지시사항 (Instructions)

1. 자료 분석 시험은 4시간 동안 진행되며 총 150점 만점이다.
2. 답안 작성을 위해 전용 IOAA 요약 답안지(Summary Answer Sheet)가 제공된다. 최종 답은 해당 요약 답안지의 적절한 칸에 기입하라. 각 답안지에는 다음을 기입하라.
   - 수험번호(국가 코드 + 1자리 숫자)
3. 풀이에는 모눈종이(Graph Paper)가 필요하다. 각 모눈종이에는 다음을 기입하라.
   - 수험번호(국가 코드 + 1자리 숫자)
   - 문제 번호
   - 그래프 번호 및 사용한 총 모눈종이 수
4. 자세한 풀이/계산을 위한 답안지(Answer Sheet)가 별도로 있다. 각 답안지에는 다음을 기입하라.
   - 수험번호(국가 코드 + 1자리 숫자)
   - 문제 번호
   - 쪽 번호 및 총 쪽수
5. 각 문제는 별도의 답안지에서 시작하라. 종이는 인쇄된 면에만 작성하고, 뒷면은 사용하지 말라. 채점되기를 원하지 않는 내용은 줄을 그어 지워라.
6. 채점자가 풀이를 더 잘 이해할 수 있도록 가능한 한 많은 수식을 사용하라. 채점자가 응시자의 언어를 이해하지 못할 수 있다. 말로 설명해야 한다면 (가능하면 영어로) 짧은 어구를 사용하라.
7. 허가 없이 자리를 떠날 수 없다. 도움이 필요하면(계산기 고장, 화장실 이용, 답안지 추가 요청 등) 표지 카드(sign card)를 사용해 감독관의 주의를 끌어라.
8. 시험의 시작과 종료는 긴 신호음으로 알린다. 또한 시험 종료 15분 전(최종 신호음 전)에 부저음이 울린다.
9. 시험이 끝나면 즉시 작성을 멈추어라. 각 부분(D1과 D2)별로 요약 답안지, 모눈종이, 답안지를 별도의 더미로 분류하여 정리하라. 시험 구역 밖으로 어떤 종이도 가지고 나갈 수 없다.
10. 봉투가 수거될 때까지 자리에서 기다려라. 모든 봉투가 수거되면 학생 안내자가 시험 구역 밖으로 안내한다.
11. 상수표는 다음 쪽에 제시되어 있다.

상수표 (Table of constants)

지구 (Earth)

질량 ($M_\oplus$)	5.98×10^{24} kg
반지름 ($R_\oplus$)	6.38×10^{6} m
중력 가속도 (g)	$9.8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$
황도 경사각(Obliquity of Ecliptic)	$23°27'$
회귀년 길이(Tropical Year)	365.2422 평균태양일
항성년 길이(Sidereal Year)	365.2564 평균태양일
알베도(Albedo)	0.39

달 (Moon)

질량 ($M_\leftmoon$)	7.35×10^{22} kg
반지름 ($R_\leftmoon$)	1.74×10^{6} m
지구로부터 평균 거리	3.84×10^{8} m
황도면에 대한 궤도 경사	$5.14°$
알베도(Albedo)	0.14
겉보기 등급(평균 보름달)	-12.74

태양 (Sun)

질량 ($M_\odot$)	1.99×10^{30} kg
반지름 ($R_\odot$)	6.96×10^{8} m
광도 ($L_\odot$)	3.83×10^{26} W
절대 등급 ($\mathcal{M}_\odot$)	4.80 mag
각지름	0.5 도

물리 상수 (Physical constants)

1 au	1.50×10^{11} m
1 pc	206,265 au
태양에서 바너드별(Barnard's Star)까지 거리	1.83 pc
만유인력 상수 (G)	$6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$
플랑크 상수 (h)	$6.62 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$
볼츠만 상수 (k_B)	$1.38 \times 10^{-23}\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$
슈테판-볼츠만 상수 (σ)	$5.67 \times 10^{-8}\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}$
허블 상수 (H_0)	$72\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$
진공에서 빛의 속력 (c)	$299{,}792{,}458\ \mathrm{m\,s^{-1}}$
양성자 질량	$938.27\ \mathrm{MeV \cdot c^{-2}}$
중수소 질량	$1875.60\ \mathrm{MeV \cdot c^{-2}}$
중성자 질량	$939.56\ \mathrm{MeV \cdot c^{-2}}$
헬륨-3 질량	$2808.30\ \mathrm{MeV \cdot c^{-2}}$
헬륨-4 질량	$3727.40\ \mathrm{MeV \cdot c^{-2}}$

(D2) 암흑 물질 탐색 (The search for dark matter) [75점]

낮은 표면 밝기 은하(low surface brightness galaxy, LSB)는 지구에서 보았을 때 표면 밝기가 주변 밤하늘보다 적어도 1등급 낮은 확산 은하(diffuse galaxy)이다. 그 물질의 일부는 중성 수소 기체와 별 같은 "바리온(baryonic)" 물질의 형태이다. 그러나 대부분의 물질은 보이지 않는 질량, 이른바 "암흑 물질(dark matter)"의 형태이다. 이 문제에서는 은하 내 암흑 물질의 질량, 암흑 물질이 은하의 회전 곡선(rotation curve)에 미치는 영향, 그리고 은하 내 암흑 물질의 분포를 조사한다.

아래 표는 UGC4325라는 LSB 은하의 자료를 제공한다. 이 은하는 정면(edge-on)으로 본다고 가정한다. 은하 중심으로부터의 거리 r마다 다음을 측정한다.

1. $\lambda_{\rm obs}$: Hα 방출선의 관측 파장. 우주의 허블 팽창(Hubble expansion)은 이미 자료에서 제거되었다.
2. $V_{\rm gas}$: HI 표면 밀도에서 유도된, $M_{\rm gas}$에 의한 회전에 대한 기체 성분의 기여.
3. V_* : R 밴드 측광에서 유도된, M_*에 의한 회전에 대한 항성 성분의 기여.

기체 성분에 의한 시험 입자의 회전 속도 $V_{\rm gas}$와 항성 성분에 의한 회전 속도 V_*는 외부 영향 없이 해당 성분만으로 생기는 은하면(plane of the galaxy) 내 속도로 정의된다. 이 속도들은 관측된 바리온 질량 밀도 분포로부터 계산된다.

r (kpc)	$\lambda_{\rm obs}$ (nm)	$V_{\rm gas}$ (km/s)	V_* (km/s)
0.70	656.371	2.87	20.97
1.40	656.431	6.75	32.22
2.09	656.464	14.14	40.91
2.79	656.475	20.18	46.75
3.49	656.478	24.08	50.10
4.89	656.484	28.08	47.94
6.25	656.481	29.25	45.47
7.10	656.481	27.03	47.78
9.03	656.482	25.90	45.32
12.05	656.482	21.03	42.30

반지름 r 부피 내 암흑 물질의 질량 $M_{\rm DM}(r)$은 암흑 물질에 의한 회전 속도 $V_{\rm DM}$, 반지름 r, 만유인력 상수 G로 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$M_{\rm DM}(r) = \frac{rV_{\rm DM}^2}{G}. \tag{1}$$

좋은 근사로, 관측된 회전 속도 $V_{\rm obs}$는 다음과 같이 모형화할 수 있다.

$$V_{\rm obs}^2 = V_{\rm gas}^2 + V_*^2 + V_{\rm DM}^2. \tag{2}$$

관측된 회전 속도 $V_{\rm obs}$는 은하 중심으로부터 측정한 반지름 r 부피 내 은하의 질량 $M(r)$에 의존한다.

반지름 r 부피 내 암흑 물질의 질량 밀도 $\rho_{\rm DM}(r)$은 은하 밀도 분포(density profile)로 다음과 같이 모형화할 수 있다.

$$\rho_{\rm DM}(r) = \frac{\rho_0}{1 + \left(\frac{r}{r_C}\right)^2} \tag{3}$$

여기서 ρ_0와 r_C는 각각 은하의 중심 밀도(central density)와 핵 반지름(core radius)이다. 이 밀도 분포에 따르면, 반지름 r 부피 내 암흑 물질의 질량 $M_{\rm DM}(r)$은 다음과 같이 기술할 수 있다.

$$M_{\rm DM}(r) = 4\pi\rho_0 r_C^2 \left[r - r_C \arctan(r/r_C)\right] . \tag{4}$$

Part 1 암흑 물질의 질량과 은하의 회전 곡선

(D2.1) 지구의 실험실에서 Hα의 방출 파장 $\lambda_{\rm emit}$은 656.281 nm이다. 거리 r에서 은하의 관측 회전 속도 $V_{\rm obs}$와 암흑 물질에 의한 회전 속도 $V_{\rm DM}$을 km s^{-1} 단위로 계산하라.

표에 주어진 서로 다른 r 값에 대해, 동역학적 질량(dynamical mass) $M(r)$과 암흑 물질의 질량 $M_{\rm DM}(r)$을 태양 질량 단위로 계산하라. [21점]

(D2.2) $V_{\rm obs}$, $V_{\rm DM}$, $V_{\rm gas}$, V_*의 점들을 반지름 r에 대해 찍어 모눈종이에 은하의 회전 곡선을 그리고, 점들을 지나는 매끄러운 곡선을 그려라(그래프를 "D2.2"로 표시하라).

관측 속도에 대한 서로 다른 성분의 기여를 내림차순으로 정렬하라. [16점]

Part 2 암흑 물질의 분포

(D2.3) 작은 r과 큰 r에서 자료 점을 하나씩 취하여 ρ_0와 r_C를 추정하라. 큰 x 값에 대해 $\arctan(x) \approx \pi/2$이고, 작은 x에 대해 $\arctan(x) \approx x - x^3/3$임을 참고하라. [7점]

(D2.4) 식 (4)를 선형 함수와 비교하면, 중심 밀도 ρ_0를 선형 적합(linear fit)으로도 구할 수 있다. 선형 적합을 사용하여 ρ_0의 또 다른 값을 구할 수 있도록 적절한 그래프를 그려라. ρ_0를 $M_\odot$ kpc^{-3} 단위로 평가하라(그래프를 "D2.4"로 표시하라). 이전 부분에서 r_C 값을 구하지 못했다면, 이 부분에서는 $r_C = 3.2$ kpc를 추정값으로 사용하라. [19점]

(D2.5) 암흑 물질 밀도의 로그 값 $\ln[\rho_{\rm DM}(r)]$을 계산하고, 반지름 r의 함수로서 은하 내 암흑 물질의 분포를 모눈종이에 그려라(그래프를 "D2.5"로 표시하라). [12점]