(D1) 쌍성 펄서

지난 수십 년 동안 체계적인 탐색으로 천문학자들은 밀리초 펄서(자전 주기 < 10 ms)를 매우 많이 찾아냈다. 이 펄서들의 대부분은 쌍성계에 있으며 궤도가 거의 원이다.

쌍성 궤도에 있는 펄서에서는 측정한 펄서 자전 주기(P)와 측정한 시선 방향 가속도(a)가 둘 다 궤도 운동 때문에 규칙적으로 변한다. 원 궤도라면 이 변화는 궤도 위상 φ ($0 \le \varphi \le 2\pi$)로 다음과 같이 수학적으로 나타낼 수 있다,

$$P(\phi) = P_0 + P_\mathrm{t}\cos\phi \qquad \text{where } P_\mathrm{t} = \frac{2\pi P_0 r}{c P_\mathrm{B}}$$

$$a(\phi) = -a_\mathrm{t}\sin\phi \qquad \text{where } a_\mathrm{t} = \frac{4\pi^2 r}{P_\mathrm{B}^2}$$

여기서 PB는 쌍성의 공전 주기, P0는 펄서의 고유 자전 주기, r은 궤도 반지름이다.

다음 표는 여러 일심 시각 T에서 잰 P와 a의 측정값 한 벌이다. T는 줄인 수정 율리우스일(tMJD), 곧 다음 MJD 이후의 날수로 나타냈다
2,440,000.

No.	T (tMJD)	P (μs)	a ($\mathrm{m\,s^{-2}}$)
1	5740.654	7587.8889	-0.92 ± 0.08
2	5740.703	7587.8334	-0.24 ± 0.08
3	5746.100	7588.4100	-1.68 ± 0.04
4	5746.675	7588.5810	$+1.67 \pm 0.06$
5	5981.811	7587.8836	$+0.72 \pm 0.06$
6	5983.932	7587.8552	-0.44 ± 0.08
7	6005.893	7589.1029	$+0.52 \pm 0.08$
8	6040.857	7589.1350	$+0.00 \pm 0.04$
9	6335.904	7589.1358	$+0.00 \pm 0.02$

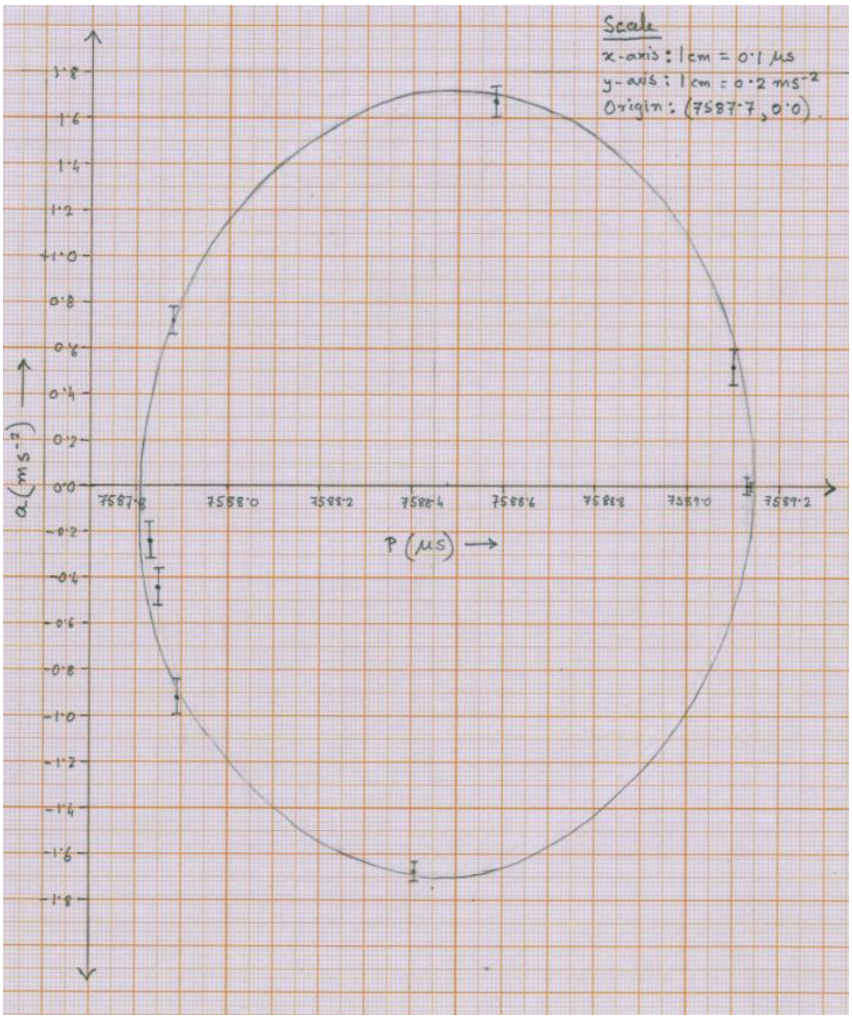
a(φ)를 P(φ)의 함수로 그리면 매개변수 곡선을 얻는다. 위의 관계에서 분명하듯이 주기-가속도 평면에서 이 곡선은 타원이다.

이 문제에서는 원 궤도를 가정하고 이 자료를 분석하여 고유 자전 주기 P0, 공전 주기 PB, 궤도 반지름 r을 어림한다.

(D1.1) 오차 막대를 포함한 자료를 주기-가속도 평면에 그려라(그래프에 "D1.1"이라고 적어라). 7
"D1.1").

풀이:

그래프 번호 : D1.1



- 그림이 모눈종이의 50%보다 많이 차지함: 0.5
- 축 이름 (P와 a): 0.5
- 축의 차원: 0.5
- 축의 눈금과 값 (또는 축척을 명시): 0.5
- 점을 바르게 찍음:

찍은 점의 수	9	8	7	6	5 < 5
주는 점수	4.0	3.5	3.0	2.0	1.0 0

점의 정확도: 틀린 점마다 0.5 감점.

- 점에 오차 막대 (적어도 5개): 1.0

(D1.2) 자료에 가장 잘 맞는 것으로 보이는 타원을 (같은 그래프 "D1.1"에) 그려라. 2

풀이:
위를 보라

- 눈으로 가장 잘 맞춘 타원 곡선: 1.0
- a = 0 선에 대해 대칭인 곡선: 0.5

• P의 어떤 값(P ≈ 7588.48)에 대해 대칭인 곡선: 0.5

(D1.3) 그래프에서 P0, Pt, at를 오차 범위와 함께 어림하라. 7

풀이:

값은 타원 축의 길이와 P 축의 가운데 점에서 정한다. 오차 범위는 오차 막대를 포함한 점들을 덮는 극단의 타원을 어림하여 정할 수 있다. 오차 범위를 어림하는 그럴듯한 방법은 모두 인정한다.

$2P_\mathrm{t} = (1.34 \pm 0.04)\,\mu\mathrm{s}$ $[(13.4 \pm 0.4)\,\mathrm{cm\ on\ graph}]$

$\boxed{P_\mathrm{t} = (0.67 \pm 0.02)\,\mu\mathrm{s}}$ **2.0**

$\boxed{P_0 = (7588.48 \pm 0.02)\,\mu\mathrm{s}}$ **2.0**

$2a_\mathrm{t} = (3.42 \pm 0.12)\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ $[(17.1 \pm 0.6)\,\mathrm{cm\ on\ graph}]$ **3.0**

$\boxed{a_\mathrm{t} = (1.71 \pm 0.06)\,\mathrm{m\,s^{-2}}}$

• 채점 표:

매개변수	절반 점수 최소	절반 점수 최대	만점 절반 점수 최대	
$P_\mathbf{t}(\mu\mathrm{s})$	**0.59**	**0.63**	**0.71**	**0.75**
$\delta P_\mathbf{t}(\mu\mathrm{s})$	**0.01**	**0.02**	**0.04**	**0.05**
$P_0(\mu\mathrm{s})$	**7588.38**	**7588.43**	**7588.53**	**7588.58**
$\delta P_0(\mu\mathrm{s})$	**0.01**	**0.02**	**0.04**	**0.05**
$a_\mathbf{t}(\mathrm{m\,s^{-2}})$	**1.61**	**1.65**	**1.77**	**1.81**
$\delta a_\mathbf{t}(\mathrm{m\,s^{-2}})$	**0.04**	**0.05**	**0.07**	**0.08**

• (D1.1)과 (D1.2)의 그림/맞춤이 틀렸거나 나빠서 생긴 틀린 값은 감점한다.
• 오차 어림은 그래프 그리기에 바탕을 둔다. 제시한 값은 오차 막대를 포함한 모든 점을 담도록 그릴 수 있는 타원들의 테두리에 해당한다. 오차를 어림하는 그럴듯한 방법은 모두 점수를 준다.

(D1.4) PB와 r을 P0, Pt, at로 나타내는 식을 써라. 4

풀이:

원 궤도에서는 공전 주기(PB)와 궤도 반지름(r)을 쉽게 되찾을 수 있다:

$$a_\mathrm{t} = \frac{4\pi^2}{P_\mathrm{B}^2} r$$

$$\therefore r = \frac{P_\mathrm{B}^2 a_\mathrm{t}}{4\pi^2}$$ **1.0**

$$P_\mathrm{t} = \frac{2\pi P_0}{P_\mathrm{B}} \times \frac{r}{c}$$

$$= \frac{2\pi P_0}{P_\mathrm{B} c} \times \frac{P_\mathrm{B}^2 a_\mathrm{t}}{4\pi^2} = \frac{P_0 P_\mathrm{B} a_\mathrm{t}}{2\pi c}$$

$$\therefore \boxed{P_{\rm B} = \frac{P_{\rm t}}{P_0}\frac{2\pi c}{a_{\rm t}}} \quad \textbf{1.0}$$

$$r = \frac{a_{\rm t}}{4\pi^2}\left(\frac{P_{\rm t}}{P_0}\frac{2\pi c}{a_{\rm t}}\right)^2 \quad \textbf{1.0}$$

$$\therefore \boxed{r = \left(\frac{P_{\rm t}}{P_0}\right)^2 \frac{c^2}{a_{\rm t}}} \quad \textbf{1.0}$$

다른 대수적 경로도 인정한다. PB와 r은 각각 2.0점이다.

(D1.5) (D1.3)에서 어림한 값을 바탕으로 PB와 r의 근삿값을 오차 범위와 함께 계산하라. 6

풀이:

$$P_{\rm B} = \frac{P_{\rm t}}{P_0}\frac{2\pi c}{a_{\rm t}}$$
$$= \frac{0.67}{7588.48} \times \frac{2\pi \times 2.998 \times 10^8}{1.71}\,\mathrm{s}$$
$$= 96\,260\,\mathrm{s} = 1.125\,70\,\mathrm{d} \quad \textbf{1.0}$$

$$\Delta P_{\rm B} = P_{\rm B}\sqrt{\left(\frac{\Delta P_{\rm t}}{P_{\rm t}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta P_0}{P_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta a_{\rm t}}{a_{\rm t}}\right)^2} \quad \textbf{1.0}$$
$$= 1.12570 \times \sqrt{\left(\frac{0.02}{0.67}\right)^2 + \left(\frac{0.02}{7588.48}\right)^2 + \left(\frac{0.06}{1.71}\right)^2}\,\mathrm{d}$$
$$= 1.12570 \times 0.0461 \simeq 0.052\,\mathrm{d}$$

$$\therefore \boxed{P_{\rm B} = (1.13 \pm 0.05)\,\mathrm{d}} \quad \textbf{1.0}$$

$$r = \left(\frac{P_{\rm t}}{P_0}\right)^2 \frac{c^2}{a_{\rm t}}$$
$$= \left(\frac{0.67}{7588.48}\right)^2 \times \frac{(2.998 \times 10^8)^2}{1.71}\,\mathrm{m}$$
$$\therefore r = 4.097\,39 \times 10^8\,\mathrm{m} = 2.738\,90 \times 10^{-3}\,\mathrm{AU} \quad \textbf{1.0}$$

$$\Delta r = r\sqrt{\left(\frac{2\Delta P_{\rm t}}{P_{\rm t}}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta P_0}{P_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta a_{\rm t}}{a_{\rm t}}\right)^2} \quad \textbf{1.0}$$
$$= 2.738\,90 \times 10^{-3} \times \sqrt{\left(\frac{2 \times 0.02}{0.67}\right)^2 + \left(\frac{2 \times 0.02}{7588.48}\right)^2 + \left(\frac{0.06}{1.71}\right)^2}\,\mathrm{AU}$$
$$= 2.738\,90 \times 10^{-3} \times 0.069\,25\,\mathrm{AU} \simeq 0.19 \times 10^{-3}\,\mathrm{AU}$$

$$\boxed{r = (2.74 \pm 0.19) \times 10^{-3}\,\mathrm{AU}} \quad \textbf{1.0}$$

PB와 r의 오차는 가능한 최대(최악의 경우) 오차로 어림할 수도 있다. 그러면 오차는 위에서 계산한 표준 오차의 약 1.5배가 된다
($\delta P_{\rm B} = 0.07, \delta r = 0.25$).

(D1.6) 위 표의 다음 다섯 관측(자료 행 1, 4, 6, 8, 9)의 시각에 해당하는 궤도 위상 φ를 계산하라. 4

풀이:
새로 정한 궤도 매개변수를 써서 각 자료점, 곧 측정한 가속도와 주기의 쌍 (P, a).

$$\phi = \tan^{-1}\left(-\frac{a}{a_{\mathrm{t}}}\frac{P_{\mathrm{t}}}{P - P_0}\right)$$

cos φ와 sin φ의 부호에 따라 φ, π ± φ, 2π − φ 가운데에서 위상 값을 골라야 한다.

Sr. no.	T (tMJD)	P (μs)	a ($\mathrm{m\,s^{-2}}$)	ϕ
1	5740.654	7587.8889	−0.92	148.62°
4	5746.675	7588.5810	+1.67	278.77°
6	5983.932	7587.8552	−0.44	164.57°
8	6040.857	7589.1350	+0.00	0.00°
9	6335.904	7589.1358	+0.00	0.00°

- 값마다 맞으면: 처음 셋은 1.0, 나머지 둘은 0.5.
- π ± φ 또는 2π − φ이면 값마다 0.5.
- φ의 식이 틀려 모든 값이 틀리면 최대 **1.0 mark.**
- 라디안 값도 인정한다.

(D1.7) (D1.6)의 결과를 써서 다음과 같이 공전 주기 PB의 추정값을 다듬어라:

(D1.7a) 먼저 첫 관측 전의 가장 가까운 위상 0의 시각에 해당하는 처음 기원 T0를 정하라. 2

풀이:

$$\frac{T_1 - T_0}{P_{\mathrm{B}}} = \frac{\phi_1}{2\pi} \Rightarrow T_0 = T_1 - \frac{\phi_1}{2\pi}P_{\mathrm{B}}$$ **1.0**

$$T_0 = 5740.654 - \frac{148.62^\circ}{360^\circ} \times 1.12570\,\mathrm{tMJD}$$

$$\boxed{T_0 = 5740.189\,\mathrm{tMJD}}$$ **1.0**

허용 오차: ±0.002 tMJD. PB 대신 P0를 쓰면 0점.

(D1.7b) 각 관측의 어림한 위상에 대한 예상 시각 Tcalc는 다음과 같다 7

$$T_{\mathrm{calc}} = T_0 + \left(n + \frac{\phi}{360^\circ}\right)P_{\mathrm{B}},$$

여기서 n은 T0와 Tcalc 사이에 지난 궤도 위상의 온전한 주기 수이다. (D1.6)의 다섯 관측마다 n과 Tcalc를 어림하라. 관측한 T와 Tcalc의 차이 TO-C를 적어라. 이 계산을 요약 답안지의 표에 적어라.

풀이:

$$T_{\rm calc} = T_0 + \left(n + \frac{\phi}{360^\circ}\right) P_{\rm B}$$

여기서 n = [(T − T0)/PB]의 정수 부분.

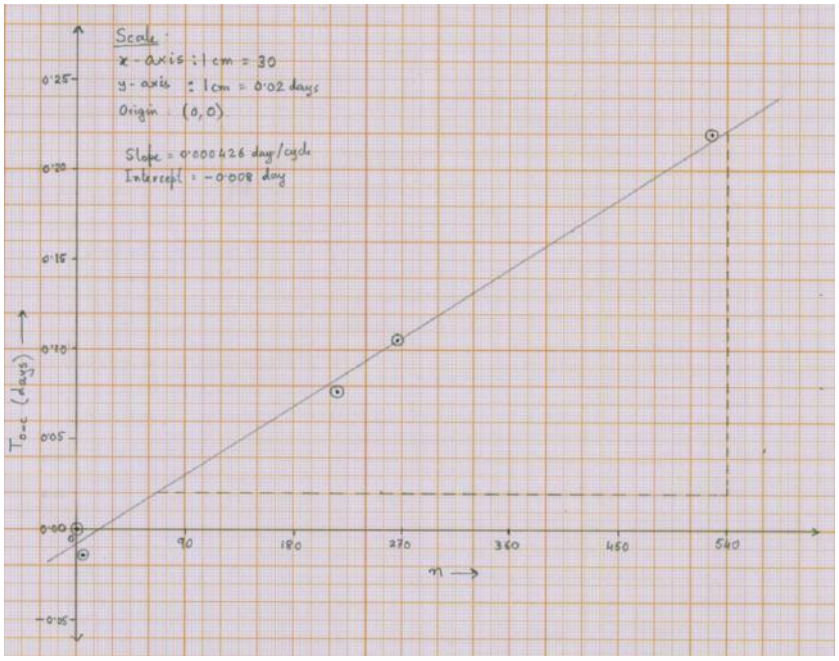
Sr. No.	T (tMJD)	ϕ	n	$T_{\rm calc}$ (MJD)	$T_{\rm O-C}$ (days)
1	5740.654	148.62°	0	5740.654	0.000
4	5746.675	278.77°	5	5746.689	−0.014
6	5983.932	164.57°	216	5983.855	0.077
8	6040.857	0.00°	267	6040.751	0.106
9	6335.904	0.00°	529	6335.684	0.220

n, Tcalc, TO-C 값이 틀리거나 빠질 때마다 0.5 감점
한 행에서 두 번 감점하지 않는다.

(D1.7c) n에 대한 TO-C를 그려라(그래프에 "D1.7"이라고 적어라). 4

풀이:

그래프 번호 : D1.7



- 그림이 모눈종이의 50%보다 많이 차지함: 0.5
- 축 이름 (TO-C와 n)과 차원: 0.5
- 축의 눈금과 값 (또는 축척을 명시): 0.5
- 점을 바르게 찍음: 점마다 0.5
- 선형 맞춤의 정도는 다음 부분에서 채점

(D1.7d) 처음 기원 T0,r과 공전 주기의 다듬은 값을 정하라, 7

$P_{\rm B,r}$.

풀이:
TO-C 대 n 그래프에 선형 맞춤을 하면 한 주기당 주기의 어긋남(기울기)과 위상 0 점의 이동(절편)을 얻는다. 2.0 **2.0**
이 개념은 뒤의 계산에서 드러나면 점수를 받으며, 명시적인 진술은 필요 없다.

선형 맞춤으로부터,

기울기 = 0.000 43 d/n 절편 = −0.010 d 3.0

- 눈으로 본 선형 맞춤이 좋음: 1.0
- 기울기와 절편 값이 맞음: 각 1.0
- 허용 오차: 기울기 ±0.00002, 절편 ±0.002.

$$T_{0,\mathrm{r}} = 5740.189 - 0.010 = \boxed{5740.179\,\mathrm{tMJD}}$$ **1.0**

$$P_{\mathrm{B,r}} = (1.12570 + 0.00043)\,\mathrm{d}$$
$$= 1.126\,13\,\mathrm{d}$$
$$\boxed{P_{\mathrm{B}} = 1.1261\,\mathrm{d}}$$ **1.0**

보정의 부호를 틀리게 쓰면 양마다 0.5 감점.