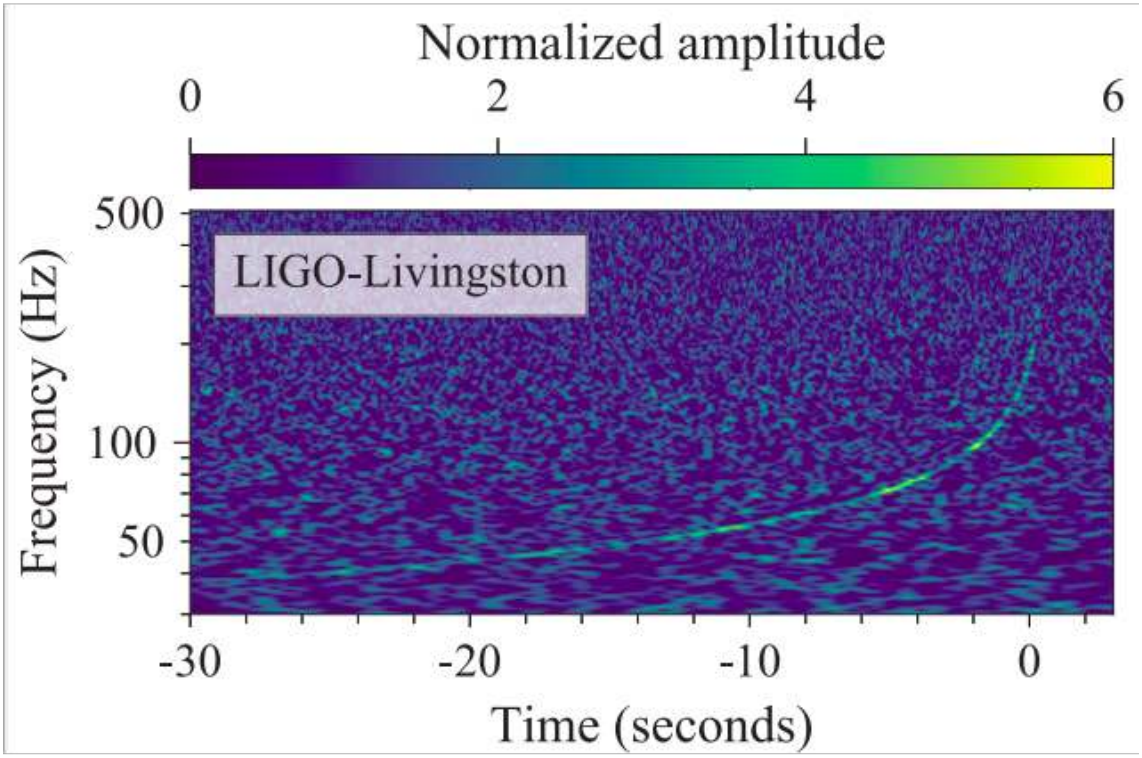
이 문제에서는 쌍성 중성자별계의 병합을 LIGO가 처음으로 관측한 중력파 사건 GW170817이 담긴 자료의 시간-진동수 표현을 분석한다.



1 그래프의 자료

(1.1) 반로그 그래프가 주어지며, 이로부터 진동수와 시간 값을 뽑아야 한다. 잰 가로축 좌표 x로부터 실제 시간 t를 얻는 선형 식을 구하라. (2점)

좌표 y.

축척을 될 수 있는 한 정확하게 하려고 멀리 떨어진 시간 값들을 잡는다. x = 0.0 cm일 때 t = −30 s이고, 자로 재면 t = 0 s

When $x = 0.0\,\mathrm{cm}$ $t = -30\,\mathrm{s}$, using the ruler we can also measure that at $t = 0\,\mathrm{s}$ we have $x = 11.1\,\mathrm{cm}$. **1.0**

그러면

$$0.0\,\mathrm{cm} = (-30\,\mathrm{s})A + B$$
$$11.1\,\mathrm{cm} = (0\,\mathrm{s})A + B = B$$
$$A = \frac{11.1\,\mathrm{cm}}{30\,\mathrm{s}} = 0.37\,\mathrm{cm/s}$$
$$\therefore t = \frac{x - 11.1}{0.37}\mathrm{s}$$ **1.0**

(1.2) 마찬가지로, 잰 좌표의 함수로 진동수 f를 나타내는 식을 구하라

coordinate y. (3점)

앞의 축척과 마찬가지로,

$$0.0\,\mathrm{cm} = C\log(30\,\mathrm{Hz}) + D$$
$$5.3\,\mathrm{cm} = C\log(500\,\mathrm{Hz}) + D \quad \textbf{1.0}$$
$$5.3\,\mathrm{cm} = C\log\left(\frac{500}{30}\right)$$
$$C = 4.34\,\mathrm{cm}$$
$$D = -6.41\,\mathrm{cm}$$
$$\therefore f = 10^{\left(\frac{y+6.41}{4.34}\right)}\mathrm{Hz} \quad \textbf{2.0}$$

(1.3) 얻은 관계식을 써서 주어진 그래프에서 시간과 해당 진동수의 값을 적어도 12개 뽑아라. 값 가운데 적어도 하나는 100 Hz보다 큰 진동수에 해당해야 한다. (6점)

학생은 그래프에서 편리한 점을 고를 수 있으므로 X 축척을 쓸 필요는 없다.

x(cm)	y(cm)	t(s)	f(Hz)	$f^{-8/3}(Hz^{-8/3})$
-	0.5	-28.0	39.1	5.67E-05
-	0.5	-26.0	39.1	5.67E-05
-	0.6	-24.0	41.3	4.92E-05
-	0.6	-22.0	41.3	4.92E-05
-	0.7	-20.0	43.5	4.27E-05
-	0.8	-18.0	45.9	3.71E-05
-	0.9	-16.0	48.4	3.22E-05
-	1.0	-14.0	51.0	2.79E-05
-	1.1	-12.0	53.8	2.43E-05
-	1.2	-10.0	56.7	2.11E-05
-	1.4	-8.0	63.1	1.59E-05
-	1.6	-6.0	70.1	1.20E-05
-	1.8	-4.0	78.0	0.90E-05
-	2.3	-2.0	101.7	0.43E-05
-	3.4	0.0	182.4	0.09E-05

행마다 0.5점 (마지막 열 제외). 최대 6점.

2 계의 매개변수 계산

진동수가 이렇게 변하는 것을 가장 그럴듯하게 설명하는 것은, 서로 도는 두 질량 m1과 m2가 중력파를 내보내면서 나선형으로 다가가는 것이다. 낮은 진동수에서 이런 변화는 처프 질량으로 특징지어진다

$$M_{chirp} = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1+m_2)^{1/5}} = \frac{c^3}{G}\left[\frac{5}{96}\pi^{-8/3} f^{-11/3}\dot{f}\right]^{3/5}$$

여기서 f and $\dot{f}$ 는 관측 진동수와 그 시간 미분, G와 c는 중력 상수와 빛의 속력이다.

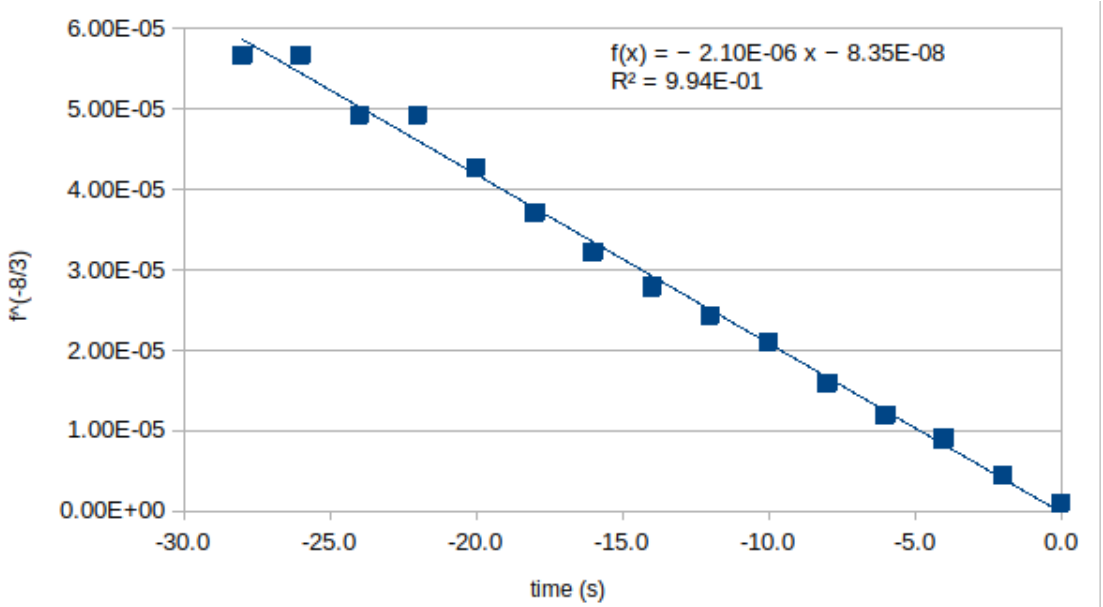
(2.1) 위 식을 선형화하여 진동수의 시간 의존성을 구하라. (3점) (3점)
참고: $x^n\dot{x} = k$, 이면 $\frac{x^{n+1}}{(n+1)} = kt + C$이며, 여기서 k, n, C는 모두 상수이다.

$$\frac{96}{5}\pi^{8/3}\left(\frac{GM_{chirp}}{c^3}\right)^{5/3} = f^{-11/3}\dot{f}$$

$$\therefore \left[\frac{96}{5}\pi^{8/3}\left(\frac{GM_{chirp}}{c^3}\right)^{5/3}\right] t + \left[\frac{3}{8}\right] f^{-8/3} + C = 0$$

3.0

(2.2) 밀리미터 모눈종이를 써서 처프 질량과 그 불확도를 태양 질량 단위로 구하라 paper. **(15pt)**



계산: $f^{-8/3}$ 값 **3.0**

바르게 그린 그래프 **6.0**

$$\text{slope} = \frac{8}{3}\left[\frac{96}{5}\pi^{8/3}\left(\frac{GM_{chirp}}{c^3}\right)^{5/3}\right]$$

$$M_{chirp} = \left[\left(\frac{5}{256}\right)^{3/5}\frac{c^3}{G}\pi^{-8/5}\right](\text{slope})^{3/5}$$ **2.0**

$$\text{slope} = 2.10 \times 10^{-6}$$ **2.0**

$$\therefore M_{chirp} = 2.39 \times 10^{30}\,\text{kg} = 1.20 M_\odot$$ **2.0**

95% 신뢰 구간으로

$$\Delta\text{slope} = 9 \times 10^{-8}$$

$$\frac{\Delta M_{chirp}}{M_{chirp}} = \frac{3}{5}\frac{\Delta\text{slope}}{\text{slope}} = 0.04$$

$$\Delta M_{chirp} = 0.03 M_\odot$$

지상 중력파 검출기가 재는 것은 실은 검출기 틀의 질량이며, 이는 원천 틀의 질량과 다음 관계가 있다

$$m_{\text{detector}} = (1+z)m$$

여기서 z는 쌍성의 적색 이동이다.
(2.3) 모은하 NGC 4993의 적색 이동이 z = 0.009783으로 알려져 있다. 원천 틀의 처프 질량을 구하라. (2점)

$$M_{chirp} = \frac{M_{chirp_{\text{detactor}}}}{1+z} = \frac{1.20M_\odot}{1.009783} = 1.19M_\odot$$ **2.0**

(2.4) NGC 4993까지의 거리를 구하라. (3점)

허블 법칙에 따르면,

$$D = \frac{zc}{H} = \frac{0.009783 \times 3 \times 10^5}{70} = 41.9\,\text{Mpc}$$ **2.0**

(2.5) 질량비 q = m1/m2는 재기가 훨씬 어렵다. 고급 파형 분석에 따르면 이 계의 q는 0.73에서 1.0 사이였다. 질량 m1(주성)과 m2(동반성)의 값의 범위를 계산하라. (6점)

$$M_{chirp} = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1+m_2)^{1/5}}$$

$$\therefore M_{chirp} = m_2 \sqrt[5]{\frac{q^3}{1+q}}$$ **2.0**

이는 q의 증가 함수이다

$$\therefore m_{2,min} = M_{chirp} 2^{1/5} = 1.37M_\odot$$

$$m_{2,max} = 1.60M_\odot$$ **1.0**

또, $$M_{chirp} = \frac{m_1}{q}\sqrt[5]{\frac{q^3}{1+q}} = \frac{m_1}{\sqrt[5]{q^2(1+q)}}$$ **2.0**

$$\therefore m_{1,max} = M_{chirp} 2^{1/5} = 1.37M_\odot$$

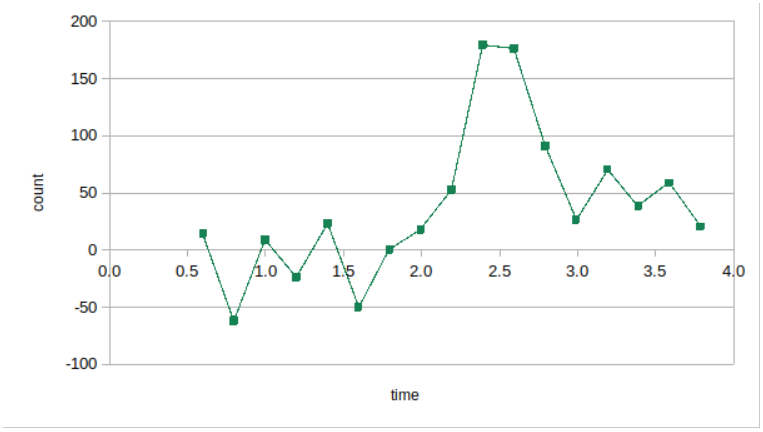
$$m_{2,min} = 1.17M_\odot$$ **1.0**

3 중력파의 속력

감마선 폭발 GRB 170817A는 페르미 감마선 폭발 감시기가 중력파 사건과 거의 동시에 관측했다. 같은 중성자별 병합이 신호의 원천으로 밝혀졌다. 아래 표에서 첫째 열은 2017년 8월 17일 12:41:04 UTC에 일어난 중력파 봉우리가 도착한 뒤의 시간이다. 이 봉우리는 중성자별 병합의 시작을 나타낸다. 둘째 열은 페르미 GBM에서 잰 검출기 계수이다. 배경은 이미 신호에서 뺐다.

$t(s)$	event count (/s)
0.5981	15
0.7975	-62
0.9968	9
1.1962	-24
1.3956	24
1.5949	-50
1.7943	0
1.9937	18
2.1930	53
2.3924	179
2.5918	176
2.7911	91
2.9905	26
3.1899	71
3.3892	38
3.5886	59
3.7880	21

(3.1) 밀리미터 모눈종이에 시간에 대한 사건 계수를 그려라. (6점)



(3.2) 병합 시작과 감마선 폭발 시작 사이의 지연 △t를 어림하라 (1점)

사건은 △t = 1.8 s에서 시작하는 것으로 보인다. 어떤 학생은 신호가 사건 전의 요동보다 확실히 위에 있는 때인 △t = 2.2 s로 쓸 수도 있다. 두 답 모두 인정한다. 1.0

이 측정으로부터 여행하는 동안의 이른바 상대 속력 차이를 정할 수 있다.

$$\frac{\Delta v}{v_{EM}} = \frac{v_{GW} - v_{EM}}{v_{EM}}$$

(3.3) 이 양을 △t와 원천까지의 거리 D로 나타내어라. (1점) (1점)

간단히 넣어 계산하면

$$\frac{\Delta v}{v_{EM}} = \frac{\Delta t v_{GW}}{D} \approx \frac{\Delta t c}{D}$$

1.0

(3.4) 조심스럽게, 중력파 신호의 봉우리와 첫 GRB 광자가 동시에 나왔다고 가정하여 지연 전체를

중력파 신호가 더 빨리 간 탓으로 돌리면, 이 시간 차이가 △v의 상한을 준다. 이 상한을 계산하라. (1점)

$$\frac{\Delta v}{v_{EM}} = 4.2 \times 10^{-16} \text{ to } 5.1 \times 10^{-16}$$ **1.0**

(3.5) △v의 하한을 얻으려면, 두 신호가 △t보다 더 차이 나는 시각에 나왔고 더 빠른 전자기 신호가 그 차이의 일부를 메웠다고 가정할 수 있다. 최대 시간 지연을 10 s로 잡고 하한을 구하라. (1점)

$$\Delta t' = \Delta t - 10 = -8.2\,\text{s} \text{ to } 7.8\,\text{s}$$

이 시간 지연으로부터

$$\frac{\Delta v}{v_{EM}} = -1.9 \times 10^{-15} \text{ to } 1.8 \times 10^{-15}$$ **1.0**