림 오차는 ±0.7 µm이다.

	과제 E2.b	점수
A	1차 회절 무늬가 사인 곡선들 사이의 간격으로 생긴다는 것을 이해함	0.2
B	(ϑ, D_n) 데이터 점을 5, 7, 10개 이상 써서 0.1, 0.2, 0.4점 (접근 A), 또는 $x = x_1$이나 $x = x_2$에서 데이터를 기록하기로 함 (접근 B) 설명 없이 수직 간섭 무늬를 썼으면 (접근 B)	0.4 *0.2*
C	식 10과 동등한 식 단순화한 식 10 (피타고라스 보정 없음)	0.3 *0.2*
D	φ 측정에 회절 차수를 모두 합쳐 6+6=12개 이상 씀 φ 측정에 회절 차수를 모두 합쳐 9-11개 씀 φ 측정에 회절 차수를 모두 합쳐 6-8개 씀 측정 데이터가 실제 실험과 맞지 않으면	0.3 *0.2* *0.1* *0*
E	화면까지의 거리 $L \geq 70$ cm 이상 L이 40 cm와 70 cm 사이면 부분 점수 L이 20 cm와 40 cm 사이	0.3 *0.2* *0.1*
F	d 값이 58 µm와 62 µm 사이면 부분 점수 58.5 µm와 61.5 µm 사이 만점: d 값이 59 µm와 61 µm 사이	*0.1* *0.2* 0.3
G	적절한 오차 어림 오차 어림 방법은 합리적이지만 직접 측정 불확도의 수치 어림이 분명히 지나치게 작거나 큰 경우 오차 어림 방법 자체가 잘못되었거나 없는 경우	0.2 *0.1* *0*
	과제 E2.b 합계	2.0

과제 c.

접근 A: 사인 곡선이 x축을 지나는 점은 회절 무늬의 기울기 각이 최대 ϑ = (27 ± 1)°인 곳에 해당하며, 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = (25.3 \pm 0.7)\,\mathrm{mm}\,.$$

사인 곡선의 식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$y = A \sin\,\left(k(x - x_0)\right)$$

여기서

$$k = \frac{2\pi}{\Lambda} = (0.103 \pm 0.002)\,\mathrm{mm}^{-1}$$

는 사인 곡선의 파수이다. tan ϑ = dy/dx이므로 다음을 얻는다.

$$\tan\theta = kA\cos\,\left(k(x - x_0)\right).$$

따라서 보조 변수 z = cos(k(x − x_0))와 t = tan ϑ는 다음 일차 관계로 이어진다.

$$t = kAz \equiv mz \qquad (11)$$

사인 곡선의 진폭은 기울기 계수 m을 정해 계산할 수 있다.

$$A = \frac{m}{k}\,.$$

계산한 t와 z 값은 표 7의 셋째와 넷째 열에 있으며, 해당 그래프는 그림 17에 있다.

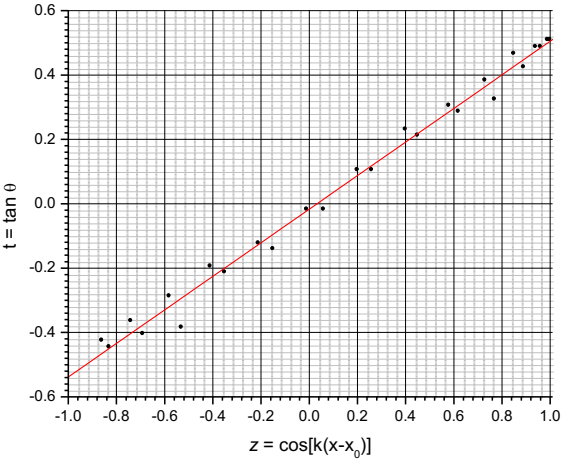


그림 17: tan ϑ 대 cos($k(x - x_0)$)의 그래프.

기울기 계수는

$$m = (0.52 \pm 0.01)\,.$$

따라서

$$\boxed{A = (5.0 \pm 0.2)\,\mathrm{mm}}\,.$$

접근 B. 파수 $k = 2\pi/\Lambda$를 이미 알고 있으므로, 인쇄된 선의 최대 기울기 $\max \mathrm{d}y/\mathrm{d}x = Ak$를 알면 필름의 사인 곡선 진폭을 정할 수 있다. 회절 극대는 레이저 빔이 지나는 점에서 필름의 선에 수직인 직선 위에 놓이므로, 선의 최대 기울기는 회절 극대의 줄이 수직축과 이루는 최대 각 ϑ로 찾을 수 있다.

$$\max_x \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \max \tan\theta = \tan\theta_{\max} \qquad (12)$$

이는 접근 A와 같은 장치로 필름 받침대를 자의 가장자리를 따라 밀며 화면에서 극대가 어떻게 움직이는지 보면 쉽게 할 수 있다. 그 결과 $\vartheta_{\max}$ = (27.5 ± 0.3)°를 얻으며, 이에 해당하는 값은

$$\boxed{A = \Lambda \tan\theta_{\max}/2\pi = (5.05 \pm 0.06)\,\mathrm{mm}}\,.$$

	과제 E2.c	점수
A	사인 곡선의 기울기가 1차 회절 무늬에 수직임을 알아챔	0.3
B	사인 곡선의 1차 도함수가 tan ϑ임을 쓰는 아이디어	0.3
C	식 11과 동등한 올바른 선형화 (접근 A) 또는 식 (12)의 유도 (접근 B)	0.5
	접근 A를 택한 경우	
D	보조 (선형화) 값 쌍(z와 t) 계산:	
	5개 이하	*0.0*
	6-9개	*0.2*
	10개 이상	0.4
	t 대 z 그래프	
E	A를 구하는 적절한 그래프 평가 (접근 A)	0.2
	접근 B를 택한 경우	
E!	최대 기울기 점을 쓰는 아이디어	0.2
D!	$\vartheta_{\max}$를 얻음	
	$\vartheta_{\max}$ = (27.5 ± 1.0)° 안이면 부분 점수	*0.2*
	$\vartheta_{\max}$ = (27.5 ± 0.5)° 안이면 만점	0.4
F	화면까지의 거리 $L \geq 70$ cm 이상	0.3
	L이 40 cm와 70 cm 사이면 부분 점수	*0.2*
	L이 20 cm와 40 cm 사이	*0.1*
G	A 값이 4.5 mm와 5.5 mm 사이면 부분 점수	0.2
	A 값이 4.7 mm와 5.3 mm 사이면 부분 점수	0.5
	만점: A 값이 4.8 mm와 5.2 mm 사이	0.8
H	적절한 오차 어림	0.2
	오차 어림 방법은 합리적이지만 직접 측정 불확도의 수치 어림이 분명히 지나치게 작거나 큰 경우	*0.1*
	오차 어림 방법 자체가 잘못되었거나 없는 경우	*0*
	과제 E2.c 합계	3.0

과제 d.

그림 13의 사진에서 보이듯이, 인쇄 기술에서 생기는 세로 띠들이 2차 회절 무늬를 만든다. 이 과제에도 회절 벡터를 모형화하는 방식이 다르지만 같은, 옳은 결과에 이르는 두 가지 접근이 있다.

접근 A: 하위헌스의 요소파 모형에서, 그림 18의 굵은 빨간 점선처럼 각 세로 가장자리를 따라 놓인 요소파 원천들이 화면 쪽으로 퍼지는 파면을 만들어 간섭 무늬를 만든다.

이 가장자리들은 서로 일정한 거리 g만큼 떨어져 있으며, 이는 ϑ에 따라 다음과 같다.

$$g = \frac{s}{\tan\theta}\,.$$

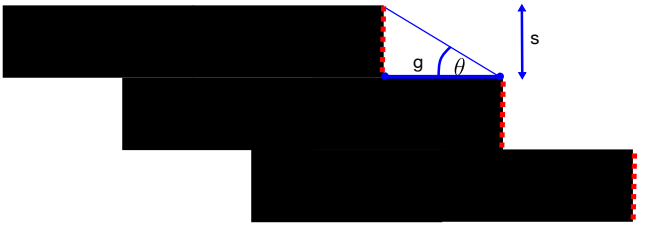


그림 18: 2차 회절 무늬에 관련된 양을 설명하는 스케치

θ	$\tan(\theta)$	$R_{+1} + R_{-1}$ (cm)	s (μm)
27.8	0.527	4.75	1.08E-05
25.7	0.481	4.65	1.01E-05
24.5	0.456	4.50	9.88E-06
24.7	0.460	4.60	9.76E-06
21.8	0.400	3.90	1.00E-05
18.1	0.327	3.00	1.06E-05

표 6: 여러 각 ϑ에서 2차 회절 차수 사이의 거리 측정

2차 회절 무늬 극대의 회절각 ω로부터 g를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\lambda}{g} = \sin\omega \approx \omega\,.$$

실험으로는 ω를 다음과 같이 얻는다.

$$\omega \approx \tan\omega = \frac{R_+ + R_-}{2L}\,,$$

여기서 $R_+ + R_-$는 2차 무늬에서 (중심의 왼쪽과 오른쪽에) 보이는 두 회절 차수 사이의 거리이다. 이를 합쳐 g를 얻는다.

$$g = \frac{2L\lambda}{R_+ + R_-}$$

따라서 삼각 관계로 s를 얻는다.

$$s = g\tan\theta = \frac{2L\lambda\tan\theta}{R_+ + R_-} \tag{13}$$

2차 무늬는 ϑ가 클 때만 뚜렷이 볼 수 있다는 점이 중요하다. 그 영역에서만 사인 곡선의 기울기가 거의 바뀌지 않아 ϑ와 그에 따른 회절각 ω가 거의 일정하기 때문이다. 표 6에 같은 L = 74.6 cm에서 기록한 측정점을 나타냈다.

여기서는 그래프 평가가 점별 결과의 평균보다 나을 것이 없으므로, s의 평균을 결과로, 그 표준 편차를 오차 어림으로 쓴다. 따라서

$$\boxed{s \approx (10.2 \pm 0.4)\mu\text{m}}\,.$$

접근 B: 또는 특성 회절 길이는 그림 18의 파란

삼각형의 빗변 길이 h이며, $h = s/\sin\vartheta$이다. 따라서 회절각은 다음과 같다.

$$\omega \approx \sin\omega = \frac{\lambda}{h} = \frac{\tilde{R_+} + \tilde{R_-}}{2L},$$

여기서 $\tilde{R}_+$와 $\tilde{R}_-$는 1차 무늬에 수직한 방향으로 잰 2차 회절 무늬의 위치이다. 따라서 s의 공식은 다음과 같다.

$$s = \frac{2L\lambda\sin\theta}{\tilde{R_+} + \tilde{R_-}}, \qquad (14)$$

$\tilde{R}_+ = \cos\vartheta\, R_+$, $\tilde{R}_- = \cos\vartheta\, R_-$이므로 이는 접근 A와 같은 결과를 준다.

	과제 E2.d	점수
A	프린터의 불연속 해상도로 생긴 수평 선분을 2차 회절 무늬와 연결함	0.3
B	회절각 ω가 ϑ에 의존함을 이해함	0.3
C	식 13이나 식 14처럼 s를 계산하는 최종 공식을 유도함	0.4
D	s를 정하는 데 필요한 양을 재는 적절한 장치와 절차를 스케치하거나 설명함	0.3
E	측정 정밀도를 높이려고 + 와 − 회절 차수를 모두 씀	0.2
F	R_+와 R_-를 재는 방법: 화면에 2차 회절 극대를 펜으로 표시하고 선형 회귀 - 이 방법을 보여 주는 화면 종이나 간결한 설명으로 증명	0.3
	두 수평 간섭점 사이를 한 번만 잼	*0.1*
G	화면까지의 거리 $L \geq 70$ cm 이상 L이 40 cm와 70 cm 사이면 부분 점수 L이 20 cm와 40 cm 사이	0.3 *0.2* *0.1*
H	$\vartheta > 27°$를 고름 $\vartheta > 25°$이면 부분 점수	0.2 *0.1*
I	s 값이 8 µm와 12 µm 사이면 부분 점수 s 값이 9 µm와 11 µm 사이면 부분 점수 만점: s 값이 9.4 µm와 10.6 µm 사이	0.1 0.3 0.5
J	적절한 오차 어림 오차 어림 방법은 합리적이지만 직접 측정 불확도의 수치 어림이 분명히 지나치게 작거나 큰 경우 오차 어림 방법 자체가 잘못되었거나 없는 경우	0.2 *0.1* *0*
	과제 E2.d 합계	3.0

표 7: ‘숨은 무늬’ 실험의 측정 데이터

x (mm)	θ (°)	z	t	R_5 (cm)	R_{-5} (cm)	D_5 (cm)	d (cm)
0	-23	-0.86	-0.42447	4.4	4.4	8.8	0.00602
2	-20	-0.74	-0.36397	4.4	4.3	8.7	0.00597
4	-16	-0.58	-0.28675	4.2	4.2	8.4	0.00604
6	-11	-0.41	-0.19438	4.1	4.1	8.2	0.00606
8	-7	-0.21	-0.12278	4.1	4.1	8.2	0.00599
10	-1	-0.01	-0.01746	4.1	4.1	8.2	0.00595
12	6	0.20	0.105104	4.1	4.1	8.2	0.00598
14	13	0.40	0.230868	4.2	4.2	8.4	0.00596
16	17	0.58	0.305731	4.3	4.3	8.6	0.00593
18	21	0.73	0.383864	4.3	4.3	8.6	0.00608
20	25	0.85	0.466308	4.4	4.4	8.8	0.00612
22	26	0.94	0.487733	4.5	4.6	9.1	0.00597
24	27	0.99	0.509525	4.6	4.5	9.1	0.00602
26	27	1.00	0.509525	4.6	4.5	9.1	0.00602
28	26	0.96	0.487733	4.5	4.6	9.1	0.00597
30	23	0.89	0.424475	4.4	4.4	8.8	0.00602
32	18	0.77	0.32492	4.2	4.2	8.4	0.00611
34	16	0.62	0.286745	4.2	4.3	8.5	0.00597
36	12	0.45	0.212557	4.1	4.1	8.2	0.00608
38	6	0.26	0.105104	4.1	4.1	8.2	0.00598
40	-1	0.06	-0.01746	4.1	4.1	8.2	0.00595
42	-8	-0.15	-0.14054	4.1	4.1	8.2	0.00601
44	-12	-0.35	-0.21256	4.2	4.1	8.3	0.00601
46	-21	-0.53	-0.38386	4.4	4.4	8.8	0.00594
48	-22	-0.69	-0.40403	4.4	4.4	8.8	0.00598
50	-24	-0.83	-0.44523	4.4	4.4	8.8	0.00607