(D2) 달까지의 거리

2015년 9월 달의 지구 중심 천체력이 표로 주어진다. 각 값은 00:00 UT에 잰 것이다.

날짜	적경 (α)			적위 (δ)			각크기 (θ)	위상 (φ)	이각
	h	m	s	°	′	″	″		of Moon
Sep 01	0	36	46.02	3	6	16.8	1991.2	0.927	148.6° W
Sep 02	1	33	51.34	7	32	26.1	1974.0	0.852	134.7° W
Sep 03	2	30	45.03	11	25	31.1	1950.7	0.759	121.1° W
Sep 04	3	27	28.48	14	32	4.3	1923.9	0.655	107.9° W
Sep 05	4	23	52.28	16	43	18.2	1896.3	0.546	95.2° W
Sep 06	5	19	37.25	17	55	4.4	1869.8	0.438	82.8° W
Sep 07	6	14	19.23	18	7	26.6	1845.5	0.336	70.7° W
Sep 08	7	7	35.58	17	23	55.6	1824.3	0.243	59.0° W
Sep 09	7	59	11.04	15	50	33.0	1806.5	0.163	47.5° W
Sep 10	8	49	0.93	13	34	55.6	1792.0	0.097	36.2° W
Sep 11	9	37	11.42	10	45	27.7	1780.6	0.047	25.1° W
Sep 12	10	23	57.77	7	30	47.7	1772.2	0.015	14.1° W
Sep 13	11	9	41.86	3	59	28.8	1766.5	0.001	3.3° W
Sep 14	11	54	49.80	0	19	50.2	1763.7	0.005	7.8° E
Sep 15	12	39	50.01	-3	20	3.7	1763.8	0.026	18.6° E
Sep 16	13	25	11.64	-6	52	18.8	1767.0	0.065	29.5° E
Sep 17	14	11	23.13	-10	9	4.4	1773.8	0.120	40.4° E
Sep 18	14	58	50.47	-13	2	24.7	1784.6	0.189	51.4° E
Sep 19	15	47	54.94	-15	24	14.6	1799.6	0.270	62.5° E
Sep 20	16	38	50.31	-17	6	22.8	1819.1	0.363	73.9° E
Sep 21	17	31	40.04	-18	0	52.3	1843.0	0.463	85.6° E
Sep 22	18	26	15.63	-18	0	41.7	1870.6	0.567	97.6° E
Sep 23	19	22	17.51	-17	0	50.6	1900.9	0.672	110.0° E
Sep 24	20	19	19.45	-14	59	38.0	1931.9	0.772	122.8° E
Sep 25	21	16	55.43	-11	59	59.6	1961.1	0.861	136.2° E
Sep 26	22	14	46.33	-8	10	18.3	1985.5	0.933	150.0° E
Sep 27	23	12	43.63	-3	44	28.7	2002.0	0.981	164.0° E
Sep 28	0	10	48.32	0	58	58.2	2008.3	1.000	178.3° E
Sep 29	1	9	5.89	5	38	54.3	2003.6	0.988	167.4° W
Sep 30	2	7	39.02	9	54	16.1	1988.4	0.947	153.2° W

아래의 합성 그림[1]은 이달에 일어난 개기 월식 동안 여러 시각에 찍은 달의 사진 여러 장을 보여 준다. 사진마다 화면 중심은 본그림자의 남북 중심선과 일치했다.
이 문제에서는 관측자가 지구 중심에 있고, 각크기는 해당 천체/그림자의 각지름을 뜻한다고 가정한다.



(D2.1) 2015년 9월에 달 궤도의 원지점은 다음 가운데 어느 것에 가장 가까운가: 삭 / 상현 / 망 / 하현. 요약 답안지에서 맞는 답에 표시하라. 답의 근거는 필요 없다. 3

풀이:
표를 보면 달의 각크기는 삭 날 가까이에서 가장 작다. 따라서 답은 삭이다. 3.0
만점을 받는 데 근거는 필요 없다.

(D2.2) 2015년 9월에 황도에 대한 달 궤도의 승교점은 다음 가운데 어느 것에 가장 가까운가: 삭 / 상현 / 망 / 하현. 요약 답안지에서 맞는 답에 표시하라. 답의 근거는 필요 없다. 4

풀이:
이달에 식이 일어나므로 달 궤도의 교점은 망과 삭 날 가까이에 있다. 다음으로 달의 가장 낮은 적위가 겨우 18°임에 주목한다. 이는 삭 날 뒤에 달 궤도가 황도 위에 있다는 뜻이다. 다시 말해 승교점은 삭 가까이에 있다. 4.0
만점을 받는 데 근거는 필요 없다.

(D2.3) 주어진 자료로부터 달 궤도의 이심률 e를 어림하라. 4

풀이:
천체력에서 달의 가장 큰 각크기는 2008.3″, 가장 작은 각크기는 1763.7″이다. 거리는 각크기에 반비례한다. 따라서 근지점 거리와 원지점 거리의 비는:

$$\text{Ratio} = \frac{r_{\text{perigee}}}{r_{\text{apogee}}} = \frac{\cancel{a}}{1+e} \times \frac{1-e}{\cancel{a}}$$

2.0

[1]출처: NASA 과학 시각화 스튜디오

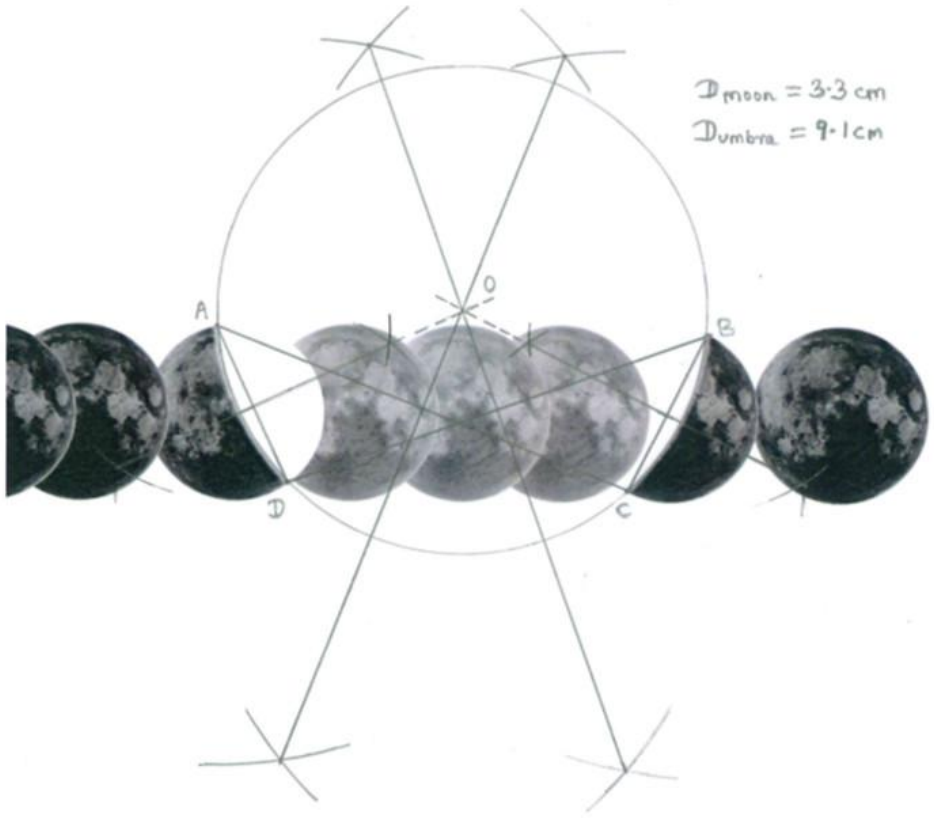
$$\therefore \frac{1-e}{1+e} = \frac{1763.7}{2008.3} = 0.87821$$
$$\therefore e = \frac{1-0.87821}{1+0.87821} = 0.064846$$
$$\boxed{e \simeq 0.065}$$

2.0

자료가 연속적이지 않아 근지점과 원지점에서의 정확한 각크기를 모르므로 반올림을 했다. 반올림하지 않은 답도 만점을 받는다.

(D2.4) 본그림자의 각크기 θumbra를 달의 각크기 θMoon으로 어림하라. 요약 답안지 뒷면의 그림에 풀이 과정을 보여라. 8

풀이:
다음 작도를 보였다. 5.0



중심을 정하는 데는 현이 두 개만 있으면 된다.
그림에 대한 점수는 두 부분으로 나뉜다:

- 본그림자 원의 중심을 정해야 한다는 것을 깨달음:
- 기하학적 작도로 본그림자 원의 중심을 정확히 정함: 2.5
  손으로 그린 원의 중심을 정함: 최대 1.5

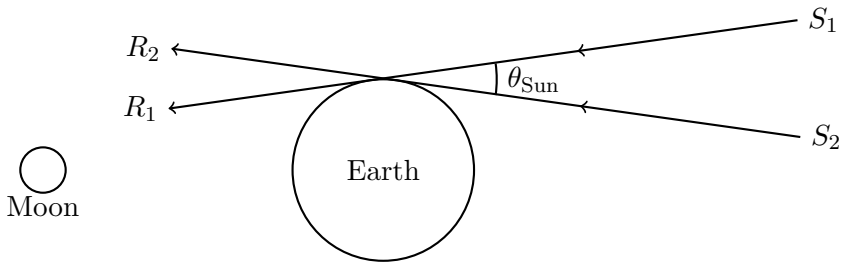
• 본그림자와 달의 지름 재기: 각 0.5

영상에서 그림자의 대략적인 중심을 어림하면 다음을 얻는다,

$$\frac{\theta_{\text{umbra}}}{\theta_{\text{Moon}}} = \frac{d_{\text{umbra}}}{d_{\text{Moon}}} \qquad \textbf{2.0}$$
$$= \frac{9.1}{3.3} = 2.76$$
$$\therefore \boxed{\theta_{\text{umbra}} \simeq 2.76\theta_{\text{Moon}}} \qquad \textbf{1.0}$$

허용 범위: ±0.10.

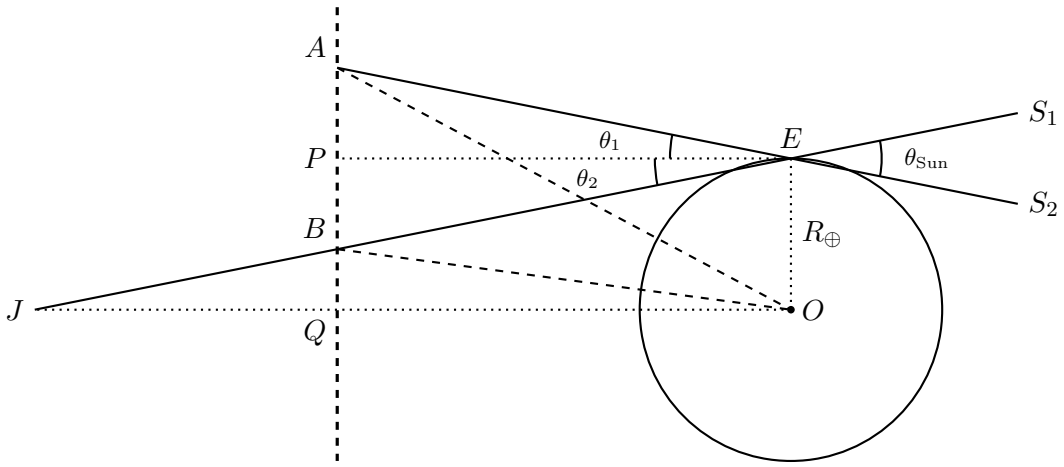
(D2.5) 월식 날 지구에서 본 태양의 시직경은 θSun = 1915.0″로 알려져 있다. 아래 그림에서 S1R1과 S2R2는 태양 원반의 지름 양 끝에서 오는 빛살이다. 그림은 축척에 맞지 않다.



반그림자의 각크기 θpenumbra를 θMoon으로 계산하라. 관측자는 지구 중심에 있다고 가정한다.

풀이:

다음 그림을 그려야 한다.



달의 경로

본그림자의 각크기는 θumbra = 2∠BOQ

반그림자의 각크기는 θpenumbra = 2∠AOQ

We have

$$QA = QP + PA$$
$$= OE + PE\tan\theta_1$$

$$\approx R_\oplus + d_{\text{Moon}}\theta_1 \qquad \text{이므로 } PA \ll PE$$
$$\approx R_\oplus + d_{\text{Moon}}\frac{\theta_{\text{Sun}}}{2} \qquad \text{이므로 } \theta_1 \approx \theta_2 \approx \theta_{\text{Sun}}/2$$ **2.0**

and

$$QB = QP - PB$$
$$= OE - PE\tan\theta_2$$
$$\approx R_\oplus - d_{\text{Moon}}\theta_2$$
$$\approx R_\oplus - d_{\text{Moon}}\frac{\theta_{\text{Sun}}}{2}$$ **2.0**

$$\therefore \theta_{\text{penumbra}} = 2\angle AOQ = 2\tan^{-1}\left(\frac{QA}{OQ}\right) \approx 2\frac{QA}{OQ} \qquad \text{이므로 } QA \ll OQ$$
$$= 2\frac{R_\oplus + d_{\text{Moon}}\frac{\theta_{\text{Sun}}}{2}}{d_{\text{Moon}}} = \frac{2R_\oplus}{d_{\text{Moon}}} + \theta_{\text{Sun}}$$ **1.0**

and

$$\theta_{\text{umbra}} = 2\angle BOQ = 2\tan^{-1}\left(\frac{QB}{OQ}\right) \approx 2\frac{QB}{OQ}$$
$$= 2\frac{R_\oplus - d_{\text{Moon}}\frac{\theta_{\text{Sun}}}{2}}{d_{\text{Moon}}} = \frac{2R_\oplus}{d_{\text{Moon}}} - \theta_{\text{Sun}}$$ **1.0**

빼면,

$$\theta_{\text{penumbra}} - \theta_{\text{umbra}} = 2\theta_{\text{Sun}} \Rightarrow \theta_{\text{penumbra}} = \theta_{\text{umbra}} + 2\theta_{\text{Sun}}$$ **1.0**

We have,

$$\theta_{\text{umbra}} = 2.76\theta_{\text{Moon}} \qquad \text{and } \theta_{\text{Sun}} = 1915.0''$$

From주어진 자료로부터 θMoon = 2008.3″. 1.0
그러므로,

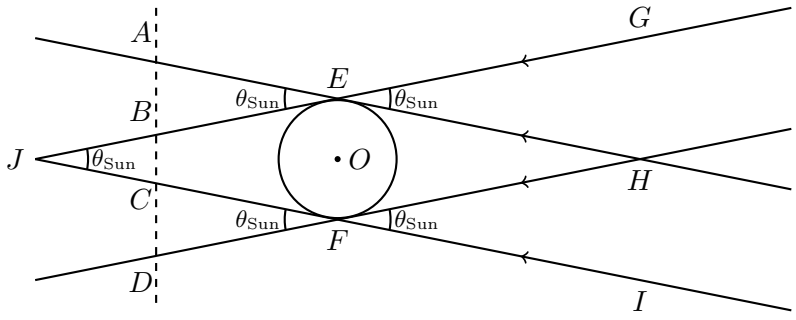
$$\theta_{\text{penumbra}} = 2.76\theta_{\text{Moon}} + 2\frac{1915.0}{2008.3}\theta_{\text{Moon}}$$

$$\boxed{\theta_{\text{penumbra}} = 4.67\theta_{\text{Moon}}}$$ **1.0**

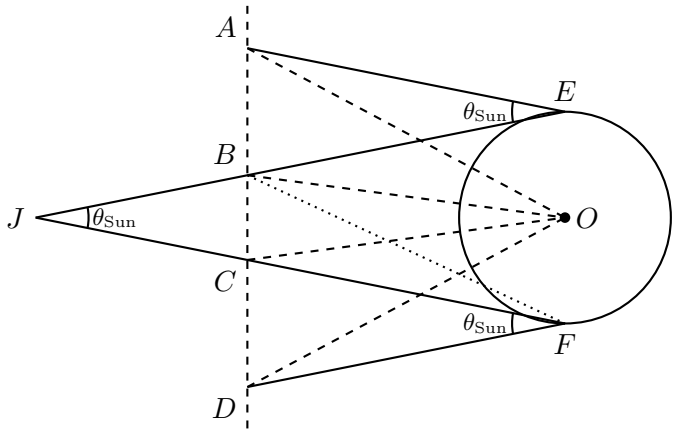
허용 범위: 4.57θMoon to 4.77θMoon.

다른 풀이:

아래 그림에서 빛살 HEA와 IFC는 태양 원반의 한쪽 가장자리에서, 빛살 HFD와 GEB는 반대쪽 가장자리에서 온다. 관측자(O)는 지구 중심에 있다고 가정한다. 달은 월식 동안 경로 ABCD를 따라 움직인다.



달의 경로



달의 경로

그림으로부터,

$$\measuredangle AEB = \measuredangle GEH = \measuredangle HFI = \measuredangle DFC = \measuredangle EJF = \theta_{\text{Sun}} \quad \textbf{3.0}$$

$$\theta_{\text{umbra}} = \measuredangle BOC = 2.76\theta_{\text{Moon}} \quad \textbf{1.0}$$

$$\theta_{\text{penumbra}} = \measuredangle AOD \quad \textbf{1.0}$$

$$\measuredangle AOD = \measuredangle AOB + \measuredangle BOC + \measuredangle COD$$

$$\measuredangle AOB = \measuredangle AEB \quad \textbf{1.0}$$

$$\measuredangle COD = \measuredangle CFD \quad \textbf{1.0}$$

$$\theta_{\text{penumbra}} \simeq \measuredangle AEB + \theta_{\text{umbra}} + \measuredangle CFD$$

$$= 2\theta_{\text{Sun}} + 2.76\theta_{\text{Moon}} = 2 \times 1915.0'' + 2.76 \times 2008.3''$$

$$\boxed{\theta_{\text{penumbra}} = 9372.9'' = 4.67\theta_{\text{Moon}}} \quad \textbf{2.0}$$

(D2.6) θEarth를 달의 중심에서 본 지구의 각크기라 하자. 월식 날 지구 중심에서 볼 달의 각크기 θMoon을 θEarth로 계산하라.

풀이:

달에서 보면,

$$\theta_{\text{Earth}} = \frac{2R_{\oplus}}{d_{\text{Moon}}} \quad \textbf{1.0}$$

(D2.5)로부터,

$$\theta_{\text{umbra}} + \theta_{\text{penumbra}} = 2\theta_{\text{Earth}} \quad \textbf{2.0}$$

$$\therefore \theta_{\text{Earth}} = \frac{\theta_{\text{umbra}} + \theta_{\text{penumbra}}}{2} = \frac{2.76 + 4.67}{2}\theta_{\text{Moon}} = 3.72\theta_{\text{Moon}}$$

$$\boxed{\theta_{\text{Moon}} = = 0.269\theta_{\text{Earth}}} \quad \textbf{2.0}$$

다른 풀이:

달이 B의 위치에 있다고 하자. 그러면 이 위치에서 본 지구의 각크기는 (앞 부분의 그림 참조)

$$\theta_{\text{Earth}} = \measuredangle EBF = \measuredangle BFD \quad \textbf{2.0}$$
$$= \measuredangle BFC + \measuredangle CFD$$
$$\simeq \theta_{\text{umbra}} + \theta_{\text{Sun}} \quad \textbf{1.0}$$

표에서 9월 28일 보름달의 각크기는 $2008.3''$이다.

$$\theta_{\text{Earth}} = 2.76 \times 2008.3'' + 1915.0'' = 7453.0''$$

$$\boxed{\theta_{\text{Moon}} = 0.269\theta_{\text{Earth}} = \frac{\theta_{\text{Earth}}}{3.72}} \quad \textbf{2.0}$$

(D2.7) 위의 결과로부터 달의 반지름 RMoon을 km로 어림하라. 3

풀이:

따라서 달의 반지름은,

$$R_{\text{Moon}} = \frac{R_\oplus}{3.72}$$
$$R_{\text{Moon}} = \frac{6371}{3.72} \quad \textbf{1.0}$$
$$\boxed{R_{\text{Moon}} \simeq 1713\,\text{km}} \quad \textbf{2.0}$$

허용 범위: ±20 km.

(D2.8) 달까지의 가장 짧은 거리 rperigee와 가장 먼 거리 rapogee를 어림하라. 4

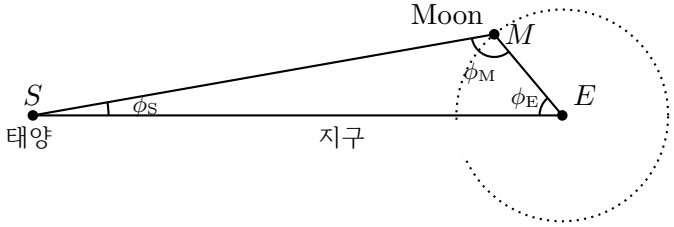
풀이:

가장 짧은 거리와 가장 긴 거리는,

$$r_{\text{perigee}} = \frac{2 \times 1713 \times 206265}{2008.3}$$
$$\boxed{r_{\text{perigee}} = 3.52 \times 10^5\,\text{km}} \quad \textbf{2.0}$$
$$r_{\text{apogee}} = \frac{2 \times 1713 \times 206265}{1763.7}$$
$$\boxed{r_{\text{apogee}} = 4.01 \times 10^5\,\text{km}} \quad \textbf{2.0}$$

(D2.9) 9월 10일의 알맞은 자료를 써서 지구에서 태양까지의 거리 dSun을 어림하라. 10

풀이:



달의 궤도

9월 10일에 달의 위상은 0.097, 이각은 36.2°이다. 이날 달의 각크기는 1792.0″이다. 따라서 9월 10일 (지구에서) 달까지의 거리는

$$d_{\text{Moon},10} = \frac{2 \times 1713 \times 206265}{1792.0}$$
$$= 3.94 \times 10^5 \text{ km} \quad \textbf{2.0}$$
$$\measuredangle EMS = \phi_M$$
$$\measuredangle ESM = \phi_S$$
$$\measuredangle SEM = \phi_E$$
$$\therefore \phi_E = 36.2^\circ \quad \textbf{1.0}$$
$$\text{phase} = \frac{1 + \cos\phi_M}{2} \quad \textbf{2.0}$$
$$\therefore \phi_M = \cos^{-1}(2 \times \text{ phase } - 1)$$
$$= \cos^{-1}(2 \times 0.097 - 1) = \cos^{-1}(-0.806)$$
$$= 143.71^\circ \quad \textbf{2.0}$$
$$\phi_S = 180^\circ - \phi_E - \phi_M$$
$$= 180^\circ - 36.2^\circ - 143.71^\circ$$
$$= 0.09^\circ \quad \textbf{1.0}$$

이제 사인 법칙을 쓰면,

$$\frac{d_{\text{Sun}}}{d_{\text{Moon},10}} = \frac{\sin\phi_M}{\sin\phi_S} \quad \textbf{2.0}$$
$$\therefore d_{\text{Sun}} = \frac{3.94 \times 10^8 \times \sin 143.71^\circ}{\sin 0.09^\circ}$$
$$\boxed{d_{\text{Sun}} = 1.48 \times 10^{11} \text{ m}} \quad \textbf{1.0}$$