실기 시험. 풀이 개요.

심사위원 전용

참고. 이 풀이 개요는 완전하지 않다. 팀 리더는 학생들에게 더 자세히 설명해야 한다.
그러나 학생 답안의 바른 풀이(10점에 충분한 것)는 더 짧을 수 있다(물론 말 없이도).

참고. 심사위원은 학생의 풀이를 본질로 평가해야 하며, 언급된 문장이나 식이 형식적으로 있는지를 보아서는 안 된다.
해당 점수를 주는 데 언급된 내용이 글에 형식적으로 있을 필요는 없다.
다음 단계들을 실제로 밟았다면 점수를 주어야 한다.

αβ-7. 아날레마

(7.0. 예비 사항과 계산) 먼저 사진의 축척을 계산할 수 있다.
가로 축척: 201 mm / 60˚ = 3.35 mm/˚
세로 축척: 288 mm / 86˚ ≈ 3.35 mm/˚.
따라서 가로축과 세로축의 축척이 같다.
사진을 동쪽 방향으로 찍었으므로, 묘유선이 지면의 한가운데를 정확히 지난다고 가정해야 한다.

산 오른쪽의 기준 지형으로 지평선을 대략 찾을 수 있다(산 왼쪽 위치를 쓰는 것은 그쪽에 언덕이 있어서 그다지 좋지 않다).
「평균」 태양의 중심은 분점 때 6시 00분에 지평선 위 정동점에서 뜬다. 따라서 이 점(지평선과 묘유선의 교점)을 작도의 원점으로 정할 수 있다.

날짜에 따른 태양의 위치는:

$$h = \delta\sin\varphi - \eta\cos\varphi \quad \text{(축 방향 위)}$$

$$A = -\eta\sin\varphi \quad \text{(축 방향 오른쪽(남))}$$

φ = 46˚56′이고, 날짜에 따른 δ와 η는 천체력 표에서 찾을 수 있다.
(7.1.) 이 식으로 계산하여 학생들은 다음 표를 채워야 한다:

날짜	h	A

(7.2.) 적도는 우리 원점을 지나며 지평선과 β = 90˚ − φ = 43˚04′의 각을 이룬다. 이는 「풀이 그림」에 나와 있다.

(7.3.) 계산한 값으로 대략 다음 결과를 얻을 수 있다(이 쪽의 배경을 보라. 축척은 이 쪽을 A4 용지에 인쇄했을 때에 맞지만, 이 예의 실제 날짜는 다르다). 실제 사진의 풍경 속 아날레마는 별도의 답안 쪽에 있다.

(7.4.) 표준시간대의 시각은 평균 태양시보다 다음 값만큼 앞선다

$$(45^\circ - 26^\circ 22')/(15^\circ/\mathrm{h}) \approx 1^{\mathrm{H}}14.5^{\mathrm{M}}.$$

따라서 이런 아날레마를 얻으려면 6시 00분 + 1시 14.5분 = 7시 14.5분에 사진을 찍어야 한다.

(7.5.) 오늘 태양의 위치는 굵게 칠한 원으로 표시했다.

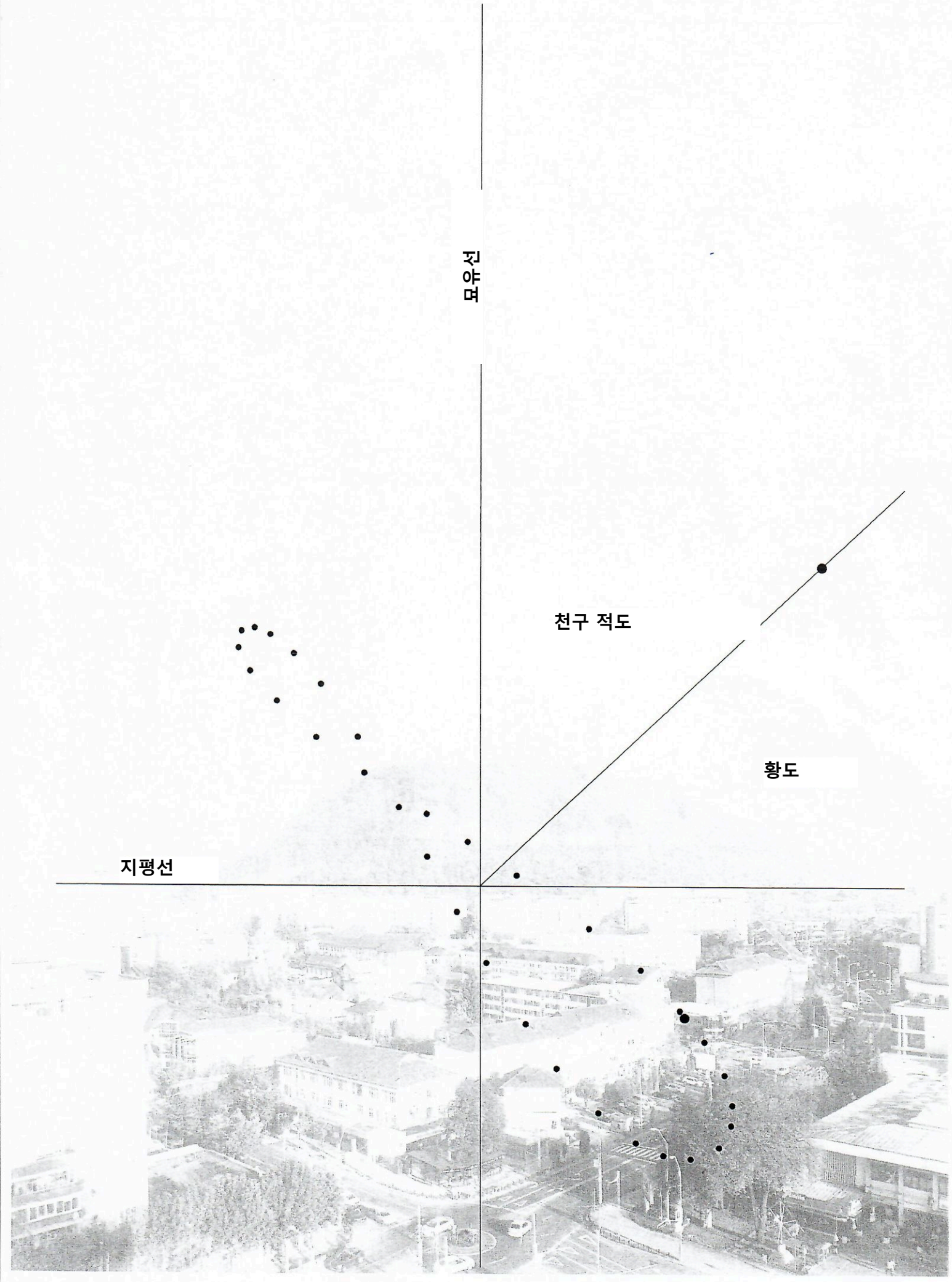
(7.6.) 황도는 오늘 태양의 위치와 천구 적도 위의 추분점을 지난다. 추분점은 원점에서 천구 적도를 따라 오른쪽 위로 약 31°(9월 23일부터 10월 24일까지의 기간) 떨어져 있으며, 우리 축척으로 L = 104 mm이다.

$$\Delta X = L\cos\varphi = 71 \text{ mm},$$

$$\Delta Y = L\sin\varphi = 76 \text{ mm}.$$

이 점도 굵게 칠한 원으로 표시했다. 황도선은 아날레마가 있는 답안 쪽에 나와 있다. 지금 판에서는 그림을 스캔하지 못해 미안하다. 동봉한 그림에서는 황도선을 태양의「굵은」모습들을 지나도록 손으로 그려야 한다.

채점 기준: 실제 심사위원단이 마련하기를 제안한다. 실기 시험의 두 문제는 각각 10점이다.


진행 방향
천구 적도
황도
지평선

측정용으로만 쓴다. 제출하지 않는다.

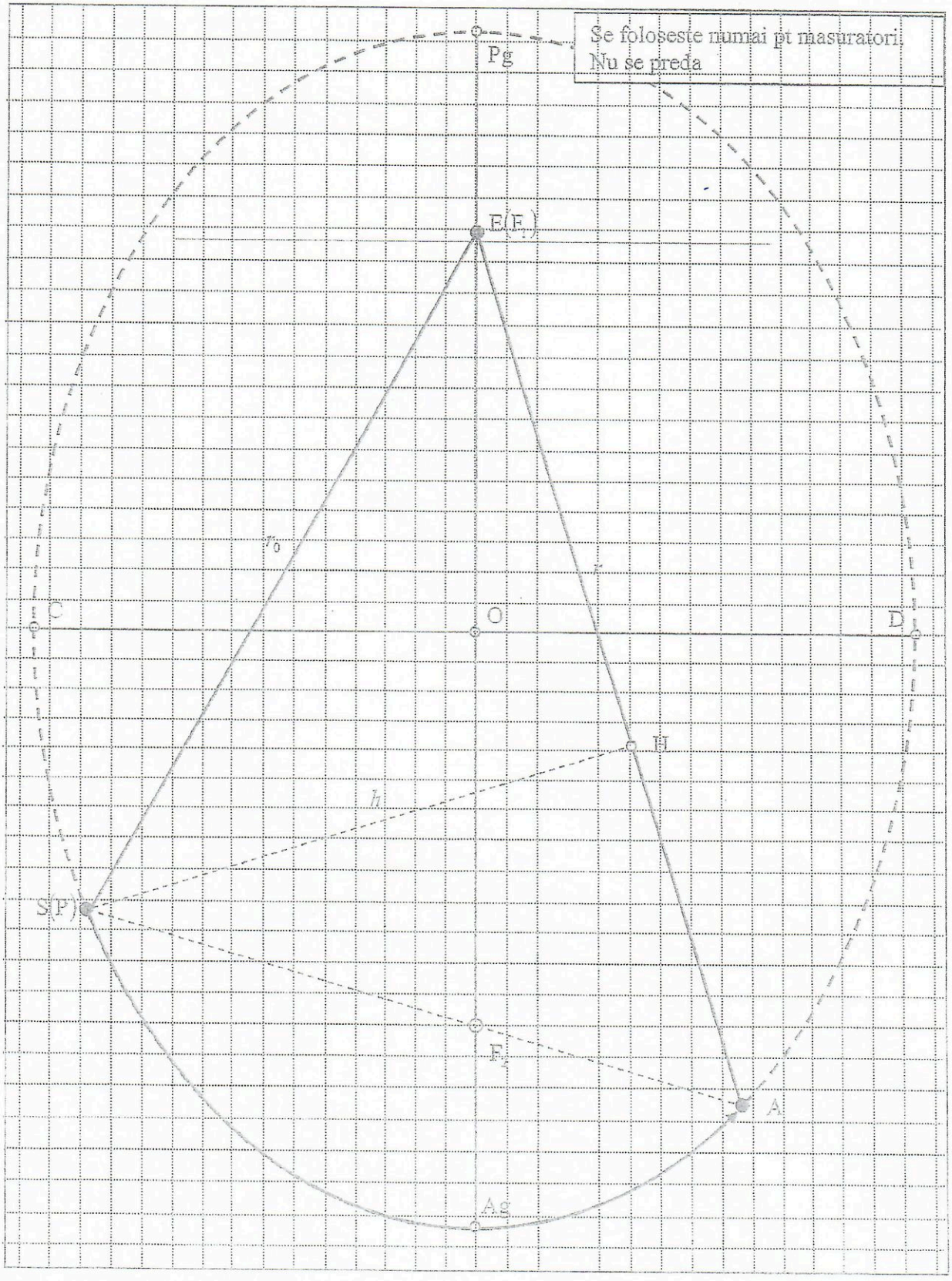


Fig. 1

풀이

αβ.1 – 1.

투사체 타원 궤도의 요소(긴반지름 a, 짧은반지름 b, 이심률 e, 최소 거리 rmin, 최대 거리 rmax)를 정하려면, 다음을 알고 있으므로:

$$r = 30010{,}88\ \text{km};\ r_{\text{masurat desen}} = 153\ \text{mm},$$

그림 1의 도면에서 모든 선형 기하 치수의 축척은 다음과 같다:

$$S = \frac{r}{r_{\text{masurat desen}}} = \frac{30010{,}88}{153}\ \frac{\text{km}}{\text{mm}},$$

따라서 다음을 얻는다:

$$r_{0,\,\text{masurat}} = 133\ \text{mm};\ r_0 = r_{0,\,\text{masurat desen}} \cdot S = 26087{,}88\ \text{km};$$

$$r_{\text{masurat}} = 153\ \text{mm};$$

$$2a_{\text{masurat desen}} = 200\ \text{mm};\ a_{\text{masurat desen}} = 100\ \text{mm};$$

$$a = a_{\text{masurat desen}} \cdot S \approx 19614{,}95\ \text{km};$$

$$2b_{\text{masurat desen}} = 148\ \text{mm};\ b_{\text{masurat desen}} = 74\ \text{mm};$$

$$b = b_{\text{masurat desen}} \cdot S \approx 14515{,}06\ \text{km};$$

$$2c_{\text{masurat desen}} = 134\ \text{mm};\ c_{\text{masurat desen}} = 67\ \text{mm};$$

$$c = c_{\text{masurat desen}} \cdot S \approx 13142{,}01\ \text{km};$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{b^2_{\text{masurat desen}}}{a^2_{\text{masurat desen}}}} \approx 0{,}67;$$

$$r_{\text{min, masurat desen}} = 33\ \text{mm};$$

$$r_{\text{min}} = r_{\text{min, masurat desen}} \cdot S \approx 6472{,}93\ \text{km};\ r_{\text{min}} = a(1-e);$$

$$r_{\text{max, masurat desen}} = 167\ \text{mm};$$

$$r_{\text{max}} = r_{\text{max, masurat}} \cdot S \approx 32756{,}97\ \text{km};\ r_{\text{max}} = a(1+e).$$

αβ.1 – 2.

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(M+m)} \cdot a^3;\ m \ll M;\ T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} \cdot a^3;$$

$$M = 5{,}972 \cdot 10^{24}\ \text{kg};\ G = 6{,}674 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2\text{kg}^{-2};\ \pi = 3{,}14159265;$$

$$a = 19614{,}95\ \text{km};$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} = 2 \cdot 3{,}14159265 \cdot \sqrt{\frac{19614{,}95^3 \cdot 10^9}{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24}}}\ \text{s} = 27340{,}57\ \text{s};$$

$$T = 455{,}67\ \text{min} = 7{,}59\ \text{h}.$$

αβ.1 – 3.

그림 1의 전이 타원에 삼각형 ESA의 높이를 나타내는 선분 SH ⊥ EA를 작도하고, 도면에서 이 선분의 길이를 잰다:

$$(\text{SH})_{\text{masurat desen}} = h_{\text{masurat desen}} = 98\ \text{mm}.$$

$$\Sigma_{\text{elipsa transfer}} = \pi ab = \pi Sa_{\text{masurat desen}} \cdot Sb_{\text{masurat desen}} = \pi S^2 a_{\text{masurat desen}} b_{\text{masurat desen}};$$

$$\Sigma_{\text{sector elipsa}} = \Sigma_{\Delta(\text{ESA})} + \Sigma_{\text{segment elipsa}};$$

※ 루마니아어 첨자 뜻: măsurat desen = 도면에서 잰 값, elipsă transfer = 전이 타원, sector elipsă = 타원 부채꼴, segment elipsă = 타원 활꼴.

$$\Sigma_{\Delta(\mathrm{ESA})}=\frac{1}{2}rh=\frac{1}{2}Sr_{\text{masurat desen}}Sh_{\text{masurat desen}}=\frac{1}{2}S^2r_{\text{masurat desen}}h_{\text{masurat desen}}.$$

Σ(타원 활꼴)을 계산하려고 칸을 세고 반올림하면, 그곳에 한 변의 길이가 l(도면) = 5 mm인 작은 정사각형이 n = 100개 있다고 어림할 수 있다. 따라서 같은 축척 S에 맞추어 다음을 얻는다:

$$\Sigma_{\text{segment elipsa transfer}}=n\cdot Sl_{\text{masurat desen}}\cdot Sl_{\text{masurat desen}}=nS^2l^2_{\text{masurat desen}}.$$

이 조건에서 다음을 얻는다:

$$\Sigma_{\text{sector elipsa transfer}}=\Sigma_{\Delta(\mathrm{ESA})}+\Sigma_{\text{segment elipsa}};$$

$$\Sigma_{\text{sector elipsa transfer}}=\frac{1}{2}S^2r_{\text{masurat desen}}h_{\text{masurat desen}}+nS^2l^2_{\text{masurat desen}}.$$

케플러 제2법칙(넓이 법칙)에 따라 다음을 얻는다:

$$T.....\Sigma_{\text{elipsa transfer}};$$

$$\Delta t.....\Sigma_{\text{sector elipsa transfer}};$$

$$\Delta t=\frac{\Sigma_{\text{sector elipsa transfer}}}{\Sigma_{\text{elipsa transfer}}}\cdot T,$$

이는 투사체 P가 소행성 A와 만날 때까지 이동하는 데 걸리는 시간이다.

이 조건에서 다음을 얻는다:

$$\Delta t=\frac{\frac{1}{2}S^2r_{\text{masurat desen}}h_{\text{masurat desen}}+nS^2l^2_{\text{masurat desen}}}{\pi S^2a_{\text{masurat desen}}b_{\text{masurat deseb}}}\cdot T;$$

$$\Delta t=\frac{\frac{1}{2}r_{\text{masurat desen}}h_{\text{masurat desen}}+nl^2_{\text{nasurat desen}}}{\pi a_{\text{masurat desen}}b_{\text{masurat desen}}}\cdot T;$$

$$r_{\text{masurat desen}}=155\text{ mm};\ h_{\text{masurat desen}}=98\text{ mm};\ l_{\text{masurat desen}}=5\text{ mm};$$

$$n=100;\ a_{\text{masurat desen}}=100\text{ mm};\ b_{\text{masurat desen}}=74\text{ mm};$$

$$T=455{,}67\text{ min}=7{,}59\text{ h};$$

$$\pi=3{,}14159265;$$

$$\Delta t=\frac{\frac{1}{2}155\text{ mm}\cdot 98\text{ mm}+100\cdot 25\text{ mm}^2}{3{,}14159265\cdot 100\text{ mm}\cdot 74\text{ mm}}\cdot 7{,}59\text{ h};$$

$$\Delta t=\frac{155\cdot 49+100\cdot 25}{3{,}14159265\cdot 100\cdot 74}\cdot 7{,}59\text{ h};$$

$$\Delta t=3{,}29\text{ h}.$$

α.1.

$$d_{\text{SA, masurat}}=115\text{ mm};$$

$$d_{\text{SA}}=d_{\text{SA, masurat desen}}\cdot S\approx 22549{,}01\text{ km}.$$

점 S와 A 사이의 타원 호를 따라 실을 대어 본다. 이 실의 길이를 재면 다음을 얻는다:

$$l_{\text{SA, masurat}}=135\text{ mm};$$

$$l_{\text{SA}}=l_{\text{SA, masurat}}\cdot S=135\text{ mm}\cdot\frac{30010{,}88\text{ km}}{153\text{ mm}}\approx 26480{,}18\text{ km}.$$

β.1.

처음 속도 V0의 방향을 정한다는 것은 점 S에서 타원의 접선 방향을 정하는 것이다. 이는 타원의 광학적 성질, 곧 타원면 오목 거울의 한 초점에서 나온 빛살은 반사된 뒤 모두 거울의 다른 초점을 지난다는 성질을 써서 한다(그림 3).

따라서 타원의 접선 방향은 두 초점에서 S로 그은 동경 벡터들과 같은 각을 이룬다(그림 3, 4, 5). 점 S에서 타원의 접선은 각 ASE의 이등분선에 수직이다.

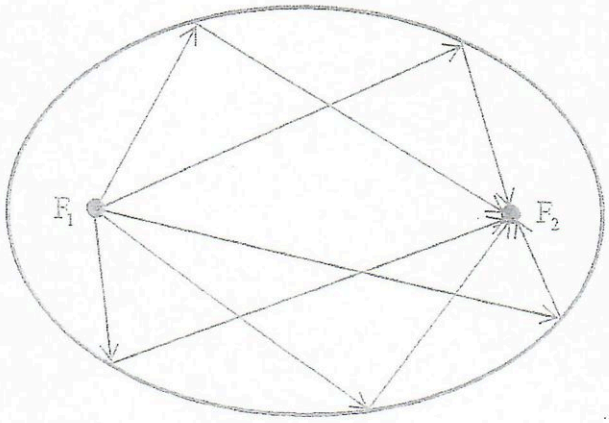


그림 3

이 조건에서 V0의 방향은 r0의 방향과 각 α를 이룬다. 이 각은 알려진 양 r0, r, Δθ의 수치를 지켜 도면을 그렸다고 보고, 각도기로 도면에서 바로 잰다.

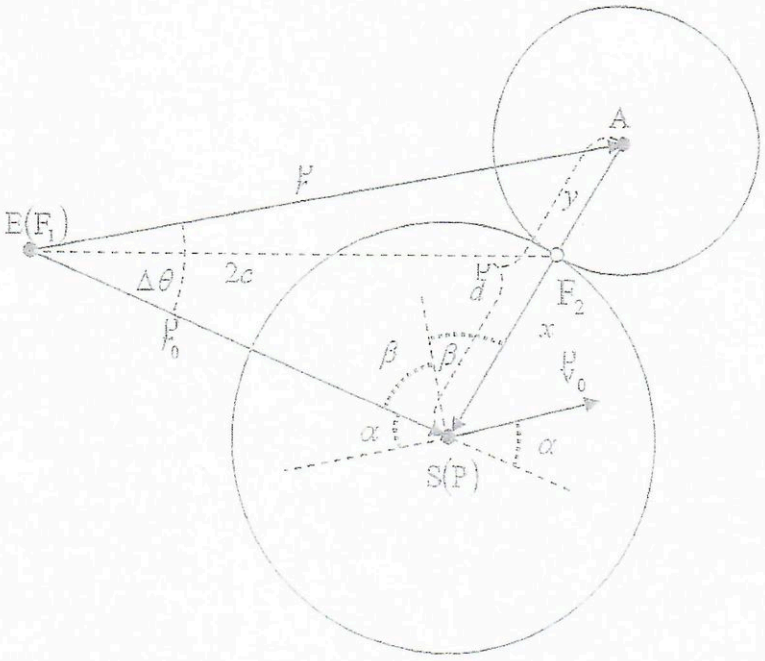


Fig. 4

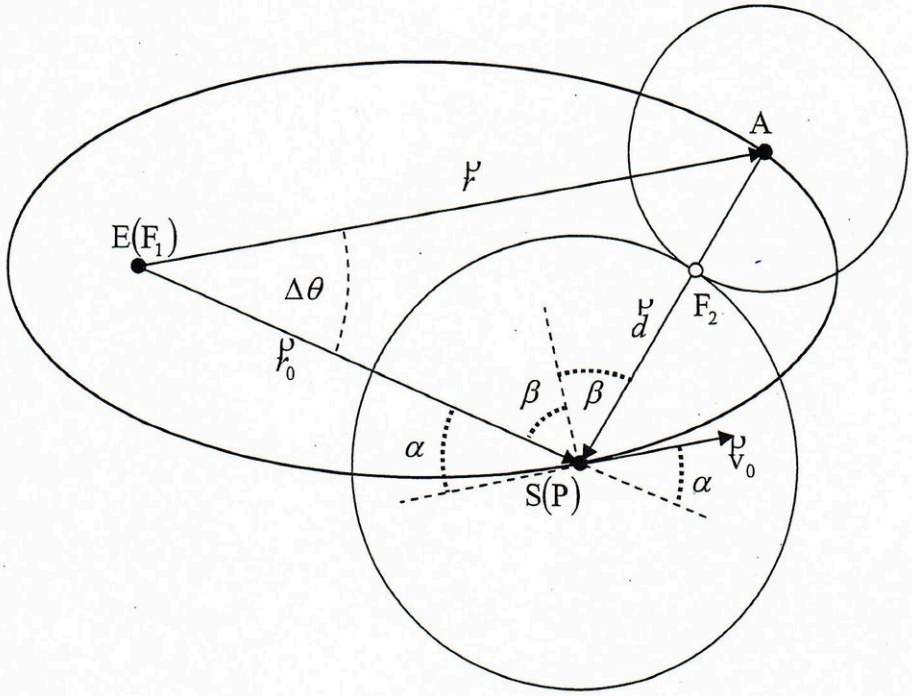


그림 5

이 조건에서 점 S에서 발사한 투사체 P에 해당하는 v0의 방향은 r0의 방향과 각 α를 이루며, 이 각은 그림 6의 도면에서 잴 수 있다:

$$\alpha \approx 54^0.$$