2022-08-18
IOAA
Georgia

기본 지시사항

표지

- **시험 시작 전까지 봉투를 만지지 말 것.**
- 자료분석 시험은 3 시간이고, 총 150 점 만점.
- 답안지(**Answer Sheets**)는 자세한 풀이/대략적인 풀이를 위한 것이다. 각 답안지에 다음을 적어야 한다.
    - Student Code (Country Code 및 학생번호. **예: KOR-3**)
    - 문제 번호(Question Number)
    - 페이지 번호와 **이 문제**를 푸는 데 사용한 총 페이지 수.
- ***각 문제별로 새로운 답안지(Answer Sheet)에 작성을 시작할 것. 또한 양 면 중 인쇄된 면만을 사용할 것. 뒷면은 사용하지 말 것.*** 만약 적은 것이 있는데 채점되지 않기를 원한다면 선을 그어 지울 것.
- 채점관이 본인의 풀이를 이해하는 데 도움이 될 것 같은 수학적 표현을 가능한 많이 사용할 것. 채점관이 본인과 다른 언어 사용자일 수 있다는 것을 명심할 것. 만약 글로 설명해야 할 일이 있다면, 가능한 짧은 문구만 사용할 것 (가능한 영어로).
- 허가 없이 본인의 책상을 벗어날 수 없음. 도움이 필요한 경우 (계산기 고장, 화장실, 답안지 추가 필요 등), Help 카드를 이용해 감독관(proctor)에게 알릴 것.
- 시험의 시작과 종료는 감독관(proctor)이 알려줄 것. 추가로, 감독관(proctor)은 매 1 시간마다, 그리고 시험 종료 15 분 전에 남은 시간을 알려줄 것임.
- 시험이 끝다면 그 즉시 답안 작성을 멈추어야 함. 답안지들(Answer Sheets)을 문제 번호 순서대로 정렬하고, 전부 봉투 안에 다시 담을 것.
- 본인의 봉투가 수거될 때가지 본인 책상에서 대기할 것. 모든 봉투가 수거되면, 가이드가 시험장 밖으로 안내할 것임.
- 다음 페이지에는 상수들, 그리고 문제를 푸는 데 필요한 관계식들이 주어져 있음.

근본적 상수 Fundamental constants			
진공에서 빛의 속력 (speed of light in vacuum)	c	=	2.998×10^{8} m s^{-1}
플랑크 상수 (Planck constant)	h	=	6.626×10^{-34} J s
볼츠만 상수 (Boltzmann constant)	k_B	=	1.381×10^{-23} J K^{-1}
스테판–볼츠만 상수 (Stefan-Boltzmann constant)	σ	=	5.670×10^{-8} W m^{-2} K^{-4}
기본 전하 (Elementary charge)	e	=	1.602×10^{-19} C
만유인력 상수 (Universal gravitational constant)	G	=	6.674×10^{-11} N m^2 kg^{-2}
진공유전율 (Universal electric constant)	ε_0	=	$8.854\times10^{-12}\ m^{-3}kg^{-1}s^4A^2$
기체상수 (Universal gas constant)	R	=	8.315 J mol^{-1} K^{-1}
아보가드로 수 (Avogadro constant)	N_A	=	6.022×10^{23} mol^{-1}
빈의 변위 법칙 (Wien's displacement law)	$\lambda_m T$	=	2.898×10^{-3} m K
전자의 질량 (Mass of electron)	m_e	=	9.109×10^{-31} kg
양성자의 질량 (Mass of proton)	m_p	=	1.673×10^{-27} kg
중성자의 질량 (Mass of neutron)	m_n	=	1.675×10^{-27} kg
원자질량단위 (Atomic mass unit (a.m.u.))		=	1.661×10^{-27} kg

Astronomical data			
1 파섹 (parsec)	1 pc	=	3.086×10^{16} m
		=	206 265 au
		=	3.262 ly
1 천문단위 (astronomical unit) (au)	1 au	=	1.496×10^{11} m
1 잔스키(jansky)	1 Jy	=	10^{-26} W m^{-2} Hz^{-1}
허블 상수 (Hubble constant)	H_0	=	70 km s^{-1} Mpc^{-1}
태양 광도 (Solar luminosity)	$L_\odot$	=	3.826×10^{26} W
태양 겉보기 각크기 (Apparent angular diameter of Sun)	$\theta_\odot$	=	32’
태양 유효 온도 (Effective temperature of Sun)	$T_{eff,\odot}$	=	5778 K
적도–황도 기울기 (지구) (Obliquity of the ecliptic (Earth))	ε	=	23.5°
황도에 대한 달 궤도의 기울기 (Inclination of the lunar orbit w.r.t. ecliptic)		=	05°08’43”

보름달 겉보기 안시등급 (Apparent visual magnitude of full moon)		=	–12.74
황도의 북극 (North Ecliptic Pole) (J2000.0)	(α_E, δ_E)		($18^h00^m00^s$, +66°33’39”)
은하의 북극 (North Galactic Pole) (J2000.0)	(α_G, δ_G)		($12^h51^m26^s$, +27°07’42”)
1 항성일 (sidereal day)		=	$23^h56^m04^s$
1 회귀년 (tropical year)		=	365.2422 solar days
1 항성년 (sidereal year)		=	365.2564 solar days

태양 등급 (Solar magnitudes)

겉보기 안시 (Apparent visual)	=	–26.75
절대 안시 (Absolute visual)	=	+4.82
겉보기 복사 (Apparent bolometric)	=	–26.83
절대 복사 (Absolute bolometric)	=	+4.74

태양계 (Solar System)

천체	평균반경 (km)	질량 (kg)	궤도 장반경 (au)	이심률
태양 Sun	695 500	1.988×10^{30}	---	---
수성 Mercury	2 440	3.301×10^{23}	0.387	0.206
금성 Venus	6 052	4.867×10^{24}	0.723	0.007
지구 Earth	6 378	5.972×10^{24}	1.000 000	0.016 710
달 Moon	1 737	7.346×10^{22}	0.002 572	0.054 900
화성 Mars	3 390	6.417×10^{23}	1.524	0.093
목성 Jupiter	69 911	1.898×10^{27}	5.203	0.048
토성 Saturn	58 232	5.683×10^{26}	9.537	0.054
천왕성 Uranus	25 362	8.681×10^{25}	19.189	0.047
해왕성 Neptune	24 622	1.024×10^{26}	30.070	0.009

18 August 2022

IOAA

Georgia

자료분석

Data Analysis

표지

(1.2.2) 적절한 그래프를 그리고, chirp 질량을 구하라. 기울기 계산의 오차를 추산하고, 이로부터 발생하는 chirp 질량의 오차값을 구하라. **(22pt)**

지상의 중력파 검출기에서 측정한 것은 사실 검출기좌표계(detector-frame)의 질량이다. 이는 천체좌표계(source frame)의 질량과 아래와 같은 관계를 갖는다:

$$m_{\text{detector}} = (1+z)m$$

여기서 z는 쌍성계의 적색편이량이다.

(1.2.3) 쌍성계의 모은하(host galaxy)인 NGC 4993의 적색편이가 $z = 0.009783$라고 하자. 이때 천체좌표계에서의 chirp 질량을 구하라. **(2pt)**

(1.2.4) 질량비 $q = m_1/m_2$는 측정하기 훨씬 더 어렵다. 고급 파형 분석에 의하면 이 계의 q는 0.73에서 1.0의 범위에 놓인다는 것이 알려져 있다. 두 질량값 m_1 (primary)과 m_2 (secondary)의 범위를 계산하라. **(6pt)**

2 은하 탐사 (Galactic Surveys; 105 points)

우주론에서 은하들의 공간적 분포를 관측하는 것은 우주의 진화와 팽창을 이해하는 데 중요한 역할을 한다. 수많은 망원경들이 은하들의 목록(catalogue)을 만들기 위한 탐사를 수행했고, 이 결과물은 통계적 분석의 대상이 된다. 은하들은 주로 그룹을 이루고, 이 무리들이 모여서 은하단(cluster)를 만든다. 은하단은 거대한 구형의 암흑물질 헤일로(dark matter halo)에 둘러싸여있다. 대부분의 물질은 중심부에 집중되어 있는데, 이 때문에 헤일로 중심부에 큰 질량을 갖는 은하가 놓을 가능성이 높다.
이 문제에서 모든 헤일로는 하나의 중심 은하와 여러 위성은하 그룹(groups of satellite galaxies)으로 이루어져 있다고 가정할 것이다. 그리고 통계적 분석을 통해 은하들의 공간 분포에 대한 추론(inference)을 도출해낼 것이다.
Figure 1 는 은하 간 거리의 확률밀도(probability density) 유형을 보여주고 있다 (A-F까지 총 6가지). X 축은 은하 사이의 거리 (a), Y축은 확률밀도($f_p(a)$)를 나타낸다. 한 쌍의 은하가 a에서 $a+\Delta a$ 사이의 거리에 놓일 확률은

$$P(a) = f_p(a) \cdot \Delta a$$

와 같이 주어진다. 여기서 $f_p(a)$는 1보다 큰 값을 가질 수 있음을 주의하라.

Part 1 (60pt)

Table 1은 한 개의 암흑물질 헤일로(halo) 내에 존재하는 16개의 은하 그룹들에 대한 직교좌표(Cartesian coordinates) 정보를 보여준다. 또한 첫 번째 행에는 중심 은하의 좌표 정보가 주어져 있다. i 번째 그룹은 N_i개의 은하를 포함한다. 이 좌표계의 원점은 지구이다. 문제를 간략히 하기 위해, 은하의 "그룹"이란, 거의 동일한 좌표계를 갖는 은하들의 집단을 표현하는 말이라고 하자.

(a) $X-Z$ 평면과 $Y-Z$ 평면에서 위성은하 그룹들의 분포는 그림과 같이 주어져 있다. $X-Y$평면상에서의 분포를 모눈종이에 그리라. **(6pt)**

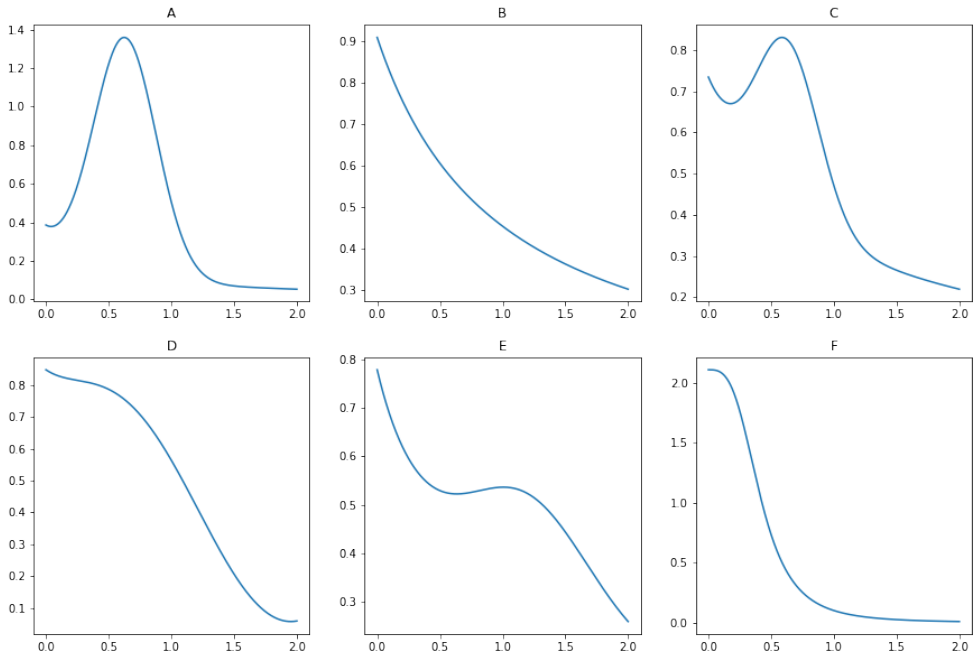
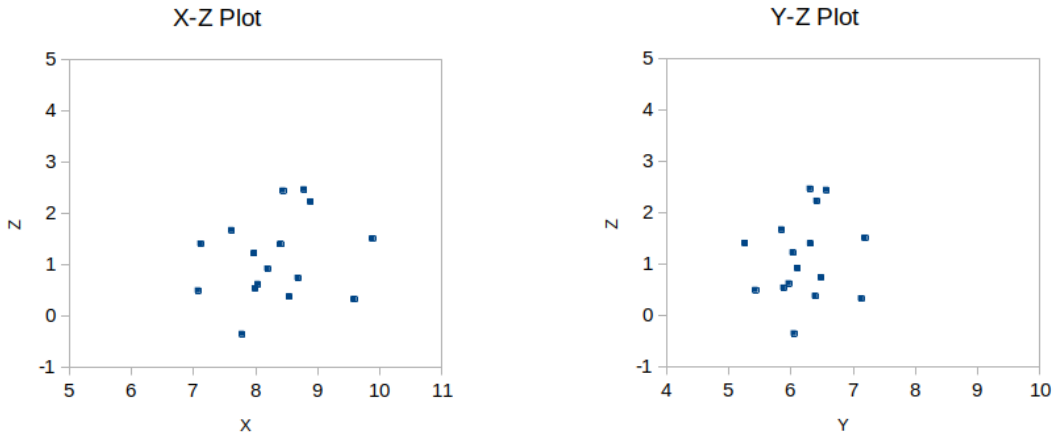


Figure 1: 모든 가능한 은하 쌍 간의 거리 확률밀도

i	x (Mpc)	y (Mpc)	z (Mpc)	N_i
C	8.300	6.200	1.100	중심은하 (Central Galaxy)
1	8.401	6.309	1.394	291
2	9.883	7.189	1.506	170
3	8.883	6.413	2.226	253
4	8.444	6.569	2.439	8
5	7.782	6.048	-0.358	72
6	8.780	6.305	2.463	120
7	7.990	5.881	0.532	302
8	8.540	6.388	0.369	52
9	7.975	6.030	1.216	28
10	7.072	5.431	0.488	40
11	8.037	5.965	0.615	72
12	8.681	6.483	0.734	379
13	7.115	5.259	1.403	82
14	9.587	7.130	0.322	62
15	8.193	6.104	0.915	305
16	7.613	5.847	1.666	293

Table 1: 은하 그룹들의 좌표



(b) 이 은하단이 원반(disk) 모양으로 생겼고, 우리의 시선방향이 이 원반 평면 상에 있다고 할 때, 이 원반에 수직한(법선) 방향의 단위 벡터를 구하라. **(4pt)**

(c) 중심 은하를 원점으로 하는 새로운 좌표계를 정의하자. 지구에서 중심은하 방향의 시선방향을 X' 축으로 하고, 원반에 수직한(법선) 방향을 Z' 축으로 한다. 이 좌표계의 단위 벡터들을 구하라. **(2pt)**

(d) 앞서 주어진 직교좌표계 값을 새로운 $X'Y'Z'$좌표계로 변환하라. 즉 X', Y', Z' 를 계산하라. **(24pt)**

(e) 새로운 $X'Y'Z'$좌표계를, 구면좌표계로 변환하는 방정식들을 쓰라. 이 구면좌표계는 중심 은하를 원점으로 한다. θ 좌표는 미리 계산되어 아래 표에 주어져 있다. R과 ϕ를 계산하라. **(11pt)**

i	θ
1	1.652
2	1.490
3	1.432
4	1.721
5	1.692
6	1.430
7	1.474
8	1.580
9	1.723
10	1.646
11	1.519
12	1.569
13	1.542
14	1.557
15	1.516
16	1.705

Note: 구면좌표계에서 좌표는 R, θ, ϕ로 표현되는데, R은 방사상의 거리(radial distance), ϕ는 X' 축에서 반시계방향으로 잰 방위각 (azimuthal angle; 0에서 2π 사이의 값), θ는 편각(polar angle; Z'축에서 잰 각으로, 0에서 π 사이의 값)이다.

(f) 중심 은하로부터의 방사상 거리(radial distance)에 따라 위성 은하들의 갯수가 어떻게 변하는지 히스토그램을 (모눈종이에) 그려라. 이때, 0.2 Mpc to 2 Mpc를 시작과 끝 값(total range)으로 하고, 총 8개의 동일한 간격을 갖는 계급(bin)을 사용하라. **(9pt)**

(g) 이 히스토그램은 확률밀도로 변환되어야 한다. 히스토그램 값이 확률밀도에 적합하도록 세로축의 스케일을 조정(re-scale)하라. 앞서 그린 히스토그램의 오른쪽 수직축에 이렇게 계산한 확률밀도 값을 표시하라. 이 확률밀도 값들은 Part 3에서 사용될 것이다. **(4pt)**

Part 2 (17pt)

앞서 주어진 표에 있는 거리는 적색편이(redshift)를 이용해 구한 값이다. 적색편이를 이용해서 은하까지의 거리를 구할 때에는 은하들의 궤도운동에 의해 오차가 발생할 수 있다는 점이 잘 알려져 있다. 이제 이 오차를 보정해보자.
중심 은하의 유효질량은 $10^{10} M_{\odot}$이고, 모든 위성은하는 이 중심은하 주변을 원궤도로 운동하며, 위성은하 사이의 상호작용은 무시할 수 있다고 가정하라.

(a) 문제지의 Table 1에 주어진 자료들로부터 방위각 ϕ에 따른 은하들의 개수분포를 히스토그램으로 그려라. 각 계급(bin)의 폭은 60°로 고정한다. 각도에 따른 갯수분포는 일정(uniform)할 것으로 기대되지만, 여기서는 그렇지 않다. 이 갯수분포의 표준편차(standard deviation)를 구하라. **(5pt)**

(b) 이 히스토그램 계급(bin) 중 Y'축 방향에 해당하는 두 곳에서 은하의 갯수는 대단히 작다. 이 방향에 존재하는 위성은하의 궤도운동 방향은 우리 시선방향에 거의 평행하고, 따라서 적색편이(redshift)로 계산한 거리에 가장 큰 오차가 발생하기 때문이다. 방위각(azimuthal angle) 보정량 식을 유도하라. **(4pt)**

Note: 중심 은하로부터의 거리(R)는 이 보정을 해도 크게 변하지 않는다고 가정해도 된다.

(c) 각 행에 대하여 보정된 방위각 값을 계산하라. 그리고 히스토그램을 다시 계산하여 그리고, 이때의 표준편차값을 다시 계산하라. **(8pt)**

Part 3 (28pt)

지금까지는 딱 한 개의 헤일로(halo)에 대하여 중심은하–위성은하 (Central galaxy – Satellite galaxy) 히스토그램을 계산했다. 이제 다른 관계식을 알아보려 한다.
동일한 관측과 자료 분석이 다른 헤일로와 중심은하들에 대해서 진행되었다. 총 500개의 헤일로, 즉 500개의 중심은하($N_C = 500$)가 관측되었다고 하자. 각 헤일로에는 평균적으로 1000개의 위성은하 ($N_S = 1000$)가 있다고 하자.

a) 아래 양들을 계산하라: **(5pt)**

(1) N_{CC}, 중심은하 쌍의 총 갯수 (total number of pairs of central galaxies)

(2) N^*_{CS}, 같은 헤일로에 속하는 중심은하-위성은하 쌍의 총 갯수 (total number of central galaxy - satellite pairs such that the galaxies in the pair belong to the same halo).

(3) N_{CS}, 서로 다른 두 개의 헤일로에 속하는 중심은하-위성은하 쌍의 총 갯수 (total number of central galaxy - satellite pairs such that the galaxies in the pair belong to two separate halos).

(4) N^*_{SS}, 같은 헤일로에 속하는 위성은하-위성은하 쌍의 총 갯수 (total number of satellite - satellite galaxy pairs such that the galaxies in the pair belong to the same halo).

(5) N_{SS}, 서로 다른 두 개의 헤일로에 속하는 위성은하-위성은하 쌍의 총 갯수 (total number of satellite - satellite galaxy pairs such that the galaxies in the pair belong to two separate halos).

아래의 표에는 서로 다른 두 개의 암흑물질 헤일로(dark matter halo)에 속하는 중심은하 쌍(CC)의 거리에 따른 확률밀도가 주어져 있다. 여기 주어진 자료는 실제 관측자료가 아님에 주의하라. 암흑물질 헤일로는 서로 겹치지(intersect) 않는다. 하지만 간결성을 위해 이 자료를 쓸 것이다.

R (Mpc)	ρ_{CC}
0.3125	0.406
0.5375	0.808
0.7625	1.341
0.9875	1.134
1.2125	0.479
1.4375	0.143
1.6625	0.073
1.8875	0.060

이 외의 모든 확률밀도들은 위에 주어진 중심은하-중심은하(CC) 자료와, Part 1에서 계산한 같은 헤일로 내의 중심은하-위성은하(CS^*) 자료를 이용해서 계산할 수 있다. 아래와 같은 관계식을 사용한다:

$$\rho^*_{SS}(R) = c_1 R\left[\rho^*_{CS}(R)\right]^2$$
$$\rho_{CS}(R) = c_2 R\left[\rho^*_{CS}(R)\right]^2 \sqrt{\rho_{CC}(R)+1}$$
$$\rho_{SS}(R) = c_3 R\left[\rho^*_{CS}(R)(\rho_{CC}(R)-5)\right]^2$$

c_1, c_2, c_3는 정규화 상수들(normalization constants)이다. 이들은 위 식 각각을 확률밀도로 표시할 수 있게 구해져야 한다.

b) 정규화된 확률밀도 $\rho^*_{SS}(R)$, $\rho_{CS}(R)$, $\rho_{SS}(R)$를 계산하라. **(15pt)**

c) 이제 위의 모든 확률분포를 적당한 가중치로 합해서 최종적으로 모든 은하 쌍의 확률밀도를 계산하라. 이 확률밀도는 Figure 1의 6가지 확률밀도 중 어느 것에 해당하는가? **(8pt)**