안내사항

1. 데이터 분석 시험은 5시간 동안 진행되며 총 150점 만점입니다.

2. 여러분의 답안 작성을 위해 IOAA **정답 전용지(Summary Answer Sheet)**가 제공됩니다. 최종 풀이한 답을 **정답 전용지에(Summary Answer Sheet)** 있는 정답란에 문제 번호에 맞게 작성하시기 바랍니다. 각각의 정답지에 꼭 다음 항목을 써 넣으십시오.

- 학생 코드

3. 여러분의 문제풀이를 위해 그래프 종이가 제공 됩니다. 각각의 그래프 용지에 다음을 꼭 기입하십시오.

- 학생 코드
- 문제 번호
- 그래프 번호와 총 사용된 그래프 용지의 매수

4. 여러분들의 자세한/대강의 문제풀이를 위해 **정답 풀이지(Answer sheet)**가 제공 될 예정입니다. 각각의 정답 풀이지에 꼭 다음 항목을 적으십시오.

- 학생 코드
- 문제 번호
- 페이지 번호와 총 페이지 수

5. 각각의 문제를 다른 정답 풀이지에 작성하시오. 반드시 정답 풀이지는 프린트 된 앞면만 사용하고 뒷면은 절대 사용하지 마시오. 만약에 여러분이 작성한 부분에서 채점이 되지 않기를 원하는 부분이 있다면 X표로 표시를 하기 바랍니다.

6. 채점자가 여러분들의 정답을 좀 더 잘 이해해기 위해서 가능한한 많은 수학적 표현을 사용하기 바랍니다. 채점자는 여러분들의 언어를 모릅니다. 따라서 무언가를 설명해야 한다면 가능한한 짧게 (영어로) 설명하기 바랍니다.

7.여러분들은 허락없이 시험을 보고 있는 책상을 떠날 수 없습니다. 여러분이 만약 어떠한 도움이 필요하다면 (계산기 오작동, 화장실 사용, 정답 풀이지 추가요구 등등), 감독관에게 손을 들어 신호를 주시기 바랍니다.

8. 시험시작의 시작과 끝은 긴 음악신호로 알려줄 예정입니다. 그리고 짧은 음악신호는 시험이 끝나기 15분전을 알려주는 신호입니다. (시험 종료 긴 음악신호가 나오기 전)

9. 시험 종료시에는 반드시 답안지 작성을 멈추어야 합니다. 여러분이 사용한 전용 정답지, 그래프 용지, 그리고 정답 풀이지를 한 묶음으로 잘 정리해서 따로 모아두기 바랍니다. 나머지 필요없는 모든 용지는 다른 쪽에 모아두기 바랍니다. 여러분은 시험장 밖으로 어떠한 종이 한장도 가지고 나갈 수 없습니다.

10. 여러분의 봉투를 다 걷을 동안 자리에서 기다리기 바랍니다. 봉투를 다 걷으면 안내자가 시험장 밖으로 나갈 수 있게 안내를 할 예정입니다.

11.여러분이 사용할 상수표는 다음 장에 있습니다.

Table of constants

질량 ($M_\oplus$)	5.98×10^{24} kg	지구
반경 ($R_\oplus$)	6.38×10^{6} m	
중력가속도 (g)	9.81 ms^{-2}	
황도경사각	23°27′	
회귀년의 길이	365.2422 mean solar days	
항성년의 길이	365.2564 mean solar days	
반사율	0.39	
질량 ($M_☾$)	7.35×10^{22} kg	달
반지름 ($R_☾$)	1.74×10^{6} m	
지구-달 평균거리	3.84×10^{8} m	
황도에 대한 궤도경사각	5.14°	
반사율	0.14	
보름달의 평균 겉보기 등급	−12.74	
질량 ($M_\odot$)	1.99×10^{30} kg	태양
반경 ($R_\odot$)	6.96×10^{8} m	
광동 ($L_\odot$)	3.83×10^{26} W	
절대등급	4.80 mag	
표면온도	5772 K	
지구에서 바라본 각지름	30′	
은하 공전 속도	220 kms^{-1}	
은하 중심으로 부터의 거리	8.5 kpc	
1 *au*	1.50×10^{11} m	물리상수
1 *pc*	206265 au	
중력상수 (G)	6.67×10^{-11} Nm^2kg^{-2}	
플랑크 상수 (h)	6.62×10^{-34} Js	
볼츠만 상수 (k_B)	1.38×10^{-23} JK^{-1}	
슈테판-볼츠만 상수 (σ)	5.67×10^{-8} $Wm^{-2}K^{-4}$	
허블 상수 (H_0)	67.8 $kms^{-1}Mpc^{-1}$	
진공에서의 빛의 속도 (c)	299792458 ms^{-1}	
진공에서의 자기 투자율 (μ_0)	$4\pi\times10^{-7}$ Hm^{-1}	
1 Jansky (Jy)	10^{-26} W $m^{-2}Hz^{-1}$	

$$\Delta \log_{10}(x) = \frac{\Delta x}{x\ ln10}$$

(D2) Compact Object in a Binary System쌍성계 내의 밀집성 [75 점]

천문학자들은 APOGEE(Apache Point Observatory Galactic Evolution Experiment) 관측 도중 마차부자리에서 특이한 쌍성계를 발견하였다. 여러분들은 이 문제에서 데이터 분석을 통해 그들이 발견한 사실을 재현할 것이다.
연구진은 시선속도(RV; radial velocity) 관측을 통해 쌍성계 내의 (보이지 않는) 밀집성을 찾고 있었다. 그들은 (이미 관측되어 공개적으로 저장되어 있는) APOGEE 스펙트럼 데이터를 사용하였는데, "홑별" ("single" star)로 알려진 별들 중 RV 변화를 보이는 별이 있는지 조사하였다. 큰 가속도(즉 큰 속도변화)를 보이는 약 200 개의 별들 중, 주기적인 밝기변화를 보이는 별이 있는지를 ASAS-SN(All-Sky Automated Survey for Supernovae) 측광 데이터를 이용하여 조사하였다. 주기적인 밝기변화는 transit 이나, 타원체 모양의 별이 자전할 때(ellipsoidal variations), 표면에 흑점(starspots)이 있는 별이 자전할 때 생길 수 있다. 이 과정을 거친 후, 연구진은 2M05215658+4359220 라 불리는 별을 골라냈는데, 이 별은 큰 RV 변화와 측광 밝기변화를 보인다.

2.1. 다음 표는 세 시점에 대해, APOGEE 스펙트럼 데이터로 측정한 2M05215658+4359220 의 시선속도(RV)를 보여준다. 우리는 이 별의 RV 변화가 보이지 않는 동반성에 의한 것으로 가정한다. 별의 고유운동(proper motion)은 무시한다.

표 3. 2M05215658+4359220 의 시선속도(Radial Velocity) 측정 값(APOGEE 데이터)

관측수행	평균율리우스일 MJD	시선속도 RV ($km\ s^{-1}$)	불확실성 Uncertainty ($km\ s^{-1}$)
1	56204.9537	−37.417	0.011
2	56229.9213	34.846	0.010
3	56233.8732	42.567	0.010

(D2.1.1) (6 점) 위의 데이터와 가속도 계산시 선형계산법(linear model)을 이용하여 이 계(system)의 **최대 가속도**(maximum acceleration)를 단위에 유념해서 계산하라 :

$a_{max} = \frac{\Delta RV}{\Delta t}\Big|_{max}$, 단위: $km\ s^{-1}\ day^{-1}$

(D2.1.2) (9 점) 주어진 데이터를 이용하여 보이지 않는 동반성의 대략적인 질량을 추정하라.

2.2. 이 특이한 별을 발견한 후, 천문학자들은 후속관측을 수행하였다. 후속관측에는 아리조나주 홉킨스산 프레드 로렌스 천문대의 1.5m Tillinghast Reflector Echelle Spectrograph (TRES)를 사용하였다. 다음 표는 후속관측을 통해 얻은 2M05215658+4359220 의 RV 값을 보여준다.

Table 4. TRES 를 사용하여 얻은 2M05215658+4359220 의 시선속도(Radial Velocity) 값

MJD	RV (km/s)	Uncertainty (km/s)
58006.9760	0	0.075
58023.9823	−43.313	0.075
58039.9004	−27.963	0.045
58051.9851	10.928	0.118
58070.9964	43.782	0.075
58099.8073	−30.033	0.054
58106.9178	−42.872	0.135
58112.8188	−44.863	0.088
58123.7971	−25.810	0.115
58136.6004	15.691	0.146
58143.7844	34.281	0.087

(D2.2.1) (14 점) 주어진 그래프 용지에, (TRES 로 관측한) RV(y 축) vs 시간(x 축)의 그래프를 그리고 그림 4 (Figure 4)로 적으시오. 그래프 상의 점들을 최적으로 지나가는(fit the given data) 적절한 **sine 곡선(sinusoidal function)**를 그려 넣어라. 그래프로부터 공전주기(P_{orb}) 와 시선속도 전체 변동폭의 절반(K, semi − amplitude)을 **추정하라**.

(D2.2.2) (4 점) 그 별(2M05215658+4359220)이 원궤도를 따라 공전한다고 가정할 경우, 공전궤도반경(r_{orb})의 **최소값**을 $R_\odot$ 와 au 두 단위 모두로 나타내시오.

(D2.2.3) (7 점) 쌍성계의 질량함수(mass function)는 다음과 같이 정의된다:

$$f(M_1, M_2) = \frac{(M_2 \sin i_{orb})^3}{(M_1 + M_2)^2}$$

여기서 아래 첨자 "1"은 주성을, "2"는 동반성을 나타낸다. i_{orb} 는 쌍성계의 궤도경사각이다. 이 질량 함수는 관측되는 변수들로 표현할 수 있다. **이 쌍성계의 질량함수**를 $M_\odot$단위로 계산하라.

2.3. APOGEE 와 TRES 의 스펙트럼, 그리고 GAIA 의 삼각시차 측정값을 자세히 분석한 결과, 천문학자들은 이 별에 대한 물리량을 다음과 같이 도출하였다.

Table 5. 2M05215658+4359220 의 일부 물리량

유효온도 Effective Temperature T_{eff} (K)	표면중력 Surface Gravity $\log g$ $(\mathrm{cm\,s^{-2}})$	시차 Parallax π (mas)	시선방향 회전속도 측정값 Measured Rotation Velocity $v_{rot}\sin i$ $(\mathrm{km\,s^{-1}})$	총(복사)플럭스 Bolometric Flux F $(\mathrm{J\,s^{-1}\,m^{-2}})$
4890 ± 130	2.2 ± 0.1	0.272±0.049	14.1±0.6	$(1.1\pm0.1)\times10^{-12}$

측광관측에 의하면 이 별의 밝기변화의 주기는 궤도 주기와 같다. 그러므로 우리는 이 별의 자전주기는 $P_{rot} = P_{orb} \equiv P$를 만족하고, 자전경사각도 $i_{orb} = i_{rot} \equiv i$을 만족한다고 가정할 수 있다.

(D2.3.1) (16 점) 보이는 별의 광도(L_1, 단위=$L_\odot$단위로 답할 것), 반경(R_1, 단위=$R_\odot$), 경사각의 sine 값($\sin i$) 및 질량(M_1, 단위=$M_\odot$)을 **계산하라**. 계산한 답의 불확실성이 얼마인지 **계산하라**(Please **include** the uncertainty into your results).

(D2.3.2) (4 점) 이 별의 올바른 형(type)을 다음에서 **골라라**: (1) 청색거성(Blue Giant) (2) 황색주계열성(Yellow main sequence star) (3) 적색거성(Red Giant) (4) 적색주계열성(Red main sequence star) (5) 백색왜성(White Dwarf)

(D2.3.3) (10 점)쌍성계의 질량함수 $f(M_1, M_2)$로부터 M_2(y 축)와 M_1(x 축)의 대략적인 관계를 그래프 용지에 **그리고 그림 5**(Figure 5)로 적으시오. 다음 세가지 관계를 모두 그려라: 가장 가능성이 높은 관계(문제 D.2.3.1 에서 유도한 $\sin i$ 값 사용), 상한값($\sin i + \Delta \sin i$ 값 사용), 하한값($\sin i - \Delta \sin i$ 값 사용).

(D2.3.4) (5 점) Figure 5 에서, $[M_1 - \Delta M_1,\ M_1 + \Delta M_1]$ 인 영역을 두 수직선 사이에 **빗금(혹은 음영)**을 쳐서 표시하라(Draw a vertical **shadowed region** of $[M_1 - \Delta M_1, M_1 + \Delta M_1]$). 또한 백색왜성과 중성자별의 최대질량에 해당하는 값을 두 수평 **파선**(dashed line)으로 그림 5(Figure 5)에 각각 표시하라. 보이지 않는 동반성의 가능한 질량범위는 얼마이고, 어떤 천체일 것으로 생각되나?