## 자료 분석 - 은하 탐사

우주론에서 은하군의 관측은 복잡한 이론 모형, 우주 팽창, 그리고 그 거동 분석의 연구와 검증에 매우 중요하다. 은하 탐사와 특수한 통계 분석에만 쓰이는 망원경이 많다. 이 모든 것의 산물이 은하 목록인데, 이는 이런 관측과 복잡한 계산 분석의 결과이다. 은하는 보통 (구 모양인) 매우 큰 암흑 물질 헤일로 안에서 무리를 지어 생긴다. 물질의 대부분은 중심에 모여 있으므로, 그곳에 질량이 큰 중심 은하가 있을 확률이 높다. 이 문제에서는 모든 헤일로에 중심 은하 하나와 위성 은하 여럿이 있다고 가정한다.
짐작하듯이 이 모든 것에는 큰 계산 능력이 필요하다: 은하를 구별하고, 적색 이동으로 보정한 좌표를 처리하는 등. 복잡한 통계 분석에는 은하군의 상관 함수 계산, 곧 가능한 모든 두 은하 쌍 사이 거리의 히스토그램 만들기가 포함된다. 이 문제의 주목적은 관측 자료를 이론적으로 통계 분석하여 어떤 종류의 은하군이 관측되었는지 알아내는 것이다. 관측 몇 번으로 은하군의 특성을 추론할 수 있는 이론 모형이 있으면 과학자들에게 매우 쓸모 있고, 많은 계산 시간과 그런 자료 분석에 따르는 오류를 줄여 준다. 그림 1에서 여러 은하군의 확률 밀도를 볼 수 있다. X축은 거리, Y축은 확률 밀도이다. 은하단 유형은 여섯 가지(A-F)이며 각각의 밀도가 있다. 이 문제의 목표는 우리가 어떤 종류의 암흑 물질 헤일로 무리를 관측하고 있는지 정하는 것이다.

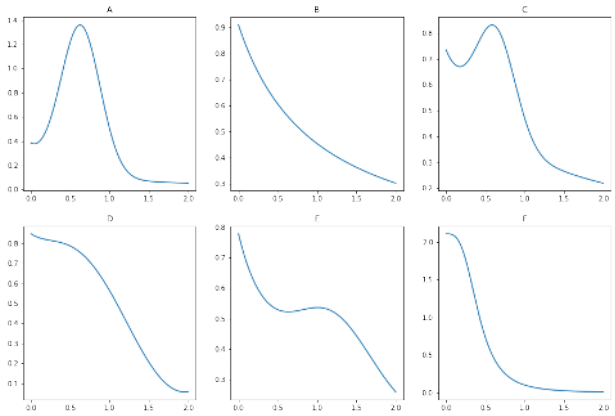



그림 1: 가능한 모든 은하 쌍(서로 다른/같은 암흑 물질 헤일로)의 확률 밀도

## 1부 (35점)

관측 자료를 나타내는 표 1이 주어진다. 다른 자료와 관측으로부터 이 은하들은 모두 같은 암흑 물질 헤일로에 속한다고 결론지었다. 위성 은하들의 좌표를 볼 수 있다. 중심 은하의 좌표는 8.300; 6.200; 1.100이다. 덧붙인 열은 그 점들 바로 가까이에서 발견된 은하의 수이다. 간단히 하기 위해 그 은하들의 좌표는 같다고 가정해도 된다. 이 좌표들은 지구의 관측자에 중심을 둔 데카르트 좌표계로 주어져 있다.

| | x (MPC) | y (MPC) | z (MPC) | N (은하 수) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 8.401 | 6.309 | 1.394 | 291 |
| 2 | 9.883 | 7.189 | 1.506 | 170 |
| 3 | 8.883 | 6.413 | 2.226 | 253 |
| 4 | 8.444 | 6.569 | 2.439 | 8 |
| 5 | 7.782 | 6.048 | -0.358 | 72 |
| 6 | 8.780 | 6.305 | 2.463 | 120 |
| 7 | 7.990 | 5.881 | 0.532 | 302 |
| 8 | 8.540 | 6.388 | 0.369 | 52 |
| 9 | 7.975 | 6.030 | 1.216 | 28 |
| 10 | 7.072 | 5.431 | 0.488 | 40 |
| 11 | 8.037 | 5.965 | 0.615 | 72 |
| 12 | 8.681 | 6.483 | 0.734 | 379 |
| 13 | 7.115 | 5.259 | 1.403 | 82 |
| 14 | 9.587 | 7.130 | 0.322 | 62 |
| 15 | 8.193 | 6.104 | 0.915 | 305 |
| 16 | 7.613 | 5.847 | 1.666 | 293 |

데카르트 좌표를 구면 좌표로 바꾸기 전에, 헤일로 중심에 원점을 둔 알맞은 국부 좌표계를 찾아야 한다.

(a) 데카르트 좌표의 모든 쌍을 따로따로 그래프에 그려라. 이 헤일로가 원반 모양이라는 사실로 그 법선의 방향을 구하라. (4점)

(b) 국부 좌표계의 단위 벡터를 적어라. 알맞은 방향을 고르고, X축을 시선과 일치하도록 잡아라. (3점)

(c) 주어진 데카르트 좌표를 국부 X Y Z 좌표로 바꾸어라. 표 1(답안지에 따로 주어짐)의 값 X, Y, Z를 채워라. (8점)

(d) 국부 데카르트 좌표를 구면 좌표로 바꾸어라(중심 은하를 좌표계 중심으로 잡고, ϕ는 X축에 대해, θ는 Z축에 대해 계산한다). 표 1(답안지에 따로 주어짐)의 다른 값들을 채워라

답안지에 따로 주어짐): r, θ, ϕ. (8점)

(e) 중심 은하에서 위성 은하까지 거리의 히스토그램(주어진 한계 안에 드는 자료점의 전체 수에 대한 매개변수 의존성)을 구간 8개로 그려라. 히스토그램 범위는 0.2-2 MPC로 잡아라. 히스토그램은 확률 밀도 함수로도 바꾸어야 한다. 참고: 확률 밀도 함수는 주어진 점에서의 확률이다. 확률 함수의 경우 Y축의 다른 한계만 적으면 그래프 두 개를 따로 그리지 않아도 된다. (6점)

(f) 이론적으로 히스토그램은 다음 식으로 주어진다

$$H(r) = \frac{1}{A + B \cdot r} \tag{1}$$

주어진 의존성을 선형화하고 그래프에서 A와 B 값을 구하라 (6점)

## 2부 (20점)

적색 이동 방법(우주 팽창 때문의 큰 상대 속도)으로 천체까지 거리를 잴 때, 은하의 운동 때문에 오차가 생길 수 있다는 것은 잘 알려져 있다. 이 장의 목적은 이 오차를 보정하는 것이다.

중심 은하의 질량이 10^12 MSun이고, 모든 위성 은하가 원 궤도를 따라 움직이며, 그 사이의 상호 작용은 무시할 수 있다고 가정한다.

(a) 표 1에 채운 자료를 써서 방위각의 히스토그램을 그려라(히스토그램 구간 폭은 60도로 잡아라). 각 분포는 고르게 되어야 하지만 그렇지 않다. 고른 값에서의 제곱 편차를 계산하라. (6점)

(b) 처음에 60-120과 240-300 구간에 있던 은하들은 시선을 따라 움직이는 것들이므로 보정이 가장 많이 필요하다. 각좌표가 해당 구간의 중심(여기서는 90과 270)과 일치한다고 가정하고, 은하의 원운동 때문에 생기는 방위각의 변화를 중심에서의 거리의 함수로 나타내는 식을 써라. 힌트: 이 보정 때문에 중심에서의 거리는 크게 변하지 않는다고 가정해도 된다.

(6점)

(c) 앞 과제의 결과를 써서 마지막 히스토그램에 쓴 각을 보정하라. 보정한 자료로 새 히스토그램(거리에 대한 확률 의존성)을 그려라. 고른 값에서의 제곱 편차를 계산하라. (8점)

## 3부 (20점)

지금까지는 (같은 은하의) 중심 은하 - 위성 히스토그램만 계산했다. 이제 다른 관계를 계산할 차례이다. 같은 관측과 자료 분석을 다른 헤일로들과 그 중심 은하들에 대해서도 했다. 그림 2 히스토그램의 자료는 서로 다른 암흑 물질 헤일로의 중심 은하 사이 거리의 분포 확률 밀도 함수만 담고 있다. 헤일로가 500개, 따라서 중심 은하가 500개(NC = 500)라고 하자. 헤일로 하나의 평균 위성 수를 1000(NS = 1000)으로 잡아라.

(a) 다음 양들을 계산하라: (3점)

1. NCC, 중심 은하 쌍의 전체 수
2. NCS, 같은 헤일로 안 중심 은하 - 위성 쌍의 전체 수
3. NCS, 다른 헤일로 사이 중심 은하 - 위성 쌍의 전체 수
4. NSS, 같은 헤일로 안 위성 - 위성 은하 쌍의 전체 수
5. NSS, 다른 헤일로 사이 위성 - 위성 은하 쌍의 전체 수

아래 표는 서로 다른 암흑 물질 헤일로의 중심 은하 사이 여러 거리에 대한 확률 밀도 값이다.

| r (MPC) | $\rho$ |
|---|---|
| 0.3125 | 0.406 |
| 0.5375 | 0.808 |
| 0.7625 | 1.341 |
| 0.9875 | 1.134 |
| 1.2125 | 0.479 |
| 1.4375 | 0.143 |
| 1.6625 | 0.073 |
| 1.8875 | 0.060 |

주어진 중심-중심 자료와 1부에서 계산한 중심-위성 자료로 모든 확률 밀도를 계산할 수 있다. 관계는 다음과 같다:

$$\rho^*_{SS}(r) = c_1 \rho^*_{CS}(r)^2 r \tag{2}$$

$$\rho_{CS}(r) = c_2 \rho^*_{CS}(r)^2 r \sqrt{\rho_{CC}(r) + 1} \tag{3}$$

$$\rho_{SS}(r) = c_3 \rho^*_{CS}(r)^2 r(\rho_{CC}(r) - 5)^2 \tag{4}$$

여기서 c1, c2, c3는 규격화 상수이며 밀도마다 구해야 한다.

(b) ρSS(r), ρCS(r), ρSS(r)를 계산하고 그려라. (10점)

(c) 모든 은하 쌍의 최종 확률 밀도를 그려라. 그림 1의 그래프 6개 가운데 어느 것이 그린 것과 가장 비슷한가? (7점)

## 풀이 - 1부

### (a)

주어진 좌표를 XY, XZ, YZ 평면에 그리면 다음 그림을 보게 된다. 그림 2, 3, 4를 보라(그래프마다 0.5점). 그림 2를 보면
무리가 옆으로 보이고 그 법선이 XY 평면에 있음을 추론할 수 있다. X축은 시선을 따르므로 8.3î + 6.2ĵ + 1.1k̂를 규격화하여 규격화하여 계산할 수 있다. 따라서

$$\hat{x'} = 0.79667866\hat{i} + 0.59510936\hat{j} + 0.10558392\hat{k} \tag{5}$$

(0.5점) Z축은 XY 평면에 있고 X에 수직이므로 다음으로 계산할 수 있다
다음을 규격화하여

$$\hat{z'} = 0.59845448\hat{i} - 0.80115681\hat{j} \tag{6}$$

(2점)

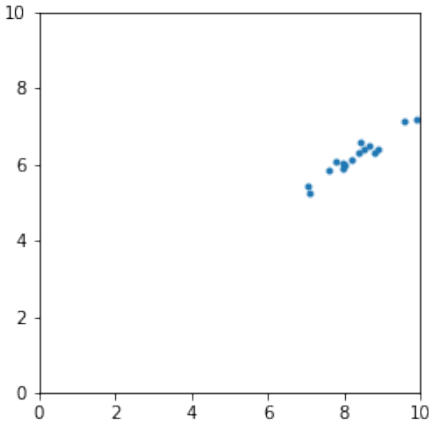



그림 2: 관측지에서 본 은하단의 XY 모습

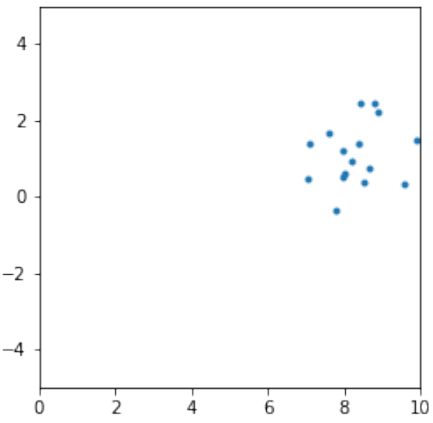



그림 3: 관측지에서 본 은하단의 XZ 모습

### (b)

x를 ((a)에서 구한) 시선으로 고를 수 있다 (1점):

$$\hat{x'} = 0.79667866\hat{i} + 0.59510936\hat{j} + 0.10558392\hat{k} \tag{7}$$

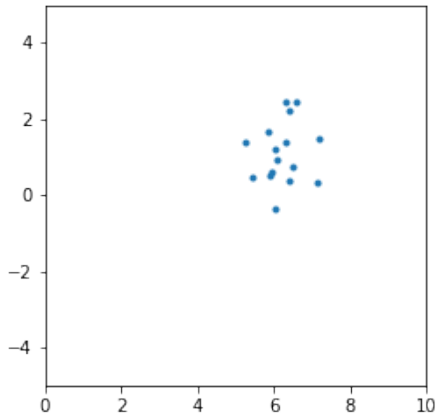



그림 4: 관측지에서 본 은하단의 YZ 모습

z는 ((a)에서 구한) 헤일로 원반의 법선으로 고를 수 있다 (1점):

$$\hat{z'} = 0.59845448\hat{i} - 0.80115681\hat{j} \tag{8}$$

끝으로 y는 (1점):

$$\hat{y'} = \hat{x'} \times \hat{z'} = 0.08458928\hat{i} + 0.06318717\hat{j} - 0.9944104\hat{k} \tag{9}$$

## (c)

X Y Z 계의 각 좌표는 다음 식으로 구할 수 있다

$$x' = \hat{x'} \cdot (\vec{r} - \vec{r_c}) \tag{10}$$

$$y' = \hat{y'} \cdot (\vec{r} - \vec{r_c}) \tag{11}$$

$$z' = \hat{z'} \cdot (\vec{r} - \vec{r_c}) \tag{12}$$

여기서 $\hat{x}'$, $\hat{y}'$, $\hat{z}'$은 국부 X′Y′Z′ 계의 단위 벡터, $\vec{r}$은 은하의 좌표, $\vec{r}_c$는 중심의 좌표이다.

이 값들을 다음 표에 계산했다 (바른 x, y, z 쌍마다 0.5점):

| | $x - x_c$ | $y - y_c$ | $z - z_c$ | $x'$ | $y'$ | $z'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.101124 | 0.109271 | 0.294476 | 0.176684 | -0.277372 | -0.027025 |
| 2 | 1.582909 | 0.989392 | 0.405895 | 1.892722 | -0.207212 | 0.154641 |
| 3 | 0.582735 | 0.213285 | 1.126426 | 0.710112 | -1.057359 | 0.177866 |
| 4 | 0.144328 | 0.369381 | 1.338567 | 0.476137 | -1.295537 | -0.209558 |
| 5 | -0.517770 | -0.151687 | -1.458202 | -0.656729 | 1.396668 | -0.188336 |
| 6 | 0.480059 | 0.105110 | 1.362674 | 0.588881 | -1.307808 | 0.203084 |
| 7 | -0.309855 | -0.319116 | -0.568033 | -0.496739 | 0.518483 | 0.070227 |
| 8 | 0.239541 | 0.188218 | -0.730736 | 0.225694 | 0.758807 | -0.007438 |
| 9 | -0.324800 | -0.169551 | 0.116378 | -0.347375 | -0.153915 | -0.058541 |
| 10 | -1.227659 | -0.768684 | -0.612379 | -1.500158 | 0.456538 | -0.118862 |
| 11 | -0.263209 | -0.234869 | -0.485227 | -0.400698 | 0.445410 | 0.030649 |
| 12 | 0.381200 | 0.282515 | -0.365581 | 0.433222 | 0.413634 | 0.001792 |
| 13 | -1.185021 | -0.941303 | 0.302593 | -1.472310 | -0.460620 | 0.044950 |
| 14 | 1.286640 | 0.930147 | -0.777889 | 1.496445 | 0.941150 | 0.024802 |
| 15 | -0.106760 | -0.095804 | -0.184997 | -0.161600 | 0.168879 | 0.012863 |
| 16 | -0.686865 | -0.352750 | 0.566244 | -0.697350 | -0.643470 | -0.128449 |

## (d)

구면 좌표는 다음 관계로 계산할 수 있다:

$$r = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'2} \tag{13}$$

$$\phi = \arctan \frac{y'}{x'} \tag{14}$$

그리고 x′과 y′의 부호

$$\theta = \arccos \frac{z}{r} \tag{15}$$

계산한 값은 다음 표와 같다 (바른 r, ϕ, θ 쌍마다 0.5점):

| | $x'$ | $y'$ | $z'$ | $r$ | $\phi$ | $\theta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.176684 | -0.277372 | -0.027025 | 0.329974 | 5.279566 | 1.652789 |
| 2 | 1.892722 | -0.207212 | 0.154641 | 1.910301 | 6.174141 | 1.489757 |
| 3 | 0.710112 | -1.057359 | 0.177866 | 1.286042 | 5.303793 | 1.432047 |
| 4 | 0.476137 | -1.295537 | -0.209558 | 1.396079 | 5.064586 | 1.721471 |
| 5 | -0.656729 | 1.396668 | -0.188336 | 1.554814 | 2.010330 | 1.692226 |
| 6 | 0.588881 | -1.307808 | 0.203084 | 1.448581 | 5.135477 | 1.430138 |
| 7 | -0.496739 | 0.518483 | 0.070227 | 0.721461 | 2.334780 | 1.473302 |
| 8 | 0.225694 | 0.758807 | -0.007438 | 0.791695 | 1.281697 | 1.580191 |
| 9 | -0.347375 | -0.153915 | -0.058541 | 0.384430 | 3.558678 | 1.723672 |
| 10 | -1.500158 | 0.456538 | -0.118862 | 1.572587 | 2.846171 | 1.646452 |
| 11 | -0.400698 | 0.445410 | 0.030649 | 0.599906 | 2.303400 | 1.519685 |
| 12 | 0.433222 | 0.413634 | 0.001792 | 0.598981 | 0.762273 | 1.567805 |
| 13 | -1.472310 | -0.460620 | 0.044950 | 1.543336 | 3.444801 | 1.541667 |
| 14 | 1.496445 | 0.941150 | 0.024802 | 1.767973 | 0.561416 | 1.556768 |
| 15 | -0.161600 | 0.168879 | 0.012863 | 0.234094 | 2.334171 | 1.515821 |
| 16 | -0.697350 | -0.643470 | -0.128449 | 0.957522 | 3.886829 | 1.705349 |

## (e)

위에서 계산한 반지름과 자료마다의 은하 수(아래에 다시 적음)로 각 구간의 은하 수를 계산할 수 있다. 구간 1의 범위는 (0.2, 0.425), 구간 2는 (0.425, 0.65), 이런 식으로 구간 8은 (1.775, 2.0)이다.

| | r | n |
|---|---|---|
| 1 | 0.329974 | 291 |
| 2 | 1.910301 | 170 |
| 3 | 1.286042 | 253 |
| 4 | 1.396079 | 8 |
| 5 | 1.554814 | 72 |
| 6 | 1.448581 | 120 |
| 7 | 0.721461 | 302 |
| 8 | 0.791695 | 52 |
| 9 | 0.384430 | 28 |
| 10 | 1.572587 | 40 |
| 11 | 0.599906 | 72 |
| 12 | 0.598981 | 379 |
| 13 | 1.543336 | 82 |
| 14 | 1.767973 | 62 |
| 15 | 0.234094 | 305 |
| 16 | 0.957522 | 293 |

각 구간의 바른 값은: (바른 n마다 0.5점)

| 구간 | 중심 | 은하 수 |
|---|---|---|
| 1 | 0.312500 | 624 |
| 2 | 0.537500 | 451 |
| 3 | 0.762500 | 354 |
| 4 | 0.987500 | 293 |
| 5 | 1.212500 | 253 |
| 6 | 1.437500 | 210 |
| 7 | 1.662500 | 174 |
| 8 | 1.887500 | 170 |

해당 히스토그램은 그림 5와 같다. (1점)

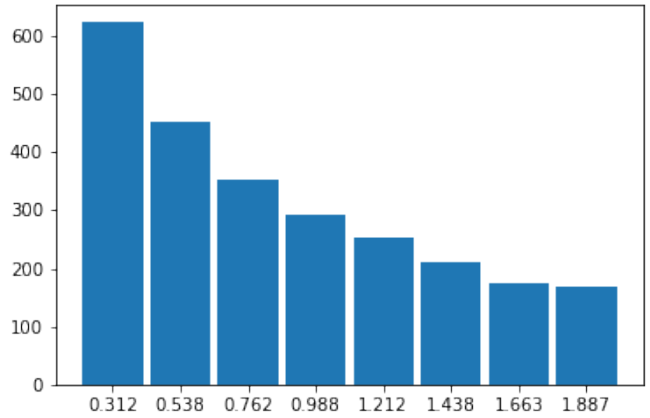



그림 5: 히스토그램: 거리(MPC)에 대한 은하 수의 의존성, 구간 크기 0.225 MPC

표로 나타낸 히스토그램 자료:
확률 밀도 함수를 얻으려면 히스토그램의 각 값을 전체 영역에서의 적분으로 나누어야 한다. 적분은 직사각형들의 전체 넓이를 구해 어림할 수 있다:

$$I = \sum_{n=1}^{8} H(r_i)d = 569.025 \tag{16}$$

여기서 d = 0.225는 구간의 크기이다. 각 자료를 I로 나누면 다음을 얻는다 (바른 확률 밀도마다 0.25점):

| 구간 | 중심 | 은하 수 | 확률 밀도 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.312500 | 624 | 1.096613 |
| 2 | 0.537500 | 451 | 0.792584 |
| 3 | 0.762500 | 354 | 0.622117 |
| 4 | 0.987500 | 293 | 0.514916 |
| 5 | 1.212500 | 253 | 0.444620 |
| 6 | 1.437500 | 210 | 0.369052 |
| 7 | 1.662500 | 174 | 0.305786 |
| 8 | 1.887500 | 170 | 0.298757 |

이 자료를 그리면 그림 6의 그래프가 된다 (1점)

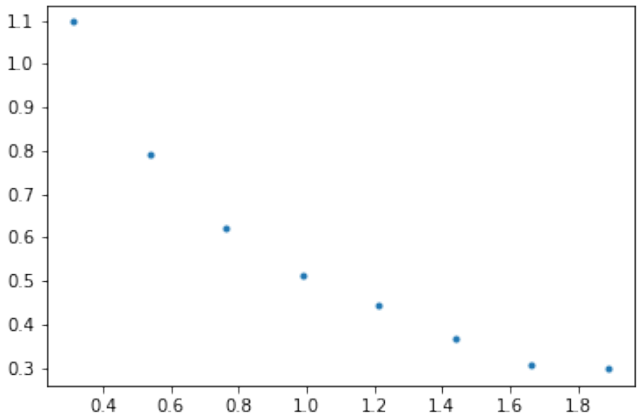



그림 6: 같은 헤일로 안 중심-위성 거리의 확률 밀도

## (f)

히스토그램 식은 다음 꼴이므로:

$$H\left(r\right) = \frac{1}{A + B \cdot r} \tag{17}$$

1/H(r)를 계산해야 하며, 그 값은 다음과 같다 (바른 1/H마다 0.125) :

| | r | H(r) | 1/H(r) |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.312500 | 624 | 0.001603 |
| 2 | 0.537500 | 451 | 0.002217 |
| 3 | 0.762500 | 354 | 0.002825 |
| 4 | 0.987500 | 293 | 0.003413 |
| 5 | 1.212500 | 253 | 0.003953 |
| 6 | 1.437500 | 210 | 0.004762 |
| 7 | 1.662500 | 174 | 0.005747 |
| 8 | 1.887500 | 170 | 0.005882 |

이 자료를 그리면 그림 7이 된다

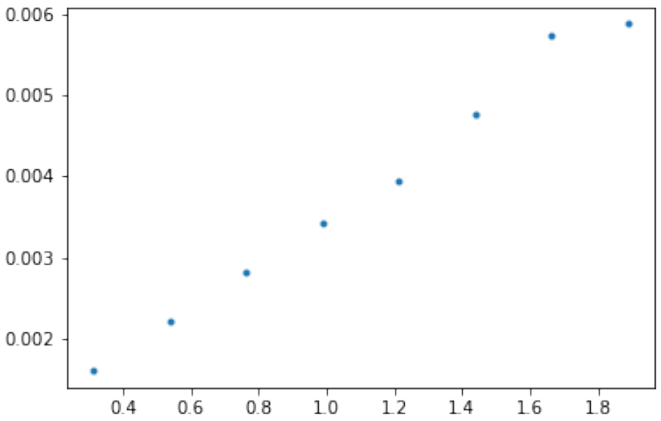



그림 7: 회귀를 위한 선형화

이 직선의 기울기와 절편을 (그래프나 다른 방법으로) 구하면

다음 값을 얻는다:

$$A = 0.00065977; B = 0.00285494 \tag{18}$$

B가 0.002-0.003 범위이면 2.5점  A가 0.0006-0.0008 범위이면 2.5점

## 풀이 - 2부

### (a)

1.c의 ϕ 값을 60도 구간들로 나눌 수 있다. 구간 1에는 (0, 60)도 범위에 드는 은하 수, 구간 2에는 (60, 120), 이런 식으로 구간 6에는 -
(300, 360).

1.c 자료(도 단위):

| | 각 | 은하 수 |
|---|---|---|
| 1 | 302.496846 | 291 |
| 2 | 353.752245 | 170 |
| 3 | 303.884926 | 253 |
| 4 | 290.179429 | 8 |
| 5 | 115.183442 | 72 |
| 6 | 294.241133 | 120 |
| 7 | 133.773013 | 302 |
| 8 | 73.435830 | 52 |
| 9 | 203.897219 | 28 |
| 10 | 163.073590 | 40 |
| 11 | 131.975076 | 72 |
| 12 | 43.675004 | 379 |
| 13 | 197.372555 | 82 |
| 14 | 32.166754 | 62 |
| 15 | 133.738158 | 305 |
| 16 | 222.698869 | 293 |

히스토그램에 대해 다음 자료를 얻는다 (바른 n마다 0.5점):

| | 구간 중심 | 은하 수 |
|---|---|---|
| 1 | 30 | 441 |
| 2 | 90 | 124 |
| 3 | 150 | 719 |
| 4 | 210 | 403 |
| 5 | 270 | 128 |
| 6 | 330 | 714 |

고른 값은 전체 은하 수를 6으로 나눈 421.5이다. 제곱 편차
is 241° (1p)

그래프는 그림 8과 같다 (2점)

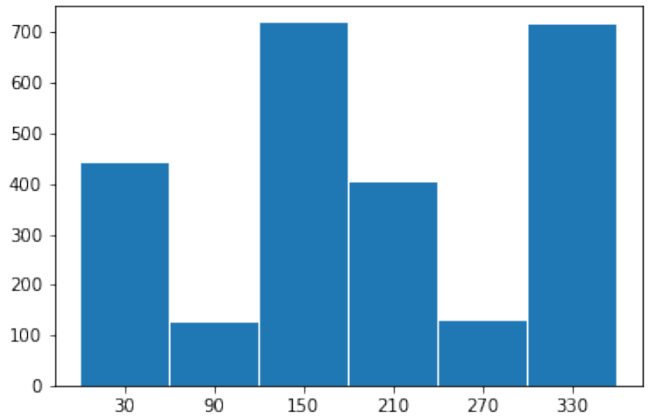



그림 8: 히스토그램: ϕ 각에 대한 은하 수의 의존성, 구간 크기
60°

## (b)

중심 질량 M 둘레를 궤도 반지름 r로 도는 은하의 속도는 (2점):

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \tag{19}$$

이 때문에 시선 방향 거리에 다음 오차가 생긴다 (2점):

$$d = \frac{v}{H} = \frac{1}{H}\sqrt{\frac{GM}{r}} \tag{20}$$

90도와 270도에 있는 은하의 각 차이는 (2점):

$$\alpha = \arctan\frac{d}{r} = \arctan\frac{1}{H}\sqrt{\frac{GM}{r^3}} \tag{21}$$

자세한 그림은 그림 9를 보라

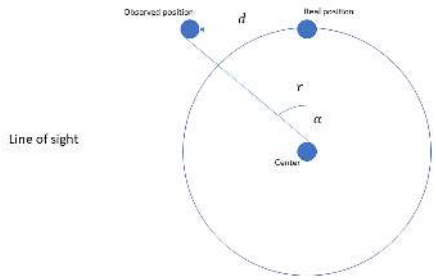



그림 9: 그림

## (c)

처음에 (60, 120)과 (240, 300) 범위의 구간에 있던 은하들은 각각 (120, 180)과 (300, 360)으로 옮겨 갈 수 있다. 따라서 구간 2와 5의 은하에서 앞 과제에서 구한 보정값을 빼서 각각 구간 1과 4로 옮겨 가는지 보아야 한다. (바르게 보정한 각마다 0.25점)

| | 원래 각 | 보정한 각 | 은하 수 |
|---|---|---|---|
| 1 | 302.494665 | 276.136451 | 291 |
| 2 | 353.752069 | 351.714594 | 170 |
| 3 | 303.884728 | 300.199512 | 253 |
| 4 | 290.178642 | 290.178642 | 8 |
| 5 | 115.184577 | 115.184577 | 72 |
| 6 | 294.241835 | 294.241835 | 120 |
| 7 | 133.776280 | 125.061576 | 302 |
| 8 | 73.437747 | 73.437747 | 52 |
| 9 | 203.899065 | 203.899065 | 28 |
| 10 | 163.073490 | 160.346665 | 40 |
| 11 | 131.977481 | 120.548626 | 72 |
| 12 | 43.676971 | 43.676971 | 379 |
| 13 | 197.372956 | 197.372956 | 82 |
| 14 | 32.167948 | 32.167948 | 62 |
| 15 | 133.743596 | 94.077612 | 305 |
| 16 | 222.694636 | 222.694636 | 293 |

새로 보정한 분포는 다음과 같다 (바른 n마다 0.3점):

| | 구간 중심 | 은하 수 |
|---|---|---|
| 1 | 30 | 441 |
| 2 | 90 | 429 |
| 3 | 150 | 414 |
| 4 | 210 | 403 |
| 5 | 270 | 419 |
| 6 | 330 | 423 |

이 경우 제곱 편차는 $12^\circ$

(1점) 관련 그래프는 그림 10과 같다 (1.2점)

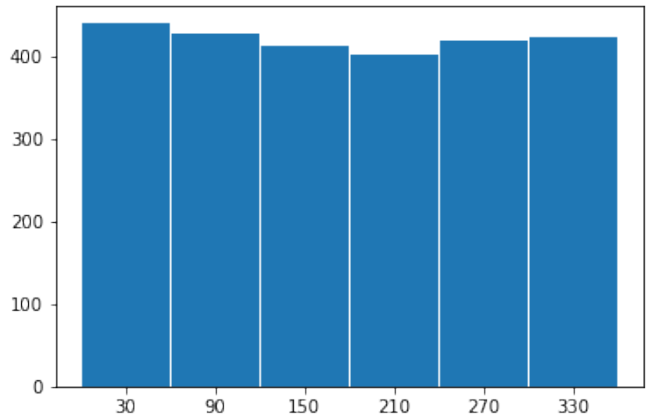



그림 10: 히스토그램: $\phi$ 각에 대한 보정한 은하 수의 의존성, 구간 크기 60

## 풀이 - 3부

### (a)

간단한 조합론으로 다음을 얻는다 (바른 N마다 0.6점):

$$N_{CC} = N_C(N_C - 1) = 249500 \tag{22}$$

$$N^*_{CS} = N_C N_S = 500000 \tag{23}$$

$$N_{CS} = N_C(N_C - 1)N_S = 249500000 \tag{24}$$

$$N^*_{SS} = N_C N_S(N_S - 1) = 499500000 \tag{25}$$

$$N_{SS} = N_C N_S(N_C - 1)N_S = 249500000000 \tag{26}$$

### (b)

중심-중심과 중심-위성 밀도로 모든 확률 밀도를 계산할 수 있다. 규격화하지 않은 값(c1 = c2 = c3 = 1)을 다음 표에 계산했다 (바른 쌍마다 0.5점):

| | $r$ | $\rho^*_{CS}$ | $\rho_{CC}$ | $\rho^*_{SS}$ | $\rho_{SS}$ | $\rho_{CS}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.312500 | 1.096613 | 0.406141 | 0.375800 | 17.365137 | 0.975747 |
| 2 | 0.537500 | 0.792584 | 0.807863 | 0.337652 | 12.992898 | 0.994072 |
| 3 | 0.762500 | 0.622117 | 1.340510 | 0.295110 | 8.653487 | 0.988565 |
| 4 | 0.987500 | 0.514916 | 1.134011 | 0.261824 | 8.568351 | 0.837480 |
| 5 | 1.212500 | 0.444620 | 0.478630 | 0.239696 | 10.729180 | 0.638199 |
| 6 | 1.437500 | 0.369052 | 0.143154 | 0.195787 | 10.112507 | 0.458355 |
| 7 | 1.662500 | 0.305786 | 0.073165 | 0.155452 | 8.262279 | 0.352612 |
| 8 | 1.887500 | 0.298757 | 0.060971 | 0.168470 | 8.998531 | 0.379962 |

규격화하면 (1부 d와 같은 방법으로) c1 = 2.18592; c2 = 0.79304; c3 = 0.0516을 얻는다. 관련 밀도에 이 값들을 곱하면 다음을 얻는다 (바르게 규격화한 것마다 0.5점 tuple):

| | $r$ | $\rho^*_{SS}$ | $\rho_{SS}$ | $\rho_{CS}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.312500 | 0.822854 | 0.900750 | 0.770962 |
| 2 | 0.537500 | 0.739325 | 0.673957 | 0.785441 |
| 3 | 0.762500 | 0.646175 | 0.448866 | 0.781089 |
| 4 | 0.987500 | 0.573292 | 0.444450 | 0.661713 |
| 5 | 1.212500 | 0.524839 | 0.556535 | 0.504257 |
| 6 | 1.437500 | 0.428697 | 0.524548 | 0.362158 |
| 7 | 1.662500 | 0.340380 | 0.428574 | 0.278607 |
| 8 | 1.887500 | 0.368883 | 0.466764 | 0.300217 |

그래프는 그림 11 - 14와 같다 (그래프마다 0.5점).

### (c)

전체 확률 밀도는 모든 밀도의 가중합이다 (4점):

$$\rho \sim \frac{N_{CC}\rho_{CC} + N^*_{CS}\rho^*_{CS} + N_{CS}\rho_{CS} + N^*_{SS}\rho^*_{SS} + N_{SS}\rho_{SS}}{N_{CC} + N^*_{CS} + N_{CS} + N^*_{SS} + N_{SS}} \tag{27}$$

계산한 값과 규격화한 밀도는 다음 표와 같다:

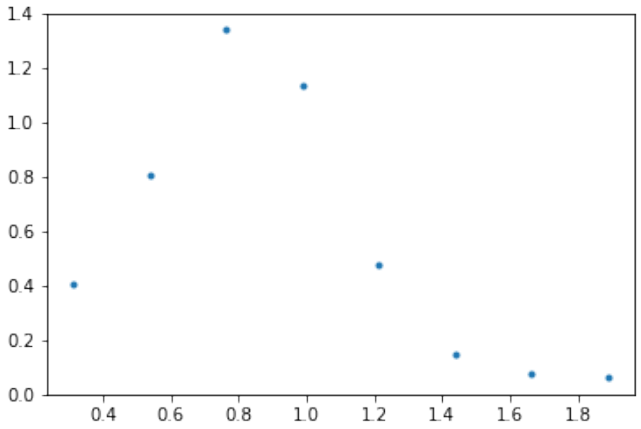



그림 11: 서로 다른 헤일로 사이 중심-중심 거리의 확률 밀도

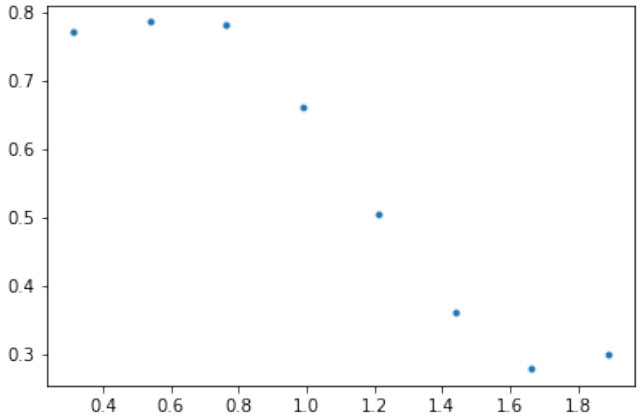



그림 12: 서로 다른 헤일로 사이 중심-위성 거리의 확률 밀도

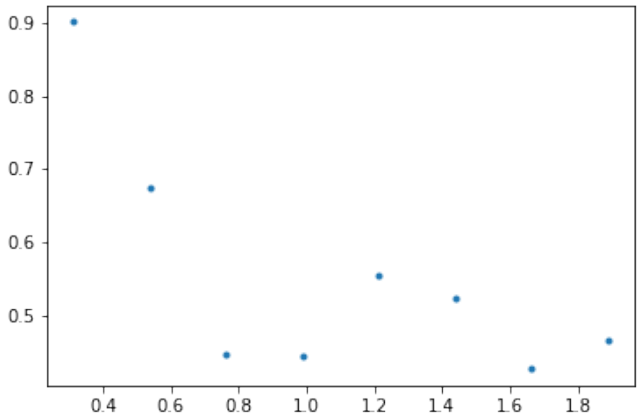



그림 13: 서로 다른 헤일로 사이 위성-위성 거리의 확률 밀도

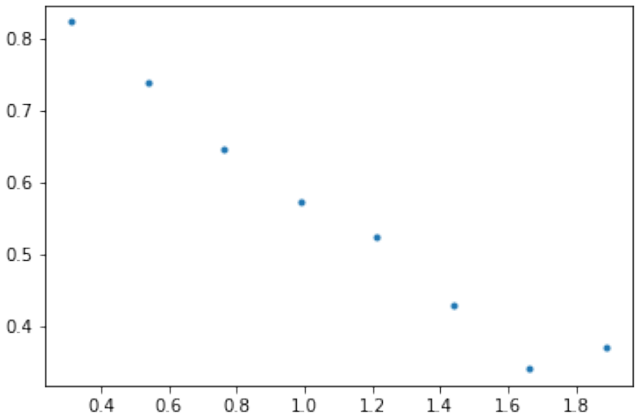



그림 14: 같은 헤일로 안 위성-위성 거리의 확률 밀도

| | r | 계산한 ρ | 규격화한 ρ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.312500 | 0.004212 | 0.843662 |
| 2 | 0.537500 | 0.003606 | 0.722433 |
| 3 | 0.762500 | 0.002967 | 0.594357 |
| 4 | 0.987500 | 0.002693 | 0.539524 |
| 5 | 1.212500 | 0.002663 | 0.533361 |
| 6 | 1.437500 | 0.002265 | 0.453652 |
| 7 | 1.662500 | 0.001813 | 0.363239 |
| 8 | 1.887500 | 0.001968 | 0.394216 |

최종 그림은 다음과 같다 (그림 15) (2점)

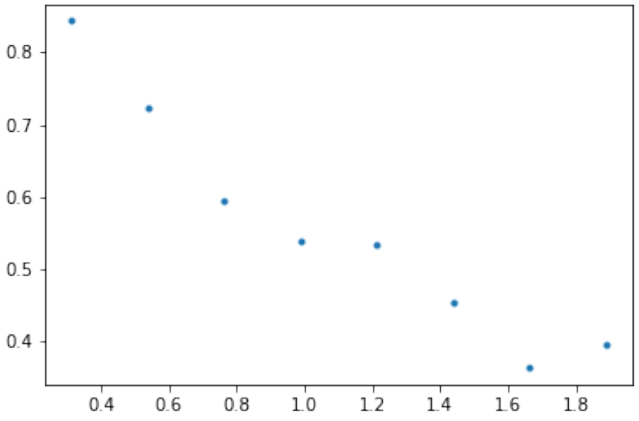



그림 15: 최종 확률 밀도

이 밀도와 가장 비슷한 것은 그림 1의 그래프 E이다 (1점).