제4회 걸프 물리 올림피아드 — 실험 대회 풀이

사우디아라비아 담맘 — 2022년 3월 15일

오차 분석

아래에서 표로 정리한 데이터의 평균의 오차를 계산할 때는 언제나 표준 편차를 쓴다. x_i, i in $\{1, ..., N\}$ 꼴의 데이터 점이 N개 있다고 하면, 평균은

$$x_{\text{avg}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i,$$

이고, 평균의 표준 편차는

$$\Delta x_{\text{avg}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - x_{\text{avg}})^2}{N(N-1)}}.$$

측정 기구에서 오는 개별 불확도가 있는 데이터 점을 다룰 때는(예: 캘리퍼는 0.2 mm), 그 불확도를 평균의 표준 편차에 제곱으로 더해야 한다.

식을 통한 오차 전파에는 오차를 제곱으로 더하는 피타고라스 규칙을 쓴다(정확도는 떨어지지만 최소-최대를 써도 된다). 일반적으로 변수 y가 오차 Δx_i를 가진 변수 x_i, i in $\{1, ... N\}$의 함수이면, y의 오차는 다음과 같다.

$$\Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 \Delta x_i^2}.$$

오차와 정확도에 대한 감점

- 오차를 구하는 방법을 밝히지 않았거나 풀이에서 분명하지 않으면 오차 분석 점수를 모두 뺀다.
- 대부분의 수치 값에 대해 채점 기준은 만점을 주는 구간을 정해 둔다. 수치 값이 범위를 벗어나면 얼마나 벗어났는지에 따라 점수를 뺀다. 일반적으로 답이 참값에서 Δy만큼 벗어났고 만점 구간의 반너비가 $\Delta y_v < \Delta y$이면, 학생은 수치 값 만점의 $\Delta y_v/\Delta y$만큼을 받는다. 이 비율은 $\Delta y = \Delta y_v$일 때 1에서 시작해 오차가 무한대로 갈수록 0으로 줄어든다.

문제 E1. 원통 속의 원통 (20점)

A부분. 기하적 특성 (5점)

1. (2점) 캘리퍼로 원통의 밑면 지름 $2R$과 전체 높이 H를 재어 전체 부피를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$V = \pi R^2 H. \qquad \textbf{(0.4점)}$$

잰 값은 다음과 같다.

i	$2R$(mm)	H(mm)
1	25.2	30.4
2	25.0	30.5
3	25.3	30.5
3	25.1	30.4
3	25.3	30.5

지름 측정 1번 **(0.3/0.5점)**
지름 측정 2번 **(0.4/0.5점)**
지름 측정 3번 이상 **(0.5/0.5점)**

높이 측정 1번 이상 **(0.3/0.3점)**

각 측정에는 캘리퍼의 불확도 $\Delta l = 0.2$ mm가 따른다. 이를 바탕으로 $R = (12.6 \pm 0.1)$ mm, $H = (30.5 \pm 0.2)$ mm, $V = (15.2 \pm 0.2)$ ml를 계산한다.

값이 [14.8 ml, 15.6 ml] 안 **(0.4점)**
오차 **(0.4점)**

2. (1점) 높이는 자석 양 끝의 수직선에 해당하는 표시를 원통 표면에 하거나, 멀리서 재는 방식으로 캘리퍼로 재는 것이 가장 좋다. 어느 쪽이든 목표는 원통의 높이를 잴 때 시차 효과를 없애는 것이다.
다음과 같이 쟀다.

i	h(mm)
1	9.7
2	9.5
3	9.4

측정 1번 **(0.3/0.5점)**
측정 2번 **(0.4/0.5점)**
측정 3번 이상 **(0.5/0.5점)**

평균 높이는 $h = (9.5 \pm 0.2)$ mm이다.

값이 [9.1 mm, 10.0 mm] 안 **(0.3점)**
오차 **(0.2점)**

3. (2점) 한 가지 방법은 자석의 가장자리를 겨우 스치는 광선을 관찰하는 것이다. **(0.4점)**
그리고 광선이 원통에 들어가고 나오는 곳에 표시를 한다. 이 방법이 통하는 까닭은, 그 표시들이 만드는 현의 중심으로부터의 거리가 자석의 반지름 $r = d/2$이기 때문이다. 따라서 표시 사이의 거리 a는 피타고라스 정리에 따라 r, R과 $r = \sqrt{(R^2 - a^2/4)}$로, 다시 말해 다음과 같이 이어진다.

$$d = \sqrt{4R^2 - a^2}. \qquad \textbf{(0.6점)}$$

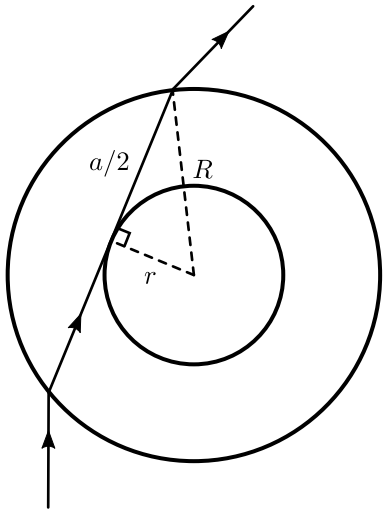


그림 1: 원통의 광학

a를 다음과 같이 쟀다:

i	a(mm)
1	22.2
2	22.5
3	21.8

측정 1번 **(0.3/0.5점)**
측정 2번 **(0.4/0.5점)**
측정 3번 이상 **(0.5/0.5점)**

이로부터 $a = (22.2 \pm 0.3)$ mm이고 $d = (12.0 \pm 0.7)$ mm이다.

값이 [11.0 mm, 13.0 mm] 안 **(0.3점)**
오차 **(0.2점)**

B부분. 역학적 특성 (3점)

1. (2점) 원통을 고무줄에 매달고 얼마나 늘어나는지 재어 즉석 저울을 만들 수 있다. 그러면 줄이 가하는 힘은 원통에 작용하는 아르키메데스 힘과 같고, 문제에 주어진 $\tau(l/l_0)$에 비례한다.

물의 밀도를 알므로, 원통이 잠겼을 때의 줄 길이 l_w, 잠기지 않았을 때 l_a, 마지막으로 (원통을 매달지 않은) 정지 상태의 l_0을 재면 충분하다. **(0.3점)**

아르키메데스 법칙을 쓰면 이 양들은 다음을 만족한다.

$$k\tau(l_a/l_0) = V\rho_{\text{cyl}}g,$$
$$k\tau(l_w/l_0) = V(\rho_{\text{cyl}} - \rho_w)g, \qquad \textbf{(0.4점)}$$

여기서 k는 상수이며, 좌변은 고무줄의 장력에 해당한다. 따라서

$$\rho_{\text{cyl}} = \rho_w \frac{\tau(l_a/l_0)}{\tau(l_a/l_0) - \tau(l_w/l_0)}. \qquad \textbf{(0.2점)}$$

한 세트의 측정을 하여(불확도를 어림할 필요는 없다) $l_0 = 135$ mm, $l_a = 303$ mm, $l_w = 185$ mm를 얻는다. **(0.6점)**
따라서 $\tau(l_a/l_0) = 0.556$, $\tau(l_w/l_0) = 0.232$이고, $\rho_{cyl} = 1720$ kg/m^{3}을 계산한다.

값이 [1620 kg/m^3, 1820 kg/m^3] 안 **(0.3점)**

2. (0.5점) 원통의 전체 질량은 간단히 $m_{cyl} = V\rho_{cyl} = 26.1$ g이다.

공식 **(0.3점)**
값이 [25.0 g, 27.1 g] 안 **(0.2점)**

3. (0.5점) 원통의 전체 질량은 자석의 질량과 자석을 둘러싼 유리의 질량의 합으로 나타낼 수 있다:

$$m_{\text{cyl}} = h\pi r^2\rho_m + (H\pi R^2 - h\pi r^2)\rho_g. \qquad \textbf{(0.2점)}$$

따라서 유리의 밀도는

$$\rho_g = \frac{\rho_{\text{cyl}}HR^2 - \rho_m hr^2}{HR^2 - hr^2} = 1280\,\text{kg/m}^3.$$

공식 **(0.1점)**
값이 [1130 kg/m^3, 1430 kg/m^3] 안 **(0.2점)**

C부분. 광학적 특성 (5점)

1. (2.5점) 가장 직접적인 방법은 자석이 실제 너비보다 얼마나 커 보이는지 재는 것이다.

방법이나 아이디어를 글이나 그림으로 보이거나 서술함 **(0.5점)**

이 광학은 그림 2에 나타냈다. 그림에서 r'은 원통을 멀리서 볼 때 자석의 겉보기 반지름이다. 실제로는 캘리퍼와 마커로 겉보기 지름 $d' = 2r'$을 잴 수 있다.

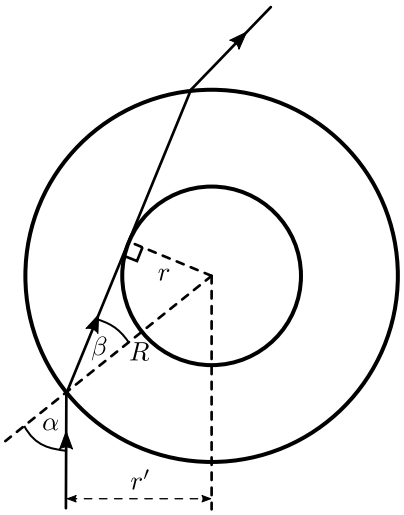


그림 2: 원통 광학의 자세한 모습

방법이나 아이디어를 올바르게 수행함 **(0.25점)**

그림에서 스넬 법칙으로 $\sin\alpha = n_o \sin\beta$이고, 직각 삼각형에서 $\sin\beta = r/R$, $\sin\alpha = r'/R$이다. 따라서 $n_o = r'/r = d'/d$이다.

스넬 법칙을 올바르게 서술하고 적용함 **(0.5점)**

겉보기 너비의 측정값을 아래 표에 정리했다.

i	d'(mm)
1	18.3
2	18.5
3	18.8

측정 3번 이상 **(0.3점)**
단위 포함 **(0.2점)**

평균하면 $d' = (18.5 \pm 0.4)$ mm

오차를 포함한 d의 평균값 **(0.25점)**

이므로 $n_o = 1.54$이고 오차는 $\Delta n_o = 0.09$이다.

값이 *[1.50, 1.58]* 안 **(0.25점)**
오차 **(0.25점)**

2. (1.5점) 과제에 설명된 광학계를 꾸며 다음과 같이 잰다.

i	L(mm)
1	62.7
2	61.1
3	62.0
4	62.6
5	62.2

측정 3번 이상 **(0.3점)**
단위 포함 **(0.2점)**

평균하면 $L = 62.1$ mm, 오차는 $\Delta L = 0.5$ mm이다.

단위를 포함한 값이 *[61.1 mm, 63.1 mm]* 안 **(0.5점)**
오차 **(0.5점)**

3. (1점) 다음 공식에서 시작하여

$$\left(\frac{1}{L-D}-\frac{n_o-1}{D}\right)\left(\frac{n_c d}{n_c-n_o}-D\right)=n_o,$$

다음을 얻는다.

$$n_c = n_0\left(1-\frac{d}{D+\frac{n_0}{\frac{1}{L-D}-\frac{n_0-1}{D}}}\right)^{-1}=1.60.$$

앞의 n_0 식에서 출발해 n_c에 이르는 대수 조작 단계를 보임 **(0.7점)**
값이 *[1.55, 1.65]* 안 **(0.3점)**

D부분. 자기적 성질 (7점)

1. (0.5점) $\mathscr{E} = 3.15$ V를 잰다. 3.20 V보다 크거나 3.00 V보다 작은 값은 0점이다. 단위가 없으면 0.2점을 뺀다.

2. (1점) $V_1 = 1.4$ mV, $V_2 = -2.9$ mV를 잰다. **(0.2점)**

(V_1이나 V_2 하나만 쟀거나 전압 읽기가 틀렸다면 점수를 주지 않는다. 해당 자기장을 (올바르게 계산했을 때) 50 μT보다 크면 읽기가 틀린 것으로 본다.)

전압은 오프셋 전압과 지구 자기장 B_{Ez}의 영향을 받는다. 지구 자기장은 전압 오프셋 $V_{Ez} = B_{Ez}/a$만큼 읽기에 영향을 주며, a는 상수이다. 전지 전압이 3 V라면 1 mV마다 10 μT임을 안다. 우리 전지는 배율을 $\mathscr{E}/3$ V만큼 늘린다. 다시 말해 볼트를 마이크로테슬라로 바꾸려면 전압에 다음을 곱한다.

$a = 10\,\mu\text{T/V}\cdot\mathscr{E}/3\,\text{V} = 10.5\,\mu\text{T/V}.$

이를 모두 합치면 $V_1 = V_0 + B_{Ez}/a$, $V_2 = V_0 - aB_{Ez}$이므로 $V_0 = (V_1+V_2)/2$, **(0.2점)**

$B_{Ez} = (V_1 - V_2)a/2.$ **(0.1점)**

수치로는 $V_0 = -0.8$ mV, **(0.1점)**

$B_{Ez} = (V_1 - V_2)a/2 = 23\,\mu\text{T}.$ **(0.4점)**

이 자기장 값은 계산에 실수가 있으면(즉 보고한 전압 값과 맞지 않으면) 점수를 주지 않는다. 전압이 3.00 V가 아니었는데도 $a = 10.0$ μT/V를 썼다면 0.2점을 뺀다.

3. (2.5점) 자 끝 30 cm에서부터 전압이 300 mV에 이를 때까지 측정 범위 전체에서 센서 전압을 잰다. 자기장으로 바꾸려면 먼저 잰 전압 V에서 오프셋을 빼 바이어스와 (지구) 자기장의 기여를 없앤다. 이는 센서의 방향 때문에 V_1을 빼는 것에 해당한다. 마지막으로 a로 나누어 자기장을 얻는다. 즉 $B_x(x) = (V - V_1)/a$이다.
표로 정리한 데이터는 아래와 같다.

l(cm)	x(cm)	V(mV)	$B_x(x)$(μT)	$B_x(x)^{-1/3}$(μT$^{-1/3}$)
30	30.5	2.5	11.6	0.442
25	25.5	3.0	16.8	0.390
22	22.5	3.5	22.1	0.357
20	20.5	4.2	29.4	0.324
19	19.5	4.7	34.7	0.307
18	18.5	5.4	42.0	0.288
17	17.5	6.2	50.4	0.271
16	16.5	7.0	58.8	0.257
15	15.5	8.3	72.5	0.240
14	14.5	9.9	89.3	0.224
13	13.5	12.3	115	0.206
12	12.5	15.4	147	0.189
11	11.5	19.9	194	0.173
10	10.5	26.2	260	0.156
9	9.5	35.4	357	0.141
8	8.5	48.5	495	0.126
7	7.5	70.0	720	0.112
6	6.5	108	1120	0.096
5	5.5	178	1850	0.081

l은 자석 면으로부터의 거리이므로, 자석 중심으로부터의 거리 x를 얻으려면 자석 두께의 절반 $h/2 = 0.5$ cm만큼 옮겨야 한다. 표에는 다음 소과제에서 쓰는 열이 하나 더 있다.

10번째 데이터 점까지 전압 값마다 **(0.1점)**
$l < 4$ cm인 데이터 점은 세지 않는다
10번째 데이터 점까지 계산한 B_x 값마다 **(0.1점)**
$l < 4$ cm에서의 계산은 세지 않는다
4 cm ≤ l < 6 cm에서 읽은 값에 **(0.1점)**
6 cm ≤ l < 8 cm에서 읽은 값에 **(0.1점)**
$l > 25$ cm에서 읽은 값에 **(0.1점)**
25 cm ≥ l > 20 cm에서 읽은 값에 **(0.1점)**
20 cm ≥ l > 15 cm에서 읽은 값에 **(0.1점)**

전압 값이 분명히 틀렸거나 B_x 값이 올바른 값과 20% 더하기 10 μT보다 많이 다르면 점수를 주지 않는다.

오프셋을 빼지 않았다면 읽은 값의 점수에 0.5를 곱한다.

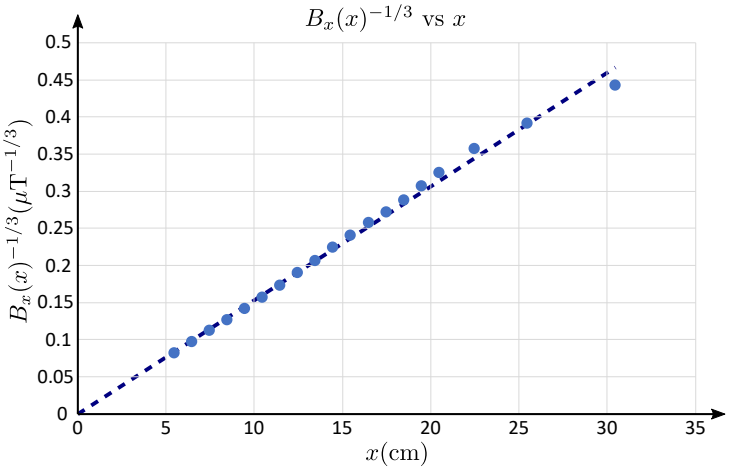
4. (2.5점)
자기장이 다음과 같이 주어진다면

$$B_x(x) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{p}{x^3},$$

여러 방법으로 선형화할 수 있지만, 데이터 점의 선형 간격을 유지하는 $B_x(x)^{-1/3}$ 대 x를 생각하는 것이 편리하다. 이 경우

$$B_x(x)^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{2\pi}{\mu_0 p}}x = Ax,$$

기울기로부터 $p = 2\pi/(\mu_0 A^3)$로 p를 얻는다. $B_x(x)^{-1/3}$을 계산해 그리면 아래와 같다.



그래프에서 $A = 0.0153\ \mu\mathrm{T}^{-1/3}\ \mathrm{cm}^{-1} = 153\ \mathrm{T}^{-1}\ \mathrm{m}^{-1}$을 재므로 $153\,\mathrm{T}^{-1}\,\mathrm{m}^{-1}$ so

$$p = \frac{2\pi}{\mu_0 A^3} = 1.40\,\mathrm{A\,m^2}.$$

축에 알맞게 고른 양 (그래프를 선형으로 만듦) **(0.5점)**
10번째까지 데이터 점마다, 세로축 값의 계산과 올바른 그래프 표시 **(0.1점)**
그래프에 점을 찍지 않았으면 절반 점수만 준다.
B_x 값을 직접 그렸으면 절반 점수만 준다.
그래프의 선형 부분의 기울기를 구함 **(0.3점)**
p의 수치 계산 **(0.2점)**

5. (0.5점) 정의에 따라 자화는

$$J = \frac{p}{\pi r^2 h} = 1.30 \times 10^6\,\mathrm{A\,m^{-1}}.$$

올바른 값 $1.1 \times 10^6\ \mathrm{A\ m^{-1}} \le J \le 1.4 \times 10^6\ \mathrm{A\ m^{-1}}$
(0.5점)