제3회 걸프 물리 올림피아드 — 실험 대회 풀이

오만 무스카트 — 2019년 10월 8일

오차 분석

아래에서 표로 정리한 데이터의 평균의 오차를 계산할 때는 언제나 표준 편차를 쓴다. x_i, i in $\{1, ..., N\}$ 꼴의 데이터 점이 N개 있다고 하면, 평균은

$$x_{\text{avg}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i,$$

이고, 평균의 표준 편차는

$$\Delta x_{\text{avg}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - x_{\text{avg}})^2}{N(N-1)}}.$$

식을 통한 오차 전파에는 오차를 제곱으로 더하는 피타고라스 규칙을 쓴다(정확도는 떨어지지만 최소-최대를 써도 된다). 일반적으로 변수 y가 오차 Δx_i를 가진 변수 x_i, i in $\{1, ... N\}$의 함수이면, y의 오차는 다음과 같다.

$$\Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 \Delta x_i^2}.$$

오차를 구하는 방법을 밝히지 않으면 언제나 오차 분석 점수의 50 %를 뺀다.

문제 E1. 물질의 자기적 성질 (20점)

A부분. 주사기 바늘의 지름 (3점)

정확도를 높이려면 회절된 레이저의 경로 길이를 최대로 해야 한다. 그래야 화면 위 극대 사이의 간격이 커지기 때문이다. **(0.2점)**
거울로 레이저를 책상 한쪽 끝에서 다른 쪽 끝으로 반사시켰다가 되돌리면 경로 길이를 두 배로 늘릴 수 있다. **(0.3점)**

두 바늘 모두 바늘에서 거울까지, 거울에서 화면까지의 거리가 $L_0 = 119\ \text{cm} \pm 0.5\ \text{cm}$였다. 그러면 광 경로 길이는 $L = 2L_0 = 238\ \text{cm} \pm 0.5\ \text{cm}$이다. **(0.3점)**
화면에서 이웃한 두 극대 사이의 광 경로차는 λ이며, 이는 화면 위 거리 $l_1 = (\lambda/d)L$에 해당한다. d는 주사기 바늘의 지름이다. 정확도를 높이려면 측정이 되도록 많은 극대 N을 덮어야 한다. 그러면 간격은 $l_N = NL\lambda/d$이고 $d = NL\lambda/l_N$이다. **(0.4점)**

흰 바늘에 대해 다음과 같이 쟀다:

i	N	l_N(mm)	l_N/N(mm)	d(mm)
1	22	89	4.05	0.313
2	18	74	4.11	0.308
3	20	79	3.95	0.321

측정 1번 **(0.4/0.6점)**
측정 2번 **(0.5/0.6점)**
측정 3번 이상 **(0.6/0.6점)**

평균 지름은 $d = 0.31$ mm **(0.1점)**
오차는 $\Delta d = 0.004$ mm이다. **(0.2점)**

초록 바늘에 대해 다음과 같이 쟀다:

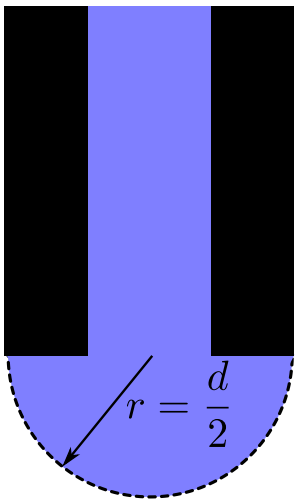
i	N	l_N(mm)	l_N/N(mm)	d(mm)
1	18	98	5.44	0.233
2	15	76	5.07	0.250
3	16	85	5.31	0.238

측정 1번 **(0.4/0.6점)**
측정 2번 **(0.5/0.6점)**
측정 3번 이상 **(0.6/0.6점)**

평균 지름은 $d = 0.24$ mm **(0.1점)**
오차는 $\Delta d = 0.005$ mm이다. **(0.2점)**

B부분. 물의 표면 장력 (4점)

장치를 올바르게 설치하고 가운데 부분을 아래로 당기면, 바늘이 어느 점에서 물방울을 떨어뜨리기 시작한다. 이는 표면 장력이 물을 아래로 미는 추가 압력을 버티지 못하기 때문이다. 임계 상황은 물방울의 곡률 반지름이 가장 작을 때, 즉 추가 압력 $2\sigma/r$가 가장 클 때임에 주목하라. 이는 아래 그림처럼 $r = d/2$일 때 일어난다. **(0.6점)**



압력 균형은

$$2\sigma/r = \rho g h,$$

이며, $\rho g h$는 바늘에 대한 높이 h의 물기둥이 주는 압력이다. h를 재면 표면 장력을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma = \frac{\rho g h r}{2} = \frac{\rho g h d}{4}. \quad (1)$$

(0.6점)

흰 바늘에 대해 다음과 같이 반복 측정했다:

i	h(mm)
1	84
2	80
3	83
4	82
5	83

측정 1번 **(0.2/0.6점)**
측정 2-4번 **(0.4/0.6점)**
측정 5번 이상 **(0.6/0.6점)**

평균 높이는 $h_{avg} = 82.4$ mm이고 오차는 $\Delta h_{avg} = 0.7$ mm이며, (1)을 쓰면 $\sigma = 63.4$ mN/m, 오차는 $\Delta\sigma = \sigma\sqrt{((\Delta h_{avg}/h_{avg})^2 + (\Delta d/d)^2)} = 1$ mN/m이다.

값 **(0.3점)**
오차 **(0.4점)**

초록 바늘의 측정값은 다음과 같다:

i	h(mm)
1	114
2	113
3	116
4	112
5	113

측정 1번 **(0.2/0.6점)**
측정 2-4번 **(0.4/0.6점)**
측정 5번 이상 **(0.6/0.6점)**

평균 높이는 $h_{avg} = 113.6$ mm이고 오차는 $\Delta h_{max} = 0.7$ mm이다. 이로부터 $\sigma = 67.0$ mN/m, 오차 $\Delta\sigma = 1.5$ mN/m를 얻는다.

값 **(0.3점)**
오차 **(0.4점)**

표면 장력의 최종 식은 흰 바늘과 초록 바늘의 결과를 평균해 얻는다. 그러면

$\sigma = (\sigma_{white} + \sigma_{green})/2 = 65.2$ mN/m, **(0.1점)**
$\Delta\sigma = \sqrt{(\Delta\sigma_{white}^2/2 + \Delta\sigma_{green}^2/2)} = 1.3$ mN/m. **(0.1점)**

C부분. 흑연의 자기 감수율 (4점)

측정 결과가 사실상 모두 같으므로 자석 지름은 한 번만 재도 충분하다. 결과의 오차는 자의 정확도에서 오며 0.3 mm로 잡는다. 자석의 지름은 $d = 10.0$ mm로 쟀다.

값 **(0.3점)**
오차 **(0.2점)**

두 배치 모두에서 흑연은 중력, 수직항력, 자기력의 세 힘을 받으며 모두 균형을 이루고, 자기력은 수평에 대해 45° 각을 이룬다. 중력만 받는다면 흑연은 물 표면을 따라 가속도 $a_g \approx ga$로(작은 각 근사를 씀) 가속하기 시작할 것이다(수직항력은 표면에 수직이므로 기여하지 않는다). 각이 작으므로 이는 같은 크기의 수평 가속도가 된다. 이는 다음 공식으로 주어지는 자석에 의한 가속도로 상쇄된다.

힘 균형 설명 **(0.5점)**

$$a_m = \frac{F}{m} = (|\chi_g - \chi_w|)\frac{1}{2\mu_0}\frac{\mathrm{d}B^2}{\mathrm{d}z} = (|\chi_g - \chi_w|)\frac{\partial w}{\partial z}.$$

자석이 흑연을 45° 각으로 밀므로 힘 균형은 $a_m/\sqrt{2} = a_g$이다. 이로써 χ_g를 잰 양 α와 $\partial w/\partial z$로 나타낼 수 있다:

$$\chi_g = \chi_w - \left|\frac{\sqrt{2}g\alpha}{\frac{\partial w}{\partial z}}\right|. \qquad (2)$$

(0.6점)

흑연은 물보다 감수율의 크기가 커야 하지만 여전히 음수이므로 부호에 주의했다. 이로써 필요한 이론 계산을 마친다.

정삼각형으로 된 첫째 배치에서 벽으로부터의 거리를 다음과 같이 쟀다:

i	l(mm)
1	12
2	10
3	11
4	10
5	11

측정 1-2번 **(0.3/0.5점)**
측정 3-4번 **(0.4/0.5점)**
측정 5번 이상 **(0.5/0.5점)**

이로부터 평균 $l = 10.8$ mm, 오차 $\Delta l = 0.4$ mm + 0.5 mm = 0.9 mm를 얻는다. 여기서 자의 측정 오차와 표 데이터의 표준 편차를 더했다(반복 측정에서는 보통 자의 정확도를 빼지만, 그것은 대개 자의 정확도가 표준 편차보다 훨씬 작기 때문이다).

해당하는 표면 기울기는 그래프에서 읽을 수 있지만, 먼저 l을 $\lambda = \sqrt{(\sigma/(\rho g))} = 2.58$ mm, $\Delta\lambda = 0.03$ mm 단위로 바꿔야 한다. 따라서 $l = (l/2.58\text{ mm})\lambda = 4.2\lambda$, $\Delta l = 0.4\lambda$이다. 그림 7에서 다음을 잰다.

$$\alpha = 2.4 \times 10^{-3}\,\text{rad}.$$
$$\Delta\alpha = 1.8 \times 10^{-3}\,\text{rad}$$

오차는 $\alpha(\lambda \pm \Delta\lambda)$를 보고 그림에서 잰 것이다. 오차가 크지만 그래프가 지수적이므로 예상할 수 있는 일이다.

자기 압력 기울기를 읽으려면 먼저 흑연이 자석 표면에서 얼마나 떨어져 있는지 계산한다. 이 거리는 한 변의 길이가 $d = 10$ mm $\pm$ 0.3 mm인 정삼각형의 높이임을 알 수 있다.

따라서 거리는 간단히 $l_1 = (\sqrt{3}/2)d = 8.7\ \text{mm} \pm 0.3\ \text{mm}$이다. 그림 8에서 자기 압력 기울기를 $\partial w/\partial z = 6.1 \times 10^5\ \text{J/m}^4 \pm 0.9 \times 10^5\ \text{J/m}^4$로 읽는다.

마지막으로 식 (2)를 쓰면

$$\chi_g = 6.4 \times 10^{-8}\,\text{m}^3/\text{kg} \pm 4 \times 10^{-8}\,\text{m}^3/\text{kg}.$$

그래프에서 데이터를 제대로 읽음 **(0.2점)**
χ_g의 최종값 **(0.1점)**
오차 전파 **(0.3점)**

둘째 배치에서도 같은 계산을 거쳐 χ_g의 다른 어림값을 얻는다. 둘째 배치의 측정값은 아래 표와 같다.

i	l(mm)
1	7
2	8
3	8
4	6
5	7

측정 1-2번 **(0.3/0.5점)**
측정 3-4번 **(0.4/0.5점)**
측정 5번 이상 **(0.5/0.5점)**

$l = 7.2\ \text{mm}$, $\Delta l = 0.4\ \text{mm} + 0.5\ \text{mm} = 0.9\ \text{mm}$를 얻는다. 이는 $l = 2.8\lambda \pm 0.4\lambda$에 해당한다. 그림 7에서 $\alpha = 1.7 \times 10^{-2}\ \text{rad} \pm 0.9 \times 10^{-2}\ \text{rad}$를 읽는다.

이 경우에는 직각 이등변 삼각형이 생긴다. 흑연이 자석 표면에서 $d/2 = 5\ \text{mm} \pm 0.15\ \text{mm}$ 떨어져 있음을 쉽게 알 수 있다. 이로부터 자기 압력 기울기는 $\partial w/\partial z = 4.6 \times 10^6\ \text{J/m}^4 \pm 0.4 \times 10^6\ \text{J/m}^4$이다. 이는 감수율 $\chi_g = 6.0 \times 10^{-8}\ \text{kg/m}^3 \pm 3\ \text{kg/m}^3$을 준다.

그래프에서 데이터를 제대로 읽음 **(0.2점)**
χ_g의 최종값 **(0.1점)**
오차 전파 **(0.3점)**

마지막으로 두 결과를 평균하면

$$\chi_g = 6.2 \times 10^{-8}\,\text{kg/m}^3 \pm 4 \times 10^{-8}\,\text{kg/m}^3.$$

최종 답 **(0.1점)**
오차 **(0.1점)**

D부분. 강자성 띠의 상대 투자율 (9점)

i. (1점) 전지 홀더의 출력 도선의 전압은 $\mathscr{E} = 3.17$ V로 잴 수 있으며, 불확도는 필요 없다.
(0.5점)

실험 장치를 올바르게 설치한 뒤, 영점 오프셋을 $V_0 = 2$ mV로 잰다. **(0.5점)**

ii. (4점) 띠 사이 자기장 세기의 식 $B = B_0\cosh(z/\lambda)$를 정리하면

$$\cosh^{-1}(B/B_0) = z/\lambda. \qquad \textbf{(0.5점)}$$

z와 V를 잴 수 있고, 최대 자기장 세기 $B_{max} = 3\ \text{V} \cdot (10\ \mu\text{T}/1\ \text{mV}) = 30\ \text{mT}$가 $V = \mathscr{E}$에서 측정됨에 주목하면 V를 자기장 세기 B로 바꿀 수 있다. 따라서

$$B = B_{\max}\frac{V}{\mathscr{E}} = 30\,\text{mT} \cdot \frac{V}{\mathscr{E}}. \qquad (3)$$

(0.3점)

이는 자기장 세기가 전압에 선형으로 비례한다는 사실에 기댄다. 측정 데이터를 선형화하려면 B_0을 알아야 한다. $\cosh(0) = 1$이므로 $B_0 = B(z = 0)$임에 주목하면 이를 찾을 수 있다. 이는 측정 데이터에서 $B_0 = 0.227$ T로 읽을 수 있다. **(0.2점)**

이제 $\cosh^{-1}(B/B_0)$를 z에 대해 그리면 기울기 $1/\lambda$인 직선 그래프를 얻는다. 표로 정리한 데이터는 아래와 같다.

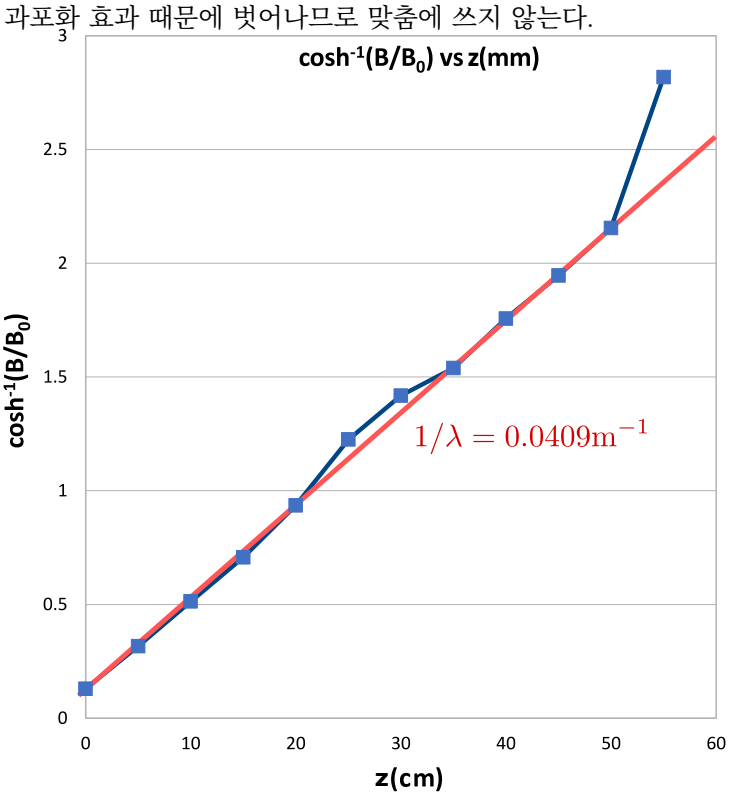
z(cm)	V(mV)	B(mT)	$\cosh^{-1}(B/B_0)$
0	24	0.227	0.130
5	25	0.237	0.316
10	27	0.256	0.513
15	30	0.284	0.707
20	35	0.331	0.936
25	44	0.416	1.225
30	52	0.492	1.418
35	58	0.549	1.539
40	71	0.672	1.757
45	85	0.804	1.946
50	104	0.984	2.154
55	200	1.893	2.818

측정 3번 미만 **(0.0/0.4점)**
측정 3-11번 **(0.2/0.4점)**
올바른 측정 수 **(0.4/0.4점)**

계산 **(0.4점)**

그래프에서 직선이 원점을 지날 필요는 없다는 점이 중요하다. 계통 오차가 모든 점에 똑같이 영향을 주기 때문이다. 예를 들어 잰 $z = 0$은 자석의 물리적 크기 때문에 실제 원점과 일치하지 않는다. 또 그래프의 마지막 점은

과포화 효과 때문에 벗어나므로 맞춤에 쓰지 않는다.



그래프 **(1.0점)**

그래프에서 기울기를 $1/\lambda = 0.0409\ \mathrm{m}^{-1}$로 읽는다. **(0.2점)**

불확도는 점들을 지날 것으로 합리적으로 기대할 수 있는 직선들의 퍼짐을 보고 어림할 수 있다. 이로부터 $\Delta(1/\lambda) = 0.000\ 72\ \mathrm{m}^{-1}$이다. **(0.2점)**

이제 $\mu = 2\lambda^2/(\delta h)$이다. 틈의 너비 h를 자로 $h = 7.7\ \mathrm{mm} \pm 0.3\ \mathrm{mm}$로 잰다. 오차는 자의 오차가 이웃한 두 눈금 사이 거리 $0.1\ \mathrm{mm}$의 절반, 또는 눈의 좋고 나쁨에 따라 그보다 조금 작다는 점에 주목해 구한다. 마지막으로 $\mu = 57\ 000$을 계산한다. **(0.4점)**
오차는

$$\Delta\mu = \mu\sqrt{\left(2\frac{\Delta(1/\lambda)}{(1/\lambda)}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2} = 3000. \qquad \textbf{(0.4점)}$$

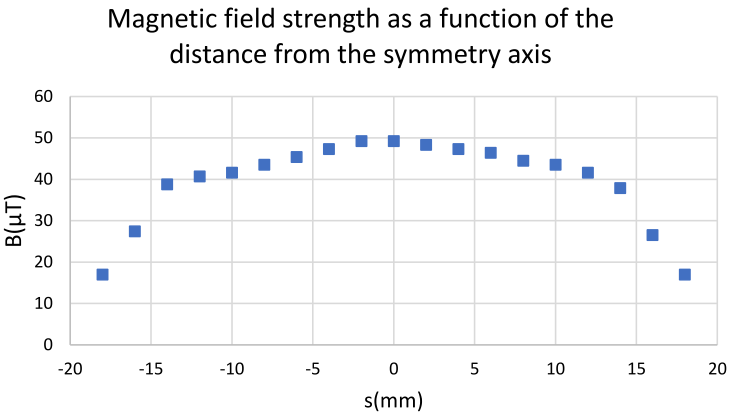
iii. (2점) 표로 정리한 측정 데이터는 아래와 같다. 전압은 식 (3)으로 테슬라로 바꾼다.

x(mm)	s(mm)	V(mV)	B(mT)
0	-18	18	0.170
2	-16	29	0.274
4	-14	41	0.388
6	-12	43	0.407
8	-10	44	0.416
10	-8	46	0.435
12	-6	48	0.454
14	-4	50	0.473
16	-2	52	0.492
18	0	52	0.492
20	2	51	0.483
22	4	50	0.473
24	6	49	0.464
26	8	47	0.445
28	10	46	0.435
30	12	44	0.416
32	14	40	0.379
34	16	28	0.265
36	18	18	0.170

측정 3번 미만 **(0.1/0.6점)**
측정 3-5번 **(0.3/0.6점)**
측정 6-7번 **(0.4/0.6점)**
올바른 측정 수 **(0.6/0.6점)**

계산 **(0.4점)**

x는 첫 데이터 점을 기준으로, s는 대칭축(위치 $x = 18$ mm)을 기준으로 잰 것이다. B 대 s 그래프는 아래와 같다.



그래프 **(0.6점)**

보듯이 자기장 세기는 띠의 너비에 걸쳐 ~ 10 %까지의 작은 편차로 균일하다. 띠 밖에서는 자기장 세기가 빠르게 떨어지기 시작한다.

(0.4점)

iv. (2점) 주된 아이디어는 자기력선이 보존된다는 사실, 즉 닫힌 면을 지나는 자기 선속이 0이라는 것이다. 이는 가우스 법칙과 같다. 이 문제의 맥락에서는, 틈으로 들어오는 선속이 강자성 띠를 따라 흐르는 선속의 감소에서 와야 함을 뜻한다. μ 값이 크므로 띠 밖으로 흐르는 선속은 무시할 수 있다.

띠를 따라 흐르는 전체 선속을 Φ_{in}, 띠를 따라 z축, z에 수직인 수평 방향으로 x축을 잡자. 또 틈과 만나는 $x-z$ 평면을 $z=0$에서 z까지 지나는 선속을 Φ_z라 하자. 그러면 가우스 법칙은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Phi_{\text{in}}(z) - \Phi_{\text{in}}(z=0) = \Phi_z. \tag{4}$$

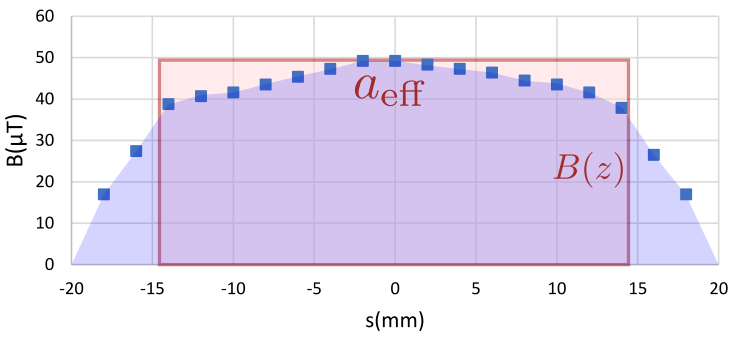
(0.5점)

강자성체 안의 선속은 지수적으로 줄어들고 표의 데이터로 보아 $\Phi_{in}(z) \gg \Phi_{in}(z=0)$이라 해도 합리적이다. **(0.1점)**

강자성체 단면 전체에서 자기장이 균일하다고 근사할 수 있다(앙페르 법칙으로 매우 정확히 확인할 수 있다). 그러면 $\Phi_{in}(z) = a\delta B_{in}(z)$이며, a는 강자성체의 너비로 $a = 30\ \text{mm} \pm 0.3\ \text{mm}$로 쟀고, $B_{in}(z)$는 강자성체 안의 자기장이다. **(0.1점)**

즉 Φ_z를 계산하면 식 (4)로 B_{in}을 구할 수 있다. Φ_z를 구하려면 자기장을 z와 x 방향으로 더해야 한다. 적분 꼴로는 $\Phi_z = \int_0^z dz' \int dx B(x, z')$이다. 이를 적분 $\Phi_z = a_{eff}\int_0^z dz' B(z')$로 단순화할 수 있으며, a_{eff}는 앞 부분에서 구한 그래프 아래 넓이가 $B(z')a_{eff}$와 같아지는 틈의 유효 너비이고, $B(z')$는 (ii)에서 구한 틈 안의 최대 자기장이다.

아래의 대략적인 그래프에서 $a_{eff} = 0.955a = 28.7$ mm를 얻는다. $0.955a = 28.7\,\text{mm}$.



그래프 등으로 a_{eff}를 구함 **(0.2점)**

남은 일은 $\int_0^z dz' B(z')$를 구하는 것뿐이다. 이는 (ii)에서 구한 표의 데이터를 사다리꼴 규칙으로 더해 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\Phi_i &= \Phi_{i-1} + \frac{B_i + B_{i-1}}{2}(z_i - z_{i-1})a_{\text{eff}} \\ &= \Phi_{i-1} + \frac{B_i + B_{i-1}}{2}\Delta A = \Phi_{i-1} + \Delta\Phi_i,\end{aligned}$$

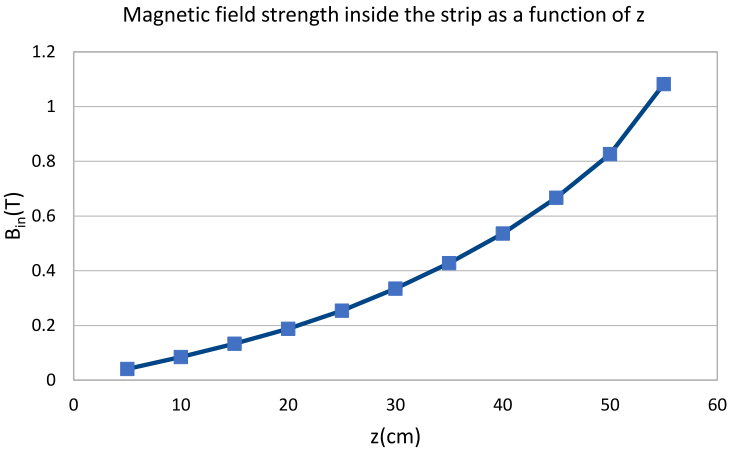
(0.3점)

여기서 $\Delta A = (z_i - z_{i-1})a_{eff} = 5\ \text{cm} \cdot 28.7\ \text{mm} = 0.001\,44\ \text{m}^2$은 마지막 구간의 유효 넓이이고 $\Delta\Phi_i = ((B_i + B_{i-1})/2)\Delta A$는 해당 면을 지나는 선속이다. 그다음 강자성체 안의 자기장은 (4)로 간단히 $B_{in} = \Phi_{in}/(a\delta)$이다.

계산한 데이터를 B_{in} 대 z 그래프와 함께 아래에 보인다.

z(cm)	B(mT)	$\Delta\Phi$(μT · m^2)	Φ(μT · m^2)	B_{in}(T)
0	-	-	0	
5	0.232	0.334	0.334	0.041
10	0.246	0.354	0.688	0.085
15	0.27	0.389	1.077	0.133
20	0.308	0.444	1.521	0.188
25	0.374	0.539	2.06	0.254
30	0.454	0.654	2.714	0.335
35	0.521	0.75	3.464	0.428
40	0.61	0.878	4.342	0.536
45	0.738	1.063	5.405	0.667
50	0.894	1.287	6.692	0.826
55	1.438	2.071	8.763	1.082

계산 **(0.3점)**



그래프 **(0.3점)**

(ii)에서 구한 그래프에서 포화 차단이 마지막 데이터 점에서 일어났으므로, 그에 해당하는 B_{in} 값을 B_s의 어림값으로 쓸 수 있다. 그러면 $B_s \sim 1.1$ T이다.

(0.2점)