풀이

채점 일반 지침:

- 흔한 작은 감점
  - 측정값에 단위가 없으면 소과제마다 한 번만 감점. **−0.1점**
  - 묻는 것과 다른 단위의 답: **−0.1점**
  - 사소한 산술 오류: **−0.1점**
  - 데이터를 그래프로 평가할 때 그래프 용지 넓이의 절반 미만을 쓰면: **−0.1점**
- 수치 결과를 채점할 때, 효과적인 측정 방법과 기록한 원시 데이터 없이 짐작으로 얻은 올바른 값(예: 그냥 $n = 1.35$라고 적음)에는 점수를 주지 않는다.
- 일차 맞춤으로 매개변수를 정할 때, 그래프 풀이와 허용된 계산기의 선형 회귀 모두 데이터 평가에서 만점을 받을 수 있다. 다만 후자의 경우 계산기로 선형 회귀를 했다고 밝혀야 하며, 쓴 원시 데이터를 모두 종이에 표로 제시해야 한다.
- 채점 기준의 모든 항목에서 그 항목 ID의 만점, 0점, 또는 명시된 부분 점수만 준다. 문서에 없는 부분 점수는 주지 않는다.
- **GLOBAL**이 붙은 두 채점 항목 E2-A3과 E2-A4는 해당 소과제에서든 시험의 다른 어디에서든 기준을 충족하면 줄 수 있다.

심화 내용, 즉 추가 정보

모든 풀이는 수치 결과 ± 통계적 표준 편차의 두 배로 주어지며, 가능한 계통 오차는 모두 무시한다. 학생에게는 요구하지 않는다.

E1 음향장 탐사

a) 회로도

부양기의 변환기들은 송신기로 동작하며, 압력 마디와 배가 있는 음향 정상파가 생기도록 배열되어 있다. 마디에서는 상쇄 간섭으로 압력 변화가 가장 작고, 배에서는 가장 세게 진동한다. 변환기를 하나 더 수신기로 쓰면 이 장을 탐사하고 압력 차를 교류 전압으로 바꿀 수 있다. 이 공간 변화는 발광 다이오드로 볼 수 있다.

회로 구성(그림 3 참고)에 따라 밝기가 크게 다르다. LED 두 개를 역병렬로 연결하면 신호의 반주기마다 LED 하나가 도통하므로 빛이 가장 세다. LED를 하나만 쓰면 신호의 반쪽만 기여하고 LED가 주로 역방향 바이어스로 동작하므로 빛이 약하다. 흥미롭게도 LED의 두 다리를 손으로 만지면 꽤 밝아진다. 사람 몸이 유한한 저항을 더해 역방향 바이어스 문제를 줄이므로 완전히 열린 경우보다 밝지만, 역병렬 경우만큼 밝지는 않다.

심화 내용, 기술적 여담

음향장을 탐사하려고 압전 변환기를 수신기로 쓴다. 입사하는 음파는 압전 결정을 주기적으로 기계 변형시켜 격자 안의 전하를 옮기고 전극 양단에 교류 전압을 만든다. 따라서 전기적으로 변환기는 진폭이 위치에 따라 달라지는 용량성 교류 원천처럼 행동한다.

회로는 빠르게 정상 상태에 이르며, 이때 옮겨지는 알짜 전하는 0이다. 즉 교류만 흐른다. 한 마디를 접지해도 이 거동은 바뀌지 않는다. 직류 기준 전위를 정할 뿐 신호나 빛을 개선하지 않는다.

역병렬 LED는 반주기마다 순방향 도통 경로가 있으므로 주어진 전류를 가장 효율적으로 쓴다. 다이오드를 저항으로 바꾸면 양방향 전류 경로가 생겨 전류가 LED를 비켜 가므로 밝기가 줄어든다. 저항값이 중요하다. 단락은 LED를 완전히 우회하고, 열린 회로에서는 LED만으로 전하 균형을 맞춰야 하는데 아주 작은 역전류가 순전류를 심하게 제한하여 빛이 약해진다. 두 단자를 손으로 만지면 이 경우에 적당한 저항이 더해져 눈에 보일 만큼 전류가 흐르지만, 여전히 역병렬 배치보다 훨씬 약하다.

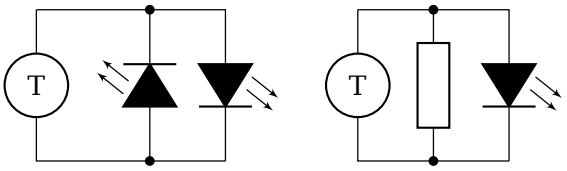


그림 3: 역병렬 배치(왼쪽)와 LED-저항 배치(오른쪽)의 회로도

b) 배 사이의 거리

변환기 머리를 수직으로 움직이며 자로 대략의 높이 변화를 기록한다. 수직 거리 $h_5 \approx 20$ mm 동안 LED가 다섯 번 켜지며, 켜진 상태에서 시작해 켜진 상태로 끝난다. 따라서 배 다섯 개를 쟀다. 이로부터 다음과 같이 어림한다.

$$\boxed{h = \frac{h_5}{5-1} \approx (5 \pm 2)\ \text{mm}} \qquad (5)$$

E1 채점 기준

ID	채점 항목	점수
E1-A1	올바른 회로도 (변환기나 다이오드의 정확한 기호는 필요 없지만, 극성이 번갈아 놓였음은 분명히 나타나야 함).	**0.5 pts**
	두 번째 회로도 (저항/손 사용)	0.3 pts
	변환기와 다이오드 하나만	0.2 pts
	극성 없는 다이오드 기호를 쓴 경우, 나머지 회로와 무관하게	0.1 pts
	전압원(전원 장치나 부양기 위 레일)이 있는 회로:	0.0 pts
E1-B1	변환기 머리를 z축을 따라 움직이고 적어도 두 배 사이의 수직 거리를 잼.	**0.2 pts**
E1-B2	인접한 배 사이 h의 결과가 $\in [3, 8]$ mm.	**0.3 pts**
	총점	**1.0 pts**

E2 음향 부양기의 특성

a) 변환기의 진동수

인접한 두 마디 사이 거리는 λ/2이며, λ는 음파의 파장이다. 실제로 λ/2만큼 위로 움직이면 부양기 위쪽 변환기에서 온 음파의 위상은 π만큼 줄고 아래쪽 변환기에서 온 음파의 위상은 π만큼 는다. 그래서 전체 위상차가 2π가 된다.

음파의 파장을 정하려면 마디의 위치를 재야 한다. 이는 (N)이나 (O) 종류의 구슬을 여러 개 띄우면 편리하게 할 수 있다. 스티로폼 구슬(N)의 장점은 매우 가벼워 마디에서 조금만 벗어난다는 것이고(과제 E3 참고), 구슬(O)의 장점은 모양이 규칙적이라는 것이다. 떠 있는 구슬은 그림 4와 같다.

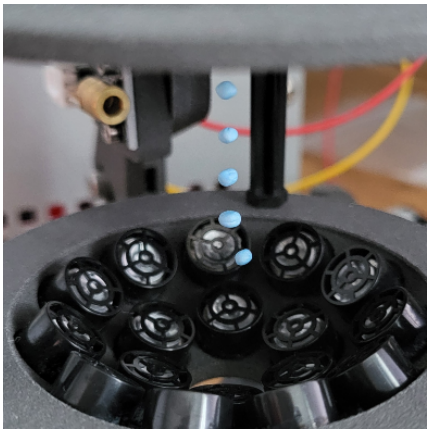


그림 4: 떠 있는 스티로폼 구슬의 사진.

상을 확대하려면 떠 있는 구슬을 빨간 LED로 비추고 그림 5처럼 그림자를 화면에 비춘다. 배율은 예를 들어 자를 써서 다음과 같이 정할 수 있다. 자를 부양기 가운데에 수직으로 세우고, 수직 mm 눈금의 투영 사이 거리로 배율을 정한다. 또는 구슬 (O)나 (P)의 실제 지름이 2.0 mm임을 써서 그 그림자 크기로 배율을 알아낼 수 있다. 이 배율 결정 방법은 이어지는 여러 과제에서 쓴다.

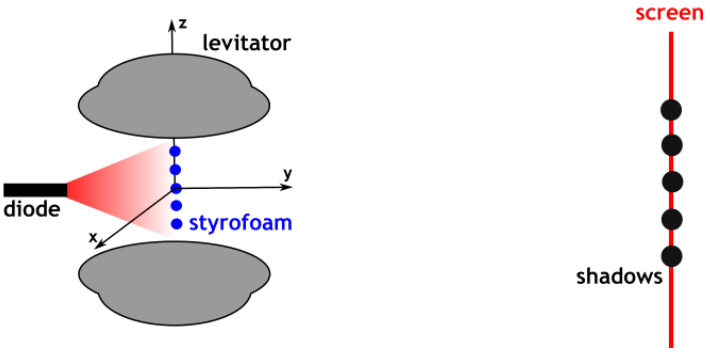


그림 5: 사용한 측정 장치의 스케치.

얻은 데이터는 표 1에 있으며, 그림 6은 0번째 구슬로부터의 거리를 마디 번호의 함수로 나타낸 것이다. 직선의 기울기는 λ/2일 것으로 기대되므로 λ ≈ 10.12 mm를 얻는다. $f = v/\lambda$ = 340/0.01012 Hz이므로 다음을 얻는다.

$$\boxed{f = (34 \pm 1)\ \text{kHz}} \qquad (6)$$

마디	화면 위 거리 [cm]	실제 거리 [mm]
0	0.00 (기준)	0.00
1	7.85	5.16
2	15.45	10.17
3	23.15	15.23

표 1: 배율 $M = 15.2$에서 0번째 마디로부터 각 마디까지의 거리를 보여 주는 예시 데이터.

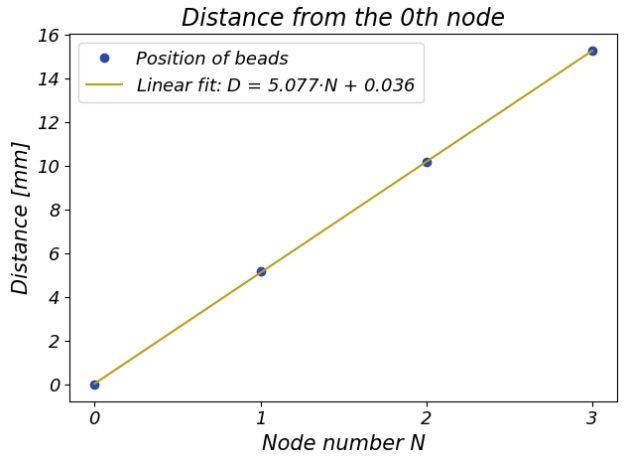


그림 6: 0번째 구슬로부터의 거리(mm) 대 구슬 번호.

b) Mode X

*Mode X*를 켜면 음향장에 놓인 고체가 위로 움직이기 시작한다. 이는 다음과 같이 설명할 수 있다. 부양기 아래쪽 절반이 만들어 z축 양의 방향으로 진행하는 파동을 $p_l(z,t) = p_0 \sin(\omega/vz - \omega\, t)$라 하자. 마찬가지로 부양기 위쪽 절반이 만들어 z축 음의 방향으로 진행하는 파동을 $p_u(z,t) = p_0 \sin(-\omega'/vz - \omega'\, t)$라 하자. 여기서 ω'은 조금 바뀐 각진동수이다. 합성 음압은 두 기여의 합이다.

$$\begin{aligned} p_{\text{tot}} &= p_l + p_u \\ &= p_0 \sin\left(\frac{\omega}{v}z - \omega t\right) + p_0 \sin\left(-\frac{\omega'}{v}z - \omega' t\right) \\ &= -2p_0 \sin\left(\frac{\omega-\omega'}{2v}z - \frac{\omega+\omega'}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega+\omega'}{2v}z + \frac{\omega'-\omega}{2}t\right), \end{aligned}$$

여기서 관계식 $\sin(a) + \sin(b) = 2\sin((a+b)/2) \cdot \cos((a-b)/2)$를 썼다. 이 식의 사인 항은 아주 긴 파장 $\lambda = 2v/\Delta f \approx 1$ km와 각진동수 $(\omega + \omega')/2 \approx \omega$를 가진 파동이므로 $\sin(\omega\, t)$로 근사할 수 있다. 둘째 항은 거의 파장 $2v/(f + f') \approx v/f = \lambda$인 정상파이지만, 마디가 작은 속도 $v = |\Delta\omega|/2k$로 움직인다. 여기서 $\Delta\omega = \omega' - \omega$이다. $\Delta\omega > 0$이면 마디는 z축 음의 방향으로, $\Delta\omega < 0$이면 z축 양의 방향으로 움직인다. $\omega = 2\pi f$와 $k = 2\pi/\lambda$를 쓰면 다음을 얻는다.

$$v = \frac{\lambda|\Delta f|}{2}. \tag{7}$$

*Mode X*를 켜면 떠 있는 구슬이 z축 양의 방향으로 움직이므로 $\Delta f < 0$이라고 추론한다. $|\Delta f|$의 값은 식 7로, 예를 들어 다음과 같이 구할 수 있다. 먼저 떠 있는 구슬이 (정확도를 높이려고 되도록 멀리 떨어진) 서로 다른 두 마디에 떠 있을 때 그림자 윗부분의 위치를 화면에 표시한다. 구슬을 이 마디 중 아래쪽 것보다 조금 아래에 둔다. 그다음 *Mode X*를 켜고 구슬 그림자의 윗부분이 화면의 두 표시 사이를 지나는 데 걸리는 시간을 잰다. 진동수 차는 다음과 같다.

$$v = \frac{\lambda|\Delta f|}{2} \Rightarrow |\Delta f| = \frac{2}{\lambda}\frac{N\frac{\lambda}{2}}{t} = \frac{N}{t}, \tag{8}$$

여기서 $v = s/t = (N\lambda/2)/t$를 썼다. 마디 네 개 거리를 지나는 시간을 잰 한 계열의 결과는 표 2와 같다. 마디 네 개 거리에서 평균 5.96초이므로 $|\Delta f| = 4/5.96 \approx 0.67$ Hz이다.

또는 이 현상을, 마디가 공에 대해 움직이지 않는 속력 u로 움직이는 기준틀에서 식 9의 도플러 효과로 설명할 수 있다. 그러면 이 기준틀에서는 위쪽 절반과 아래쪽 절반에서 온 진동수가 같게 측정된다.

$$\left(\frac{v+u}{v}\right)(f + \Delta f) = \left(\frac{v-u}{v}\right) f \tag{9}$$

공이 위로 움직이고($u > 0$) 근사 $u \ll v$를 쓰면 식 10의 관계에 이른다. 여기서 u는 스티로폼 구슬의 속력, v는 소리의 속력이다.

$$\Delta f = -\frac{2u}{v} f \tag{10}$$

측정	시간 [s]
1	5.84
2	6.00
3	5.94
4	5.96
5	6.06
평균	**5.96**

표 2: 구슬이 마디 네 개 거리를 지나는 데 걸리는 시간의 한 측정 계열.

$$\boxed{\Delta f = (-0.67 \pm 0.02)\ \text{Hz}} \tag{11}$$

E2 채점 기준

ID	채점 항목	점수
E2-A1	마디 사이 거리: λ/2	**0.2 pts**
E2-A2	마디 셋이나 넷에 걸친 거리를 잼, 또는 PP/유리 구슬을 두 마디에 쓰고 모양이 규칙적이라는 근거를 댐.	**0.3 pts**
E2-A3	**GLOBAL: 배율 보정 방법.** 방법 서술 (예: 구슬이나 자를 광학적으로 확대) 이면 만점. 선형화와 LED 방출점(≈ 5 mm 안쪽) 결정도 정밀하게 했다면 만점.	**0.4 pts**
E2-A4	**GLOBAL: 확대 장치** 광학 확대 장치의 스케치.	**0.3 pts**
E2-A5	확대된 상에서 (자 위에) 잰 원시 수직 거리 ≥ 20 cm. 수직 거리 ≥ 10 cm이면	**0.4 pts** 0.2 pts
E2-A6	$f \in [30, 40]$ kHz의 결과 (E2-A1의 답이 수치 인자만큼 틀렸다면 이 구간도 그에 맞게 바꿈).	**0.4 pts**
E2-B1	공식 $v = -\lambda\Delta f/2$의 올바른 이론 유도 (두 평면파가 같은 파수 $k = \omega/v$를 가진다고 가정해도 됨). 인자 1/2이 빠진 경우.	**0.5 pts** 0.3 pts
E2-B2	현상을 설명함. 예: 화면에서 움직이는 구슬, 또는 *Mode X*를 켠 채 고정된 LED의 깜박임 진동수를 잼.	**0.3 pts**
E2-B3	구슬로 시간을 5번 이상 잼, 또는 LED 깜박임 10번 이상에 걸쳐 평균함. x < 5번 측정이면 측정마다, 또는 깜박임 두 번마다 (깜박임 10번까지)	**0.5 pts** 0.1 pts
E2-B4	공식 $v = s/t$를 씀	**0.1 pts**
E2-B5	올바른 값 $\lvert\Delta f\rvert \in [0.66, 0.68]$ Hz (E2-A1의 답이 수치 인자만큼 틀렸다면 그에 맞게 바꿈) $\lvert\Delta f\rvert \in [0.64, 0.66[\cup]0.68, 0.70]$ Hz	**0.4 pts** 0.2 pts
E2-B6	Δf의 올바른 부호 (음수)	**0.2 pts**
	총점	**4.0 pts**

심화 내용

- 변환기의 동작 진동수는 $f = 40$ kHz이며, 이는 파장 $\lambda = 8.5$ mm에 해당한다. 진동수 측정의 계통 오차는 부양기의 두 절반이 만드는 음파가 평면파가 아니라는 사실로 설명할 수 있다. 과제에 쓴 것과 비슷한 설계의 부양기가 만드는 음압장의 시뮬레이션은 그림 7을 보라.

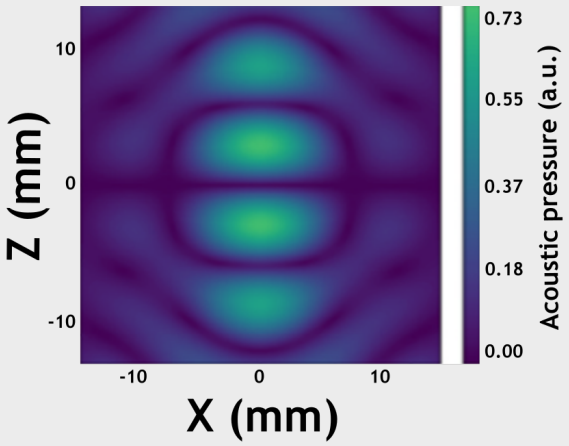


그림 7: MK1 장치의 음향장. 그림 출처 j.jsamd.2024.100720

- *Mode X*를 켜면 구슬이 아주 매끄럽게 오르지 않고 짧게 '뛰듯이' 움직이는 것을 알아챘을 것이다. 실제로 *Mode X*는 두 절반 사이의 위상차를 유한한 (작은) 단계로 바꾸어 구현되기 때문이다. 각 위상차 변화가 매우 작으므로, 이는 대략 위상차가 연속적으로 커지는 것과 같고, 수학적으로 진동수 차와 동등하다.

E3 밀도 정하기

미지의 물질은 폴리프로필렌 플라스틱(PP)이다. 아래 방법 A와 B 중 하나에만 점수를 줄 수 있다. 두 방법을 모두 시도했다면 총점이 더 높은 방법을 쓴다.

방법 A (마디로부터의 벗어남)

이 과제에서도 과제 E2와 같은 확대 방법을 쓴다. 다만 (구슬 하나만 보이면 되므로) 배율을 더 크게 해야 한다. 배율 $M > 30$ 이상을 얻는다. 먼저 마디의 위치를 찾는다. 작은 스티로폼 조각을 대략 마디의

가운데에 띄우고 화면에 표시한다.

힌트에 따르면 음향 복사력은 용수철 힘 $-f(R)P^2\Delta\ z$로 근사할 수 있다. 떠 있는 구에 대한 힘의 평형 식은 다음과 같다.

$$-f(R)P^2\Delta z = mg = \rho V g, \tag{12}$$

여기서 m은 구슬의 질량, ρ는 밀도, V는 부피이다. 음압이 전압에 비례한다($P \propto U$)고 가정하면 $|\Delta z| \propto U^{-2}$임이 분명하다. 유리 구슬과 플라스틱 구슬은 모양과 크기가 같으므로, Δz 대 $1/U^2$ 직선의 기울기 k는 떠 있는 물체의 밀도에 비례한다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\rho_{\mathrm{PP}} = \rho_{\mathrm{glass}} k_{\mathrm{PP}} / k_{\mathrm{glass}} \tag{13}$$

유리 구슬을 최대 전압에서 띄우고, 여러 전압에서 마디로부터의 오프셋을 (화면에서 확대된 상으로) 잰다. 정확한 결과를 얻으려면 측정점이 적어도 다섯 개 필요하다. 플라스틱 구슬에 대해서도 측정을 되풀이한다. 그림 8의 Δz 대 U^{-2} 그래프의 기울기로부터 식 13에 따라 밀도를 계산한다.

$$\boxed{\rho_{PP} = (800 \pm 60)\ \mathrm{kg\,m^{-3}}} \tag{14}$$

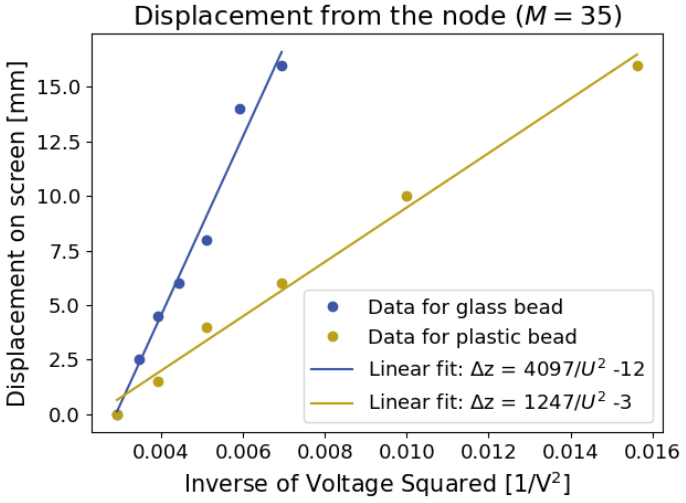


그림 8: 배율 M = 35에서 플라스틱 구슬과 유리 구슬의 밀도 그래프.

E3 채점 기준: 방법 A (마디로부터의 벗어남)

ID	채점 항목	점수
E3-A1	올바른 힘 균형 $-f(R)P^2\Delta\ z = mg = \varrho Vg$ (하나만 써도 됨, 부호는 채점하지 않음).	**0.3 pts**
E3-A2	$\varrho_{glass}k_{PP}/k_{glass}$로 PP의 밀도를 구함 (또는 같은 전압에서 짝지어 쟀다면 변위의 비).	**0.5 pts**
E3-A3	배율 ≥ 30, 또는 다이오드를 부양기에 되도록 가깝게 두고 마디에서 화면까지 거리 ≥ 66 cm 배율 ≥ 20, 또는 다이오드를 부양기에 되도록 가깝게 두고 마디에서 화면까지 거리 ≥ 43 cm	**0.4 pts** 0.2 pts
E3-A4	유리 구슬에 대해 전압과 변위 측정 4번 이상 (모든 측정의 전압이 같아도 됨) 측정 3번 측정 2번 측정 1번	**0.5 pts** 0.3 pts 0.2 pts 0.1 pts
E3-A5	플라스틱 구슬에 대해 전압 측정 4번 이상 (모든 측정의 전압이 같아도 됨) 측정 3번 측정 2번 측정 1번	**0.5 pts** 0.3 pts 0.2 pts 0.1 pts
E3-A6	두 물질 모두 그래프 평가(기울기), 또는 계산기 선형 회귀. 마디의 정확한 위치를 정했다고(예: 같은 마디에서 높은 전압으로 스티로폼 구슬을 띄워 화면에 위치를 표시) 분명히 밝히지 않는 한 점별 평균은 점수 없음.	**0.4 pts**
E3-A7	밀도가 구간 $\varrho_{PP} \in [750, 1150]$ kg/m^3 안	**0.4 pts**
	총점	**3.0 pts**

방법 B (떨어지는 전압)

(O)와 (P) 종류 구슬의 밀도를 비교하는 다른 방법은 떨어지는 전압, 즉 구슬을 띄울 수 있는 가장 작은 전압을 분석하는 것이다. 실제로 여러 전압에서 띄워 보면 밀도가 큰 물체일수록 띄우는 데 더 높은 전압이 필요함을 알 수 있다.

이 접근은, 크기가 정해진 떠 있는 구가 마디로부터의 벗어난 Δz가 구슬의 밀도와 무관한 어떤 값 Δz_{max}에 이를 때 정확히 떨어진다는 관찰에 바탕을 둔다. 이 점에서 음향력은 최대에 이르므로 Δz가 더 커지면 복원력이 오히려 작아진다. 복원하는 음향력을 용수철로 생각하면, 이는 어떤 의미에서 용수철이 끊어지는 것에 해당한다.

과제에 제시된 이론에 따르면, 모양이 정해진 구슬이 Δz_{max}만큼 벗어났을 때의 음향력은 $F = KU^2$이며 K는 상수이다. 따라서 떨어지는 전압 U_{min}은 다음을 만족한다.

$$KU_{\mathrm{min}}^2 = \rho g V,$$

여기서 V는 구슬의 부피이다. 따라서 다음과 같이 결론 내린다.

$$\rho_{\mathrm{PP}} = \rho_{\mathrm{glass}} \frac{U_{\mathrm{PP}}^2}{U_{\mathrm{glass}}^2} \tag{15}$$

플라스틱 구슬과 유리 구슬을 가운데 마디에 띄운다. 전압을 천천히 줄이며 떨어지는 전압을 기록한다. 구슬 종류마다 떨어지는 전압을 적어도 세 번 재야 한다. 떨어지는 전압의 평균으로 식 15에 따라 플라스틱 구슬의 밀도를 계산한다. 또는 기록한 떨어지는 전압 값의 최솟값을 써야 한다고 주장할 수도 있다. 실제로 구슬이 흔들려서 U_{min}보다 높은 전압에서 떨어질 수 있으므로, U_{min}은 기록한 값 중 최소 전압으로 가장 잘 근사된다.

예시 데이터는 표 3에 있으며, 예시 데이터에 바탕을 둔 밀도 결과는 다음과 같다.

$$\boxed{\rho_{\mathrm{PP}} = (1010 \pm 20)\ \mathrm{kg\,m^{-3}}} \tag{16}$$

U_{glass} [V]	U_{PP} [V]
11.1	7.1
11.1	7.1
11.1	7.0
11.0	7.1
11.1	7.0
평균: **11.08**	**7.04**

표 3: 유리 구슬과 플라스틱 구슬의 떨어지는 전압을 보여 주는 예시 데이터.

E3 채점 기준: 방법 B (떨어지는 전압)

ID	채점 항목	점수
E3-B1	떨어지는 전압이 구슬의 밀도에 영향을 받는다는 아이디어.	**0.5 pts**
E3-B2	구슬이 떨어지는 최대 변위가 있다는 아이디어.	**0.5 pts**
E3-B3	올바른 힘 균형 $KU^2 = \varrho\, gV$ 또는 $KU^2 = mg$	**0.3 pts**
E3-B4	${\varrho_{glass}U_{PP}}^2/{U_{glass}}^2$로 밀도 ϱ_{PP}를 구한다는 아이디어	**0.3 pts**
E3-B5	유리 구슬에 대해 전압 측정 3번 이상 전압 측정 2번 전압 측정 1번	**0.5 pts** 0.3 pts 0.1 pts
E3-B6	플라스틱 구슬에 대해 전압 측정 3번 이상 전압 측정 2번 전압 측정 1번	**0.5 pts** 0.3 pts 0.1 pts
E3-B7	올바른 밀도가 범위 ρ ∈ [900, 1100] kg/m^3 안	**0.4 pts**
	총점	**3.0 pts**

심화 내용

- 인접한 두 마디 사이 거리는 λ/2이다(주의! 이는 파란색으로 그린 음향력의 파장이 아니며, 그 파장은 λ′ = λ/2이다). 음향 압력의 힘의 스케치는 그림 9를 보라. 방법 B에서 설명했듯이, 변위가 커져도 음향력이 더 커지지 않는 점이 있다. 이는 용수철이 영구적으로 변형되는 것에 해당한다. 이는 $\Delta z \approx$ λ/8에서 일어난다.

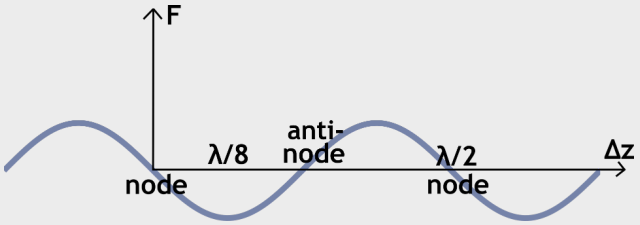


그림 9: 주기적인 음향력.

- 반지름이 초음파의 파장보다 훨씬 작은 구슬에 작용하는 음향력을 나타내는 비교적 간단한 공식이 있다.

$$F = 4\pi\Phi_0 k R^3 E_{\text{ac}} \sin(2k\Delta z).$$

여기서 Φ_0은 구슬과 주위 공기의 압축률과 밀도에 의존하는 무차원 대비 인자, k = 2π/λ는 파수, $E_{ac} \propto P^2$은 음향 에너지 밀도이다. 그러나 이 과제에서는 액적이 파장보다 훨씬 작다고 가정하는 것이 정확하지 않으며, 의존성은 더 복잡하다.

E4 증발

문제의 액체 I은 아이소프로판올(IPA)이다.

a) 증발 상수

주어진 증발 모형은 액적 지름의 제곱이 시간에 따라 선형으로 줄어든다는 것이다. 증발을 재려면 E2와 비슷하게 장치를 보정해야 한다. 주어진 식은 구형 액적에 대해 성립하므로 타원체 모양을 $abc = r^3$, 즉 $r = (a^2c)^{1/3}$에 따라 구로 바꿔야 한다. 여기서 (대칭에 따라) $a = b$를 썼다. 이를 지름 D로 쓰면 $D = 2(a^2c)^{1/3}$이며, a는 타원체 액적의 긴 반축, c는 짧은 반축이다. γ를 어림하려면 장축과 단축을 재고 측정 사이에 기다린다. 과제에서는 $D \gtrsim 1.5$ mm ($D^2 \gtrsim 2.25$ mm^2)일 때의 γ를 정하라고 했으므로 액적이 이 크기보다 클 때와 조금 작을 때 모두 데이터를 모은다(과제 E4b를 위해). 결과를 먼저 $D = 2(a^2c)^{1/3}$로 관찰된 지름으로 바꾸고, 다시 $D = D/M$으로 실제 지름으로 바꾼다. 여기서 M은 배율이다. 예시 데이터 세트는 표 4에 있으며 그림 10에 나타냈다.

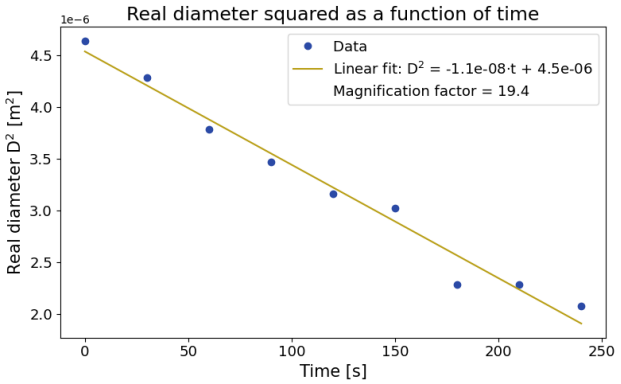


그림 10: 실제 지름의 제곱(표 4 참고)을 시간의 함수로 그린 것.

γ 값은 곡선의 기울기로 읽으며, 결과는 다음과 같다.

$$\boxed{\gamma = (9.2 \pm 5.0) \cdot 10^{-9}\ \text{m}^2/\text{s}} \qquad (17)$$

b) 증발 시간

충분히 오래 기다리면 어떤 크기에 이르렀을 때 증발 속도가 크게 느려지는 것을 볼 수 있다. 그림 11에서 이는 600초 뒤 약 $D = 1$ mm에서 일어난다. 처음 기울기에 바탕을 둔 예측은 증발 시간을 크게 과소평가했을 것이다.

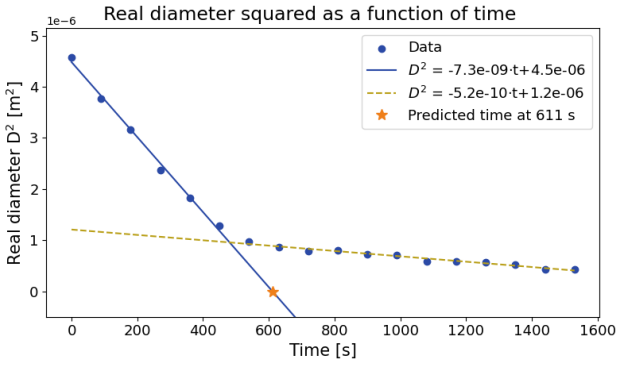


그림 11: 실제 지름의 제곱을 시간의 함수로 그린 것. 사용한 배율은 30이었다. 어떤 크기를 지나면 증발이 평탄해지며, 원래 기울기에 바탕을 둔 예측(별표로 표시한 예측 시간)은 크게 빗나갔을 것이다.

시간 [s]	장축 [mm]	단축 [mm]	지름 [mm]	실제 [m^2]
0	47	33	4.2e+01	4.6e-06
30	45	32	4.0e+01	4.3e-06
60	41	32	3.8e+01	3.8e-06
90	39	31	3.6e+01	3.5e-06
120	37	30	3.5e+01	3.2e-06
150	37	28	3.4e+01	3.0e-06
180	30	28	2.9e+01	2.3e-06
210	30	28	2.9e+01	2.3e-06
240	29	26	2.8e+01	2.1e-06

표 4: 측정 시각, 화면 위 장축, 화면 위 단축, 화면에서 해당 구의 지름, 그리고 액적의 실제 지름의 제곱을 보여 주는 예시 데이터. 이 측정의 배율은 20이었다.

E4 채점 기준

ID	채점 항목	점수
E4-A1	장축과 단축을 모두 잼.	**0.3 pts**
E4-A2	D > 1.3 mm에서 측정 사이 간격 20 s 이상으로 데이터 점 9개 이상 (처음 D를 주사기의 부정확한 눈금으로 잰 부피로 정했다면 점수 없음). 데이터 점 7개 이상 데이터 점 5개 이상 데이터 점 3개 이상	**0.7 pts** 0.5 pts 0.3 pts 0.1 pts
E4-A3	D > 1.3 mm에서 액적을 모두 4 min = 240 s 이상 잼.	**0.2 pts**
E4-A4	해당 구의 지름을 올바르게 계산함 $D = 2(a^2c)^{1/3}$.	**0.2 pts**
E4-A5	배율 $M \geq 20$ 배율 $M \geq 15$	**0.2 pts** 0.1 pts
E4-A6	올바른 선형화 (식 3을 적분한 꼴, D^2 대 t, 또는 D^2를 t에 대해 그리는 아이디어).	**0.2 pts**
E4-A7	기록한 데이터 D^2 대 t의 기울기로 γ를 그래프나 계산기 선형 회귀로 정함.	**0.2 pts**
E4-A8	γ 값 $\in [2.5, 13.4] \cdot 10^{-9}$ m^2/s.	**0.5 pts**
E4-B1	액적이 어떤 크기에 이르면 증발이 느려짐을 관찰함.	**0.3 pts**
E4-B2	a)의 결과로는 증발 시간을 과소평가했을 것이라고 서술함.	**0.2 pts**
	총점	**3.0 pts**

심화 내용

- 관계 $\mathrm{d}(D^2)/\mathrm{d}t = -\gamma$는 D 제곱 법칙이라 하며, 보통 작은 구형 액적에 성립한다고 가정한다. 이 문제에서는 축을 등가 지름으로 바꾸어 구가 아닌 액적에 명시적으로 적용했으며, 그래도 성립함을 알아냈다.
- 증발은 많은 변수의 영향을 받는 현상이다. D 제곱 법칙은 이 현상을 설명하는 간단하지만 쓸모 있는 도구이다. 단점은 온도, 습도, 기압, 액적의 모양, 바람이나 음향장의 난류 때문에 생기는 차이를 고려하지 않는다는 것이다. 여러 조건에서 측정하여 이 효과들을 고려하려 했으며, 그래서 허용하는 답의 구간이 넓어졌다.
- 마침내 종횡비, 즉 장축과 단축의 비가 1이 되었을 때 γ 값이 크게 바뀌는 것을 보라. 이는 사용한 모형이 현상의 전 범위를 설명하기에는 너무 단순함을 보여 준다. 이 문제의 교훈은 George Box의 말로 요약할 수 있다. “모든 모형은 틀렸지만, 어떤 모형은 쓸모 있다.”

E5 표면 장력 정하기

a) 표면 장력 순위

어느 액체의 표면 장력이 더 낮은지는 여러 방법으로 빨리 정할 수 있다. 한 가지 아이디어는 두 액체의 비슷한 크기 액적을 책상 위에 놓고 눈으로 보아

U_{II} [V]	U_I [V]	σ [mN/m]
16.3	9.6	25.3
17.8	10.3	24.4
14.3	8.5	25.8
16.4	9.7	25.5
15.6	9.0	24.3

액체 I의 접촉각이 훨씬 작음을 알아채는 것이다. 다른 접근은 부양기에 비슷한 크기의 액적을 띄워 변형시키거나 터뜨려 보고, 액체 I에서 훨씬 낮은 전압에서 그런 일이 일어남을 보는 것이다. 또는 과제 b)를 정량적으로 풀기만 해도 올바른 정성적 답을 얻는다.

b) 미지의 표면 장력

액적의 모양은 부피 V와 비 P^2/σ에만 의존하지만 그 방식은 알려져 있지 않다. 과제를 풀려면 부피가 같은($V_I = V_{II}$ = 일정) 액적 쌍(액체마다 하나씩)을 재고 모양이 같아지도록 전압을 건다. 이는 $P^2/\sigma \propto U^2/\sigma$ = 일정을 뜻한다.
실험에서는 이미 갖춘 확대 장치를 쓰고, 먼저 액체 II의 액적을 띄워 분명히 구가 아니게 되도록 전압 U_{II}에서 변형시킨다. σ를 정밀하게 재려면 액적을 크게 변형시켜야 한다. 그렇지 않으면 전체 모양에 대한 P^2/σ의 기여가 너무 작아진다. 화면에 액적의 모양을 표시한다. 다음으로 액적을 부양기에서 치우고 부피가 같은 액체 I의 액적을 띄운다. 모양이 앞의 표시와 맞도록 부양기의 전압을 맞추고 이 전압 U_I도 적는다. 같은 부피의 액적을 얻으려면, 처음에 조금 더 큰 액적을 띄우고 조금 기다려 (앞에서 살펴본) 증발로 부피를 미세 조정해 모양을 정확히 맞추는 것이 좋은 전략이다.

마지막으로 표면 장력은 알려진 표면 장력 σ_{II}로 다음과 같이 정할 수 있다.

$$\sigma_{\mathrm{I}} = \frac{U_{\mathrm{I}}^2}{U_{\mathrm{II}}^2}\sigma_{\mathrm{II}} \tag{18}$$

정확도를 높이려고 측정을 5번 반복한다.

$$\boxed{\sigma_{\mathrm{I}} = (25.1 \pm 1.3)\ \mathrm{mN/m}} \tag{19}$$

E5 채점 기준

ID	채점 항목	점수
E5-A1	표면 장력을 비교하는 효과적인 아이디어.	**0.2 pts**
E5-A2	올바른 결론 $\sigma_I < \sigma_{II}$.	**0.3 pts**
E5-B1	대칭을 쓰는 아이디어, 즉 V = 일정, 그리고 (적어도 짝지어) 같은 액적 모양. 배율 ≤ 10으로 접촉각 접근을 썼다면 과제 E5b 전체에 점수를 주지 않음	**0.5 pts**
E5-B2	P^2/σ = 일정을 얻거나 씀.	**0.2 pts**
E5-B3	올바른 측정 절차를 (전압 쌍으로 증명) 5번 반복. 반복 3번 이상 반복 1번 이상	**0.3 pts** 0.2 pts 0.1 pts
E5-B4	σ_I의 결과가 [21, 29] mN/m 안 $\sigma_I \in [19, 21[\cup]29, 31]$ mN/m $\sigma_I \in [16, 19[\cup]31, 34]$ mN/m	**1.0 pts** 0.5 pts 0.2 pts
	총점	**2.5 pts**

심화 내용

- 액체 I은 IPA(아이소프로판올)이며, 문헌에 따르면 표면 장력이 21.8 mN/m이다. 이 방법은 표면 장력을 조금 크게 어림하지만, 측정 기법을 고려하면 꽤 정확하다.

E6 액적의 폭발

a) 맞춤 매개변수

서로 다른 등가 지름 D의 액적에 대해 폭발 전압을 잰다. 식 (4)에 따르면 ${U_{max}}^2$을 $1/D$에 대해 그리면 직선이 될 것이며, 상수 α와 β는 각각 이 직선의 기울기와 y절편으로 정해진다. 얻은 데이터는 표 5에, 해당 그래프는 그림 12에 있다. 얻은 α와 β 값은 다음과 같다.

$$\boxed{\alpha = (569 \pm 54)\ \mathrm{V^2{\cdot}mm}, \quad \beta = (-36 \pm 26)\ \mathrm{V^2}}$$

$2a$ [mm]	$2b$ [mm]	D [mm]	$1/D$ [mm^{-1}]	$U_{\max}$ [V]	$U_{\max}^2$ [V^2]
73	63	1.70	0.590	17.7	313.3
87	65	1.93	0.519	15.9	252.8
78	68	1.82	0.550	16.7	278.9
140	71	2.72	0.367	13.2	174.2
122	62	2.38	0.421	14.1	198.8
99	59	2.03	0.492	15.6	243.4
102	70	2.19	0.456	14.6	213.2
80	52	1.69	0.592	17.5	306.3
142	66	2.68	0.373	13.1	171.6
117	72	2.43	0.412	13.8	190.4
113	67	2.32	0.432	14.6	213.2
87	52	1.79	0.559	16.7	278.9
165	87	3.25	0.308	12.5	156.3

표 5: 폭발하는 액적의 측정에 해당하는 데이터. 액적의 축은 화면에서 mm로 잰 것이다. 배율은 41이다.

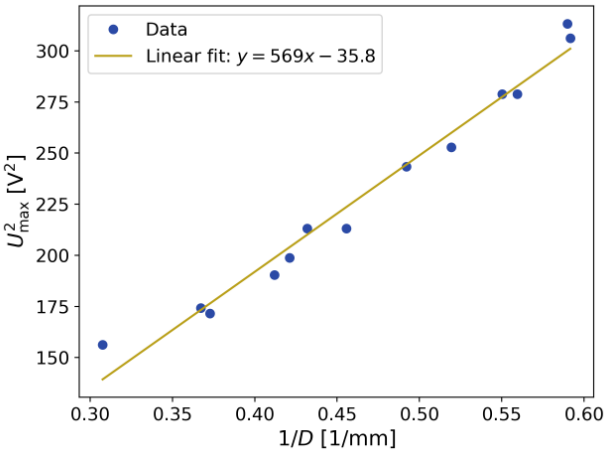


그림 12: $U_{max}{}^2$ 대 $1/D$ 그래프.

떠 있는 액적의 등가 지름 D는 과제 E4에서 설명한 방법으로 정한다. 액적을 타원체로 근사하는 것은 액적이 둥글 때 가장 정확하므로, 액적의 지름은 비교적 낮은 전압에서 재야 한다. 액적이 폭발하기까지와 지름을 재는 사이의 증발을 줄이려면, 액적의 모양을 보며 전압을 꽤 높은 값까지 빨리 올려야 한다. 그다음 액적이 폭발할 때까지 전압을 0.1 V씩 바꾼다. 큰 액적이 폭발하면 남은 것이 더 작은 액적을 이루는 경우가 많은데, 이를 다음 측정에 쓰면 D 값의 변화를 편리하게 크게 얻을 수 있다.

b) 띄울 수 있는 최대 지름

이 과제에서는 액적이 뜨지 못하게 하는 두 효과를 고려한다.

1. 건 전압이 너무 높으면 앞 소과제에서 분석했듯이 액적이 폭발한다. 이는 D에 따라 줄어드는 전압의 위 한계 $U_{max} = U_{max}(D)$를 준다.

2. 건 전압이 너무 낮으면 액적이 떨어진다. 이는 D에 따라 커지는 아래 한계 $U_{min} = U_{min}(D)$를 준다.

띄울 수 있는 가장 큰 액적의 등가 지름 D_{max}의 어림값은 위의 두 제약에 해당하는 곡선의 교점으로 얻는다. 폭발 전압은 앞 소과제에서 분석했으므로, 남은 것은 U_{min}과 D 사이의 의존성을 이해하는 것이다. 앞 소과제처럼 큰 액적을 터뜨려 작은 액적을 만들 수 있다는 점에 주목하라. 기록한 측정값은 표 6에 있으며, U_{min}과 U_{max}를 D에 대해 그림 13에 그렸다.

$2a$ [mm]	$2b$ [mm]	D [mm]	$U_{\min}$ [V]
99	76	2.61	8.7
87	69	2.32	8.4
124	80	3.08	10.0
121	82	3.07	9.9
63	58	1.77	7.7
74	61	1.99	8.0
54	45	1.47	7.7
86	65	2.26	8.9
125	83	3.14	10.1
124	84	3.14	10.0
114	85	2.97	9.6
80	60	2.09	8.0
111	77	2.82	9.3
83	62	2.17	8.1
148	81	3.48	11.0
134	76	3.19	10.1
69	54	1.83	7.7
58	49	1.58	7.2
105	69	2.63	8.9
89	62	2.27	8.2

표 6: 떨어지는 전압의 측정에 해당하는 데이터. 액적의 축은 화면에서 mm로 잰 것이다. 배율은 35이다.

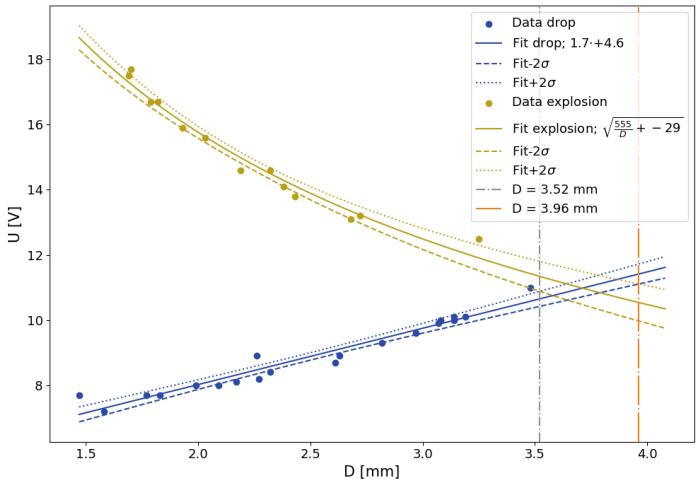


그림 13: 맞춘 곡선과 함께 U_{min}과 U_{max}를 D에 대해 그린 것.

그림에서 보듯이 떨어지는 전압은 아핀 일차 함수 $U_{min} = aD + b$로 꽤 잘 나타난다. 따라서 식 (4)에 따라 D_{max}는 다음을 풀어 얻는다.

$$\sqrt{\frac{\alpha}{D} + \beta} = aD + b.$$

이 방정식은 예를 들어 그래프로, 또는 이분법으로 풀 수 있다. 다음을 얻는다.

$$\boxed{D_{\max} \approx (3.7^{+0.3}_{-0.2})\ \text{mm}}$$

이것이 구하는 결과이다.

E6 채점 기준

ID	채점 항목	점수
E6-A1	올바른 선형화 (즉 $U_{max}{}^2$ 대 $1/D$ 그래프의 기울기가 α, y절편이 β라는 아이디어). $U_{max}{}^2$과 $1/D$ 데이터 표만 있어도 이 점수의 증거로 충분함.	**0.4 pts**
E6-A2	폭발 곡선에 대해 데이터 점 10개 이상 잼 (주사기의 부정확한 눈금으로 부피를 쟀다면 여기서 점수 없음).	**0.5 pts**
	데이터 점 8개 이상	0.4 pts
	데이터 점 6개 이상	0.3 pts
	데이터 점 4개 이상	0.2 pts
	데이터 점 2개 이상	0.1 pts
E6-A3	D 값이 적어도 1 mm 범위에 걸침.	**0.3 pts**
E6-A4	올바른 값: α ∈ [500, 700] $V^2 \cdot$ mm.	**0.4 pts**
	α ∈ [400, 500[∪]700, 800] V^2·mm	0.2 pts
E6-A5	올바른 값: β ∈ [−60, 60] V^2.	**0.4 pts**
	β ∈ [−80, −60[∪]60, 80] V^2	0.2 pts
E6-B1	최대 액적 크기가 떨어짐 곡선과 폭발 곡선의 교점에서 찾아진다는 아이디어.	**0.5 pts**
E6-B2	떨어지는 전압에 대해 데이터 점 10개 이상 잼 (주사기의 부정확한 눈금으로 부피를 쟀다면 여기서 점수 없음).	**0.5 pts**
	데이터 점 8개 이상	0.4 pts
	데이터 점 6개 이상	0.3 pts
	데이터 점 4개 이상	0.2 pts
	데이터 점 2개 이상	0.1 pts
E6-B3	D 값이 적어도 1 mm 범위에 걸침.	**0.2 pts**
E6-B4	D > 3 mm인 점을 적어도 하나 잼.	**0.1 pts**
E6-B5	U_{min}과 U_{max}의 교점을 정하는 합리적인 방법 (예: 그래프 풀이나 이분법).	**0.3 pts**
E6-B6	최대 지름 D_{max} ∈ [3.5, 6] mm	**0.4 pts**
	총점	**4.0 pts**

E7 신비한 선

가로선은 액적이 꽤 납작할 때, 보통 폭발 전압에 이르기 약 0.5 V 전에 생긴다. 정렬이 완벽하지 않으면(육각 나사로 조정 가능) 선이 액적의 아래나 위에 나타날 수도 있다. 그림 14에서 이 현상의 사진을 볼 수 있다.

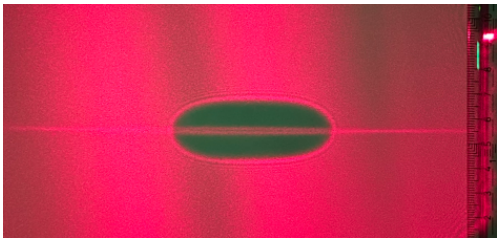


그림 14: 선 현상의 사진.

액적의 광학 효과를 분석하려면, 세로 단면에서는 사이에 액체가 있는 두 평볼록 렌즈의 겹침으로, 가로 단면에서는 둥근(원통) 렌즈로 모형화할 수 있다. 선은 세로 평면에서 진행하는 다이오드의 입사 광선이 그림 17의 시뮬레이션처럼 화면의 한 점에 모일 때 생긴다. 액적의 크기는 다른 모든 관련 거리보다 훨씬 작으므로 입사 광선과 나가는 광선 모두 광축에 거의 나란하다. 따라서 그림 17의 상황은 액적의 길이가 다음과 같을 때 얻어진다.

$$L \approx 2f, \tag{20}$$

여기서 f는 세로 방향 렌즈의 초점 거리이다. 액적 안의 광선 진행은 그림 15에서 볼 수 있다.

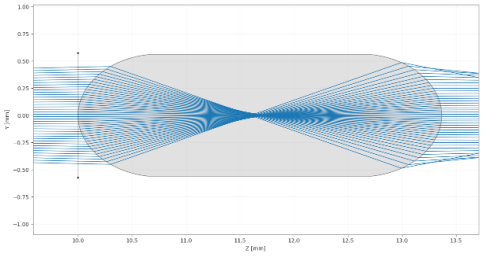


그림 15: 그림 17의 일부를 확대한 것.

이 관찰로 분석하는 액체의 굴절률 n을 정한다. 초점 거리 f는 $f = R/(n-1)$로 주어지며, R은 세로 평면에서 (액적 끝 근처) 두 렌즈의 곡률 반지름이다. 따라서 식 (20)에 따라 액체의 굴절률은 다음과 같이 정할 수 있다.

$$n = \frac{L}{L - 2R}. \tag{21}$$

렌즈 하나의 곡률 반지름 R을 정하는 한 방법은 다음과 같다. 먼저 선이 보일 때 떠 있는 액적의 윤곽을 스케치한다. 그다음 액적의 세로 가운데 근처에서 윤곽에 수직인 두 직선을 긋는다. 액적의 가장 바깥 점에서 이 두 직선의 교점까지 거리가 R이다. 이는 그림 16과 같다. 결과의 정밀도를 높이려고 이 측정을

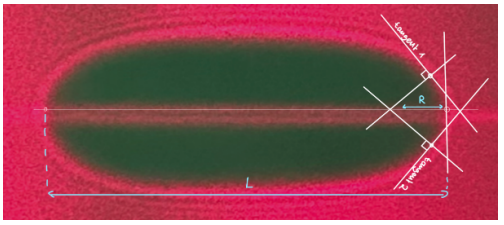


그림 16: 자를 써서 주어진 액적의 R과 L을 정하는 기하 작도.

여러 번 되풀이한다. 최종 결과는 개별 측정의 평균이다.

$$\boxed{n = 1.34 \pm 0.1} \tag{22}$$

L [cm]	R [cm]	n
15.2	2.2	1.41
21.2	2.45	1.30
17.5	2.2	1.34
17.5	2.0	1.30
19.7	2.7	1.38

표 7: E7의 실험 데이터

가로 방향의 굴절 때문에, 그림 18의 시뮬레이션처럼 점 대신 선이 생긴다.

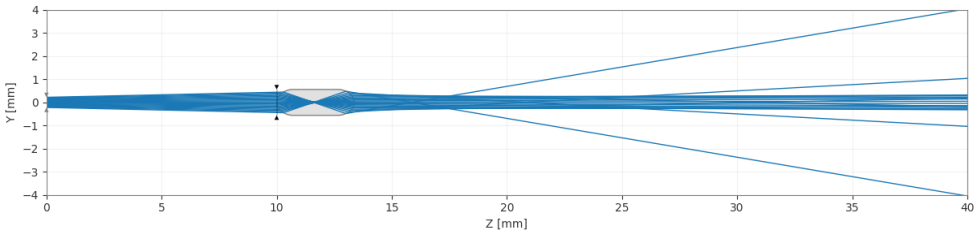


그림 17: 다이오드의 입사 광선을 화면의 한 점에 모으는 액적의 시뮬레이션.

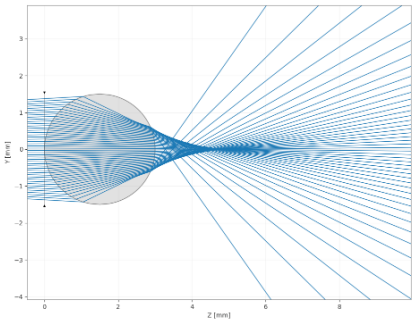


그림 18: 액적 중심을 지나는 가로 단면에서 광선의 시뮬레이션.

E7 채점 기준

ID	채점 항목	점수
E7-1	세로 기여: $L \approx 2f$일 때 선이 생긴다는 아이디어와 그림 15 같은 스케치. 광선 진행이 물리적으로 옳음. 대칭을 글로 밝히거나 같은 각에 표시함.	**0.8 pts**
E7-2	가로 기여: 점 대신 선이 생기는 까닭을 설명함, 그림 18. 표시함. 세로와 가로 기여로 나누는 아이디어	**0.4 pts** 0.2 pts
E7-3	올바른 관계 $L = 2Rn/(n-1)$, 또는 스넬 법칙을 쓰고 관련 각을 분명히 표시함 (둘 다 E7-1을 받았을 때만). 틀린 관계 $L = 2R/(n-1)$ - 렌즈 제작자 공식을 쓰면서 렌즈의 나머지 반이 액체임을 잊음 (E7-1을 받았을 때)	**0.4 pts** 0.1 pts
E7-4	R을 어림하는 물리적으로 가능한 방법, 합리적인 R 값 ($R \in [0.1, 0.8]$ mm).	**0.4 pts**
E7-5 E7-5 E7-5	측정 3번 이상 (측정은 (R, L) 쌍이나 스넬 법칙의 각으로 이루어짐). 측정 2번 이상. 측정 1번 이상.	**0.3 pts** 0.2 pts 0.1 pts
E7-6	굴절률 $n \in [1.2, 1.6]$.	**0.2 pts**
	총점	**2.5 pts**

심화 내용

- 미지의 빨간 액체는 빨간 식용 색소를 탄 물이다.
- 위의 설명에 따르면 선은 액적의 길이 L과 곡률 반지름 R이 완벽하게 맞을 때만 보여야 한다. 그러면 실제로 선 현상을 보기가 매우 어렵다고 예상할 수 있다. 그러나 두 렌즈의 수차 때문에 조건이 다소 느슨해진다. 입사 광선은 한 점이 아니라 짧은 구간에 모이며, 이 덕분에 제약에 어느 정도 여유가 생긴다. 이 현상은 비점수차 렌즈와 비슷하다.
- 빛이 액적을 지나 그림자를 만들 때, 프라운호퍼 회절 때문에 빛이 퍼지고 간섭하여 완벽하게 날카로운 가장자리 대신 그림자 둘레에 밝고 어두운 무늬가 생긴다. 이 효과는 액적이 작거나 관찰 화면이 액적에서 멀 때 더 두드러진다. 그래서 겉보기 가장자리 위치가 측정 장치에 따라 달라지고, 어림한 액적 크기에 계통 오차가 생길 수 있다.

E8 실험 기법

E8 채점 기준

ID	채점 항목	점수
E8-1	실험 장치 상자를 조각냄	-0.2 pts
E8-2	LED가 깨지거나 터짐. 깨진 LED마다	-0.1 pts
E8-3	장비 일부가 없어짐.	-0.1 pts
E8-4	전기 제어 상자가 고장 남	-0.1 pts
	총점	**-0.5 pts**