

일반 지시 사항: 자료분석 (150점)

자료분석 경시는 3시간이 주어지며 총 150점이다.

경시 전

- 시험 시작을 알리는 신호가 있기 전까지는 문제지가 들어있는 봉투를 열어서는 안된다.
- 경시의 시작과 종료는 시험감독의 신호로 결정되며, 경시 종료 15분 전일 때도 알려줄 것이다.

경시 중

1. 자료분석 경시는 DA1과 DA2의 두 부분으로 이루어져 있다. 책상 위에 DA1과 DA2가 표시된 봉투가 있을 것이다. 각 봉투 안에는 아래 항목이 들어 있다:
    - 문제 제목, 본인의 학생 코드, 문제 코드, 본인의 이름이 포함된 표지. 예: Data Analysis 1 (제목) GBR-1 DA1 John Smith (본인 이름이 정확한지 확인)
    - 문제지 (Q로 표시)
    - 답안지 (A로 표시)
    - 작업지 (W로 표시)
2. 최종 답을 쓰기 위한 용도로만 IOAA **답안지**(**A**로 표시)를 사용하시오. 최종 답은 해당 **답안지**의 적절한 칸에 쓰시오. 답안지는 인쇄된 앞면만 사용하고 뒷면은 사용하지 마시오. **작업지**(**W**로 표시)는 계산할 때 사용하시오.
3. 계산 과정이나 최종 답을 쓸 때는 항상 검정색이나 청색 펜을 사용하시오. 그렇게 해야 채점자가 스캔된 답을 좀 더 명확하게 읽을 수 있다. 잘못한 부분은 선을 그어 지우시오.
4. 채점자가 학생 답안을 좀 더 잘 이해할 수 있도록 수학적 표현을 가능한 많이 사용하시오. 채점자는 학생의 모국어를 이해하지 못한다는 점을 유념하시오. 만약 말로 설명이 필요하다면 짧은 문구를 사용하시오(가능하다면 영어로).
5. 허가 없이 자신의 책상을 떠나서는 안된다. 도움이 필요하면 (계산기 고장, 화장실 방문, 등) 손을 들어 감독관에게 알리시오.
6. 경시가 종료되면 즉각 답안 작성을 멈추어야 한다. 감독관의 지시에 따라 각 문제(DA1과 DA2)별로 답안지와 작업지를 정렬해서 해당 봉투에 넣은 뒤에 책상 위에 놓아두시오. 어떤 종이도 경시장 밖으로 가지고 나가서는 안된다.

DELEGATION PRINT

G0-2

korean (Korea)

표준상수표

기본상수

진공에서 빛의 속력	c	=	$2.998 \times 10^{8} ms^{-1}$
플랑크 상수	h	=	$6.626 \times 10^{-34} Js$
볼츠만 상수	k_B	=	$1.381 \times 10^{-23} JK^{-1}$
스테판-볼츠만 상수	σ	=	$5.670 \times 10^{-8} Wm^{-2}K^{-4}$
기본전하	e	=	$1.602 \times 10^{-19} C$
만유인력상수	G	=	$6.674 \times 10^{-11} Nm^{2}kg^{-2}$
보편기체상수	R	=	$8.315 Jmol^{-1}K^{-1}$
아보가드로 상수	N_A	=	$6.022 \times 10^{23} mol^{-1}$
비인의 법칙 상수	$\lambda_m T$	=	$2.898 \times 10^{-3} mK$
전자의 질량	m_e	=	$9.109 \times 10^{-31} kg$
양성자의 질량	m_p	=	$1.673 \times 10^{-27} kg$
중성자의 질량	m_n	=	$1.675 \times 10^{-27} kg$
원자 질량 단위 (a.m.u.)		=	$1.661 \times 10^{-27} kg$

DELEGATION PRINT

G0-3

korean (Korea)

천문자료

1 파섹	$1\ pc$	$=$	$3.086 \times 10^{16} m$
		$=$	$206\ 265\ au$
		$=$	$3.262\ ly$
1 천문단위	1 au	$=$	$1.496 \times 10^{11} m$
1 잰스키	1 Jy	$=$	$10^{-26} W m^{-2} Hz^{-1}$
허블상수	H_0	$=$	$70\ kms^{-1} Mpc^{-1}$
태양광도	L	$=$	$3.826 \times 10^{26} W$
태양의 겉보기 각지름	θ	$=$	32’
태양의 유효온도	$T_{eff,}$	$=$	$5778K$
황도경사각 (지구)	ε	$=$	23.5°
황도에 대한 달궤도 경사		$=$	05°08’43”
보름달의 겉보기 안시등급		$=$	-12.74
황도북극 (J2000.0)	(α_E, δ_E)		$(18^h 00^m 00^s, +66°33’39”)$
은하북극 (J2000.0)	(α_G, δ_G)		$(12^h 51^m 26^s, +27°07’42”)$
1 항성일		$=$	$23^d 56^m 04^s$
1 회귀년		$=$	365.2422 태양일
1 항성년		$=$	365.2564 태양일

태양의 등급

겉보기 안시	$=$	-26.75
절대 안시	$=$	$+4.82$
겉보기 복사	$=$	-26.83
절대 복사	$=$	$+4.74$

DELEGATION PRINT

Data Analysis

G0-4

korean (Korea)

태양계

천체	평균 반지름 (km)	질량 (kg)	장반경 (au)	이심율
태양	695 500	1.988×10^{30}	—	—
수성	2 440	3.301×10^{23}	0.387	0.206
금성	6 052	4.867×10^{24}	0.723	0.007
지구	6 378	5.972×10^{24}	1.000000	0.016 710
달	1 737	7.346×10^{22}	0.002572	0.054 900
화성	3 390	6.417×10^{23}	1.524	0.093
목성	69 911	1.898×10^{27}	5.203	0.048
토성	58 232	5.683×10^{26}	9.537	0.054
천왕성	25 362	8.681×10^{25}	19.189	0.047
해왕성	24 622	1.024×10^{26}	30.070	0.009

가우스식

코사인 정리 : $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$

사인 정리 : $\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$

선형최소자승적합식 : $y = b_1 x + b_2$

여기에서

$$b_1 = \frac{n\sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

그리고

$$b_2 = \overline{y} - b_1 \overline{x}$$

$\overline{x}$ 와 $\overline{y}$ 는 x와 y의 평균 값이다.

DELEGATION PRINT

자료분석 1: 비례 관계 (Scaling Relations) (75점)

이 문제 풀이를 시작하기 전, 분리된 다른 봉투에 포함된 일반적 지시사항을 읽을 것.

나선 은하는 원반 형태의 회전하는 구조를 이며, 나선 은하의 동역학적 상태는 '회전 곡선 (rotation curve)'을 통해 상당히 이해할 수 있다. 회전 곡선은 은하 중심으로부터의 거리에 따라 평균적인 회전 속도를 정량적으로 나타낸 곡선이다 (그림 1, 곡선 B 참고). 흥미로운 점은 곡선의 평평한 부분인데, 이 평평한 부분은 암흑물질이 존재하기 때문에 나타난다. 만약 암흑물질이 없다면, 회전 곡선은 곡선 A에 묘사된 것처럼 은하 중심으로부터 거리가 멀어짐에 따라 (은하 반지름이 증가함에 따라) 꾸준히 감소하게 된다.

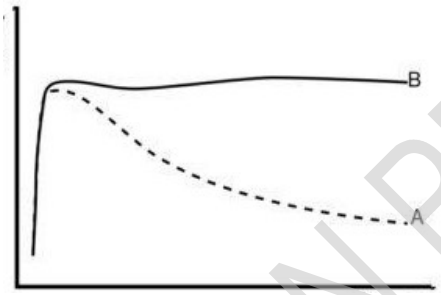


그림 1: 회전 곡선. 회전 속도 (Y축) vs. 반지름 (X축)

나선은하에서, 은하 전체의 고유 밝기와 점근적 회전 속도 (은하의 가장 바깥쪽 부분인 R_{max}에서의 회전 곡선으로 주어지는 속도) 사이에 강한 상관관계가 관측되었고, 이 결과는 툴리-피셔 관계 (Tully-Fisher relation; TF relation)라고 알려져 있다. 이 관계는 어떤 밴드에서의 밝기를 사용해도 나타난다. 그림 2는 한 은하단에 있는 은하들을 가지고 툴리-피셔 관계를 보여주고 있다. 각각의 점이 하나의 은하에 대한 결과를 나타내고, 실선은 전체 샘플의 K 밴드 절대등급과 $log_{10}(V_{\text{max}})$ 사이의 선형 관계를 가장 잘 피팅한 결과를 나타낸다.

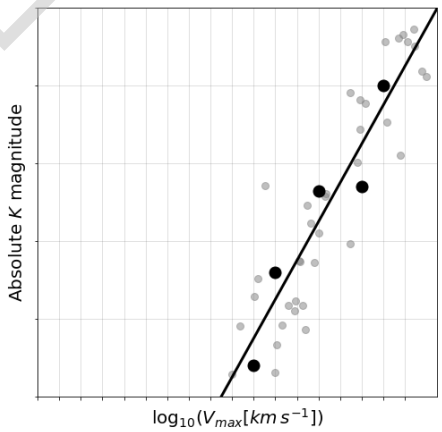


그림 2: K 밴드 절대등급 vs. $\log_{10}(V_{\text{max}}[km\ s^{-1}])$. 수십 개의 은하들에 대한 툴리-피셔 관계. 각각의 점이 하나의 은하를 나타낸다. 진하게 표시된 점들은 5개의 선별된 은하이며, Part 1.2에 숫자들이 주어져 있다.

DELEGATION PRINT

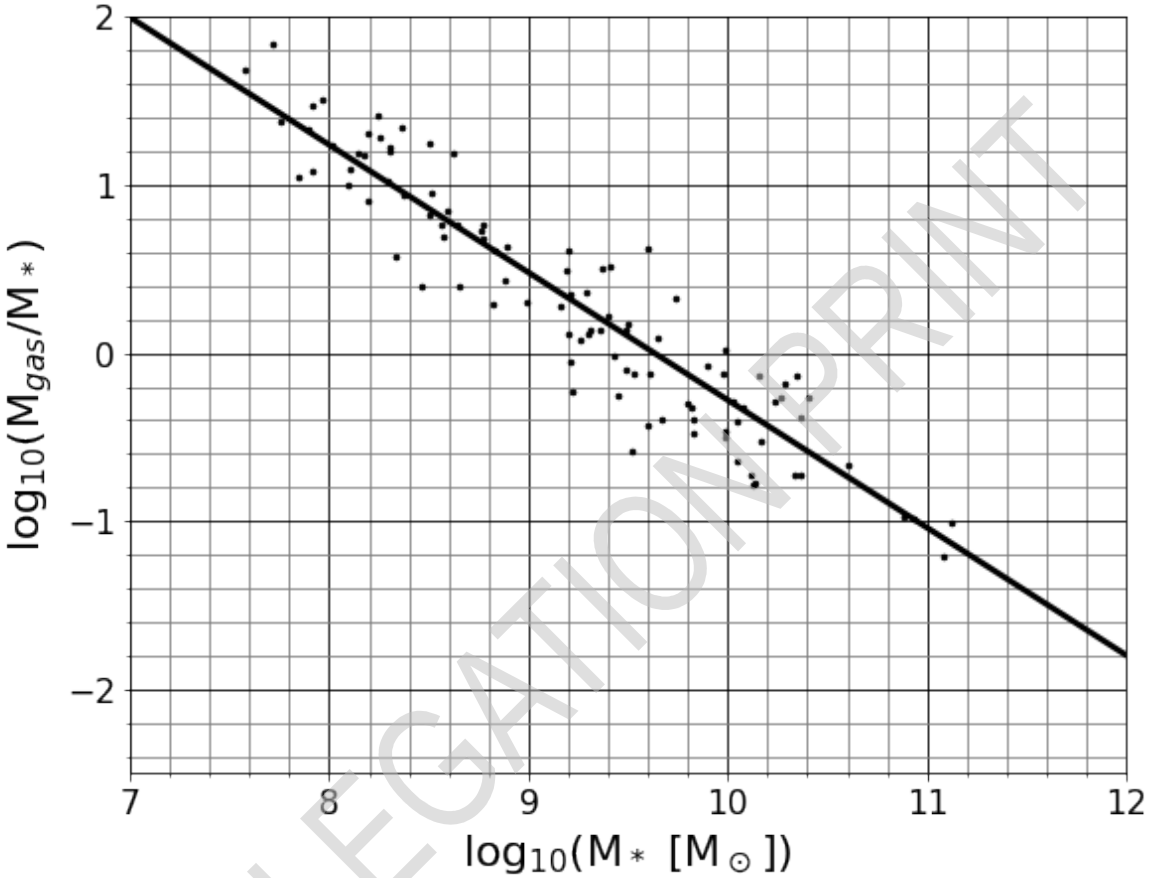


그림 3: 기체 비율 vs. 별 질량.

DELEGATION PRINT

그림 3은 또다른 흥미로운 추세를 보여주고 있다: 별 질량(stellar mass; M_*)이 큰 나선은하는 기체 비율(gas fraction; M_{gas}/M_*)이 작은 경향이 있다.

앞으로 나오는 질문들에 답하려면 방금 소개된 비례 관계들을 사용하여 은하들의 물리량을 도출해야 한다. 다음 안내사항들을 고려하여 문제에 답하여라.

- V_{max}는 모든 은하들에 대하여 같은 반지름 (R_{max})에서 측정되었다고 가정하라. V_{max}는 회전 곡선의 평평한 부분과 별 원반의 가장 바깥 부분을 한참 벗어난 곳에서까지 일정하다.
- R_{max}까지 존재하는 암흑 물질의 총 질량을 M_{dm}이라고 하고, 은하의 모든 구성요소들 (기체, 별, 암흑 물질)을 더한 총 질량을 M_{tot}이라고 하라.
- 모든 은하들이 동일한 항성 종족[1]으로 구성되었다고 가정하고, 기체는 별빛과 상호작용하지 않는다고 가정하라.
- 은하단은 아주 멀리 있다. 은하단까지의 거리는 은하단의 크기보다 훨씬 크다.
- 구면 대칭인 (spherical-symmetric) 질량 분포에서, 중심으로부터 거리가 r인 위치에 있는 입자의 중력 효과를 추정할 때, 반지름 r까지의 질량을 모두 더한 질량 $M(\leq r)$을 가진 입자가 중심에 있다고 가정하면 된다.

Data Analysis

Q1-3

korean (Korea)

[1]항성 종족 (stellar population)이라는 용어는 은하에 존재하는 별의 종류, 그리고 각 종류의 별이 전체 별의 개수와 비교하여 어느 정도의 비율로 존재하는지를 의미한다.

Part 1 (20점).

1.1 그림 3을 분석해서 다음 관계식의 적절한 상수를 찾아라: $M_{gas} = a \times M_*^b$ 5.0pt

$$a = ?$$

$$b = ?$$

1.2 툴리-피셔 관계식을 나타낸 그림에는 5개의 점이 진하게 표시되어 있다. 이 5개의 은하 데이터는 다음 표에 주어져 있다. 표의 값들을 이용하여 툴리-피셔 관계식의 적절한 상수를 찾아라. 최소자승법 (least squares)을 사용하여 선형 관계를 구하면 된다. 15.0pt

노트: $log_{10}(V_{\text{max}})$를 변수 x, K를 변수 y로 하여 선형 관계를 구하면 된다.

$V_{\text{max}}[km/s]$	$K[mag]$
79.4	−16.8
100.1	−19.2
158.5	−21.3
251.2	−21.4
316.2	−24.0

$$K = c \times log_{10}(V_{max}) + d$$

$$c = ?$$

$$d = ?$$

DELEGATION PRINT

Part 2 (16점).

은하단에 있는 두 은하 G1, G2의 겉보기등급 ($apparent$ magnitudes)은 다음과 같다.

$$k_1 = 19.2 \quad ; \quad k_2 = 25.2$$

이 정보와 Part 1에서 찾은 관계식을 이용하여 다음 식의 알맞은 지수를 구하여라.

2.1 6.0pt

$$\frac{M_{*1}}{M_{*2}} = 10^e \quad ; \quad e = ?$$

2.2 4.0pt

$$\frac{M_{gas1}}{M_{gas2}} = 10^f \quad ; \quad f = ?$$

2.3 6.0pt

$$\frac{M_{tot1}}{M_{tot2}} = 10^{g} \quad ; \quad g = ?$$

Part 3 (15점).

3.1 15.0pt

은하	겉보기등급 k	$M_{gas}[M_\odot]$	$M_*\,[M_\odot]$	$M_{dm}[M_\odot]$	$M_{tot}\,[M_\odot]$
G_1	19.2				4.39×10^{11}

은하 G_1의 R_{max}까지의 암흑 물질 질량/바리온 (baryon) 질량 비율이 6.82라는 사실을 이용하여 표의 빈칸을 채워라.

Part 4 (24점).

4.1 CCD 보정 오차 (calibration error) 때문에 발생하는 각 겉보기등급의 계통 오차 (systematic uncertainty)가 $\sigma_{sys} = \pm 0.2$ 라고 하자. 그러면 k_1은 $k_1 = 19.2 \pm 0.2$가 된다. 즉, k_1은 대체로 $[19.0,\ 19.4]$ 사이의 값을 가진다. k_2에 대해서도 마찬가지다.
k_1과 k_2가 최대로 변한다고 가정하여 비례 관계 $\frac{M_{*1}}{M_{*2}} = 10^{e}$ (Part 2.1에서 찾은 식)에서의 지수 e 를 다시 계산하고 범위로 나타내어라. 4.0pt

$$e \in [?, ?]$$

4.2 이제 어떤 관계에서 데이터가 항상 자연스럽게 퍼져 있다는 것을 고려하자. 예를 들어, 주어진 K등급에서 툴리-피셔 관계는 하나의 $log_{10}(V_{\text{max}})$ 값을 주지만, 평균적인 툴리-피셔 관계에서 자연스럽게 퍼져 있는 데이터의 분포로부터 얻을 수 있는 가능한 $log_{10}(V_{\text{max}})$ 값의 범위를 이야기하는 것이 하나의 값을 주는 것보다 더 현실적이다. 이것을 통계 오차 (statistical uncertainty) σ_{stat}라고 한다.
문제 1.2에서 구한 툴리-피셔 관계를 사용하여 K등급으로부터 $log_{10}(V_{\text{max}})$를 구한다고 할 때, 통계 오차를 추정하라. 이를 위해 각 점에서의 실제 $log_{10}(V_{\text{max}})$ 값과, 선형 관계에서 K등급을 대입하여 구한 $log_{10}(V_{\text{max}})$ 값의 차이를 가지고, 이 차이들의 제곱 평균 제곱근 (root mean square; RMS) 값의 두 배가 되는 값을 통계 오차라고 하라†. 10.0pt

$$\sigma_{stat} = ?$$

† 어떤 값들의 제곱 평균 제곱근 (RMS)은 각 값들의 제곱값에 대한 산술평균을 구하고, 그 평균값의 제곱근을 취한 값을 말한다.

4.3 계통 오차와 통계 오차 때문에 값이 최대로 변할 때를 가정하여 비례 관계 $\frac{M_{tot1}}{M_{tot2}} = 10^{g}$에서의 지수 g를 다시 계산하고 범위로 나타내어라. 10.0pt

$$g \in [?, ?]$$

SELECTION PRINT

자료분석 1: 비례 관계 (Scaling Relations) (75점)

Part 1 (20점).

1.1 (5.0 pt)

$a =$

$b =$

1.2 (15.0 pt)

$c =$

$d =$

Part 2 (16점).

2.1 (6.0 pt)

$e =$

2.2 (4.0 pt)

$f =$

2.3 (6.0 pt)

$g =$

Part 3 (15점).

3.1 (15.0 pt)

은하	겉보기등급 k	$M_{gas}[M_\odot]$	$M_*\,[M_\odot]$	$M_{dm}[M_\odot]$	$M_{tot}\,[M_\odot]$
G_1	19.2				4.39×10^{11}

DELEGATION PRINT

Data Analysis

A1-2

korean (Korea)

DELEGATION PRINT

Part 4 (24점).

4.1 (4.0 pt)

$e \in [\quad , \quad]$

4.2 (10.0 pt)

$\sigma_{stat} =$

4.3 (10.0 pt)

$g \in [\quad , \quad]$

DELEGATION PRINT