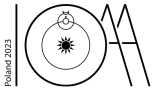
G0-1

Korean (South Korea)

자료분석 시험 - 안내사항

- **시험이 시작되기 전까지 문제봉투를 만지지 마시오.**
- 자료분석 시험은 3시간 동안 진행되고 125점 만점이다.
- 채점될 풀이를 적을 **답안지 (Answer Sheet)**가 있고, 채점되지 않을 **연습지 (Working Sheet)**가 따로 있다. 모두 당신의 학생 코드와 문제 번호가 적혀있을 것이다.
- **각 문제에 지정되어 있는 답안지 만을 사용해야 한다. 인쇄가 되어있는 면에만 답안을 작성하시오.** 뒷면은 사용하지 마시오. 답안지에 채점되고 싶지 않은 내용이 있다면 X자를 그으시오.
- 채점자가 답안을 잘 이해할 수 있도록 최대한 많은 수학적 식들을 사용하시오. 채점자가 당신의 언어를 이해하지 못할 수 있다. 꼭 단어들을 이용해 설명해야 한다면, 짧은 구절들로 설명하시오. (가능하면 영어로)
- 허락 없이 책상에서 떠날 수 없다. 도움이 필요하다면 (고장난 계산기, 화장실 등등), 감독관에게 허락을 받으시오.
- 감독관이 시험의 시작과 끝을 알려줄 것이다. 남은 시간은 시계에 표시될 것이다.
- 시험이 끝난 경우에는 곧바로 답안 작성을 멈춰야 한다. 모든 것을 봉투에 넣고 책상 위에 두시오.
- 모든 봉투가 모인 후 당신의 가이드가 시험장 밖으로 데리고 나갈 것이다.
- 상수표와 중요한 관계식들이 봉투에 같이 들어있을 것이다.

DELEGATION PRINT



C0-1

Korean (South Korea)

상수표

기본 상수들

진공에서의 빛의 속도	c	=	2.998×10^{8} m s^{-1}
플랑크 상수	h	=	6.626×10^{-34} J s
볼츠만 상수	k_B	=	1.381×10^{-23} J K^{-1}
슈테판-볼츠만 상수	σ	=	5.670×10^{-8} W m^{-2} K^{-4}
기본 전하	e	=	1.602×10^{-19} C
중력 상수	G	=	6.674×10^{-11} N m^2 kg^{-2}
진공에서의 유전율	ϵ_0	=	8.854×10^{-12} m^{-3}kg^{-1}s^{4}A^2
기체 상수	R	=	8.315 J mol^{-1} K^{-1}
아보가드로 상수	N_A	=	6.022×10^{23} mol^{-1}
빈 상수	$b = \lambda_m T$	=	2.898×10^{-3} m K
전자의 질량	m_e	=	9.109×10^{-31} kg
양성자의 질량	m_p	=	1.673×10^{-27} kg
중성자의 질량	m_n	=	1.675×10^{-27} kg
헬륨 원자핵의 질량	m_He	=	6.645×10^{-27} kg
원자 질량 단위 (a.m.u., Dalton)		=	1.661×10^{-27} kg

천문학적 데이터

허블 상수	H_0	=	70 km s^{-1} Mpc^{-1}
황도의 북극 (J2000.0)	$(\alpha_\mathsf{E},\ \delta_\mathsf{E})$		$(18^\mathsf{h}00^\mathsf{m}00^\mathsf{s}, +66°33'39'')$
은하의 북극 (J2000.0)	$(\alpha_\mathsf{G},\ \delta_\mathsf{G})$		$(12^\mathsf{h}51^\mathsf{m}26^\mathsf{s}, +27°07'42'')$
1 잰스키 (jansky)	1 Jy	=	10^{-26} W m^{-2} Hz^{-1}
1 파섹 (parsec)	1 pc	=	3.086×10^{16} m $206\,265$ au 3.262 ly
1 천문단위 (au)	1 au	=	1.496×10^{11} m
1 항성일	T_SD	=	23.93444 h $23^\mathsf{h}56^\mathsf{m}04^\mathsf{s}$
1 태양년		=	365.2422 solar days
1 항성년		=	365.2564 solar days

DELEGATION PRINT

Data Analysis

C0-2

Korean (South Korea)

근사식

$(1+x)^n \approx 1+nx$

$(1+x)(1+y) \approx 1+x+y$ if $x \ll 1$ and $y \ll 1$

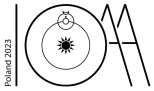
가우스 공식

구면 코사인 법칙 : $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$

구면 사인 법칙 : $\dfrac{\sin A}{\sin a} = \dfrac{\sin B}{\sin b} = \dfrac{\sin C}{\sin c}$

다음 페이지 $\Longrightarrow$

DELEGATION PRINT



C0-3

Korean (South Korea)

태양			
태양 광도	$L_\odot$	$=$	3.826×10^{26} W
태양의 겉보기 지름	$\theta_\odot$	$=$	$32'$
태양의 유효 표면온도	$T_{\text{eff},\odot}$	$=$	5778 K
겉보기 안시등급 (visual)		$=$	-26.75
절대 안시등급 (visual)		$=$	$+4.82$
겉보기 복사등급 (bolometric)		$=$	-26.83
절대 복사등급 (bolometric)		$=$	$+4.74$
은하 중심에서 태양까지의 거리		$\approx$	$8\ kpc$

지구와 달			
황도 경사각 (지구)	ϵ	$=$	23.5°
플라톤 년 (지구 자전축의 세차 주기)		$=$	$25\,765$ 년
보름달의 겉보기 안시등급 (visual)		$=$	-12.74
달의 겉보기 지름	θ_L	$=$	$31'$
황도면에 대한 달 공전 궤도의 경사각		$=$	$05^\circ 08' 43''$
달 공전 궤도에 대한 달 적도의 경사각		$=$	6.687°
항성월	T_SL	$=$	27.321661 d 655.71986 h
삭망월		$=$	29.530589 d
회귀월		$=$	27.32158 d
근점월 (근점 (apogee)에서 근점까지의 시간)		$=$	27.554550 d
교점월 (승교점 (ascending node)에서 승교점 까지의 시간)		$=$	27.212221 d

DELEGATION PRINT

C0-4

Korean (South Korea)

태양계

천체	평균 반지름 [km]	질량 [kg]	장반경 [au]	이심률
태양	695 700	1.988×10^{30}	—	—
수성	2 440	3.301×10^{23}	0.387	0.206
금성	6 052	4.867×10^{24}	0.723	0.007
지구	6 378	5.972×10^{24}	1.000	0.016 710
달	1 737	7.346×10^{22}	3.844×10^{5} km	0.054 900 (범위 $0.026 - 0.077$)
화성	3 390	6.417×10^{23}	1.524	0.093
목성	69 911	1.898×10^{27}	5.203	0.048
토성	58 232	5.683×10^{26}	9.537	0.054
천왕성	25 362	8.681×10^{25}	19.189	0.047
해왕성	24 622	1.024×10^{26}	30.070	0.009

DELEGATION PRINT

문제 2: 외딴 블랙홀 (Isolated black hole) (75점)

2022년에 두 독립된 연구 그룹이 미세중력렌즈 현상 OGLE-2011-BLG-0462의 관측을 통해 외딴 블랙홀의 발견을 보고하였다. 이 문제에서는 그들의 발견을 재현하기 위해서 허블우주망원경으로 얻은 자료를 분석할 것이다.

미세중력렌즈현상은 멀리 있는 천체(근원별, source)의 빛이 시선 방향에서 가로막고 있는 천체(렌즈, lens)의 중력장에 의해 휘어지고 증폭되는 현상이다. 미세중력렌즈 현상의 특징적인 각 척도, 즉, 소위 아인슈타인 각 반지름이라고 불리는 θ_E는 렌즈의 질량 M과 지구에서 렌즈까지의 거리 D_ℓ에 의존하는 값이며 다음과 같이 주어진다.

$$\theta_{\rm E} = \sqrt{\frac{4GM}{c^2}\frac{D_s - D_\ell}{D_s D_\ell}}$$

여기서 D_s는 지구에서 근원별 까지의 거리이다. 우리은하내에서 발견된 전형적인 미세중력렌즈 현상의 근원별들은 우리 은하 중심부와 가까운 우리은하의 팽대부, 즉 우리은하 벌지에 있고, 그 거리는 $D_s \approx 8$ kpc 이다.

(a) 거리 1 kpc에 있는 질량 $1\,M_\odot$인 렌즈에 대한 아인슈타인 각 반지름을 밀리각초 (mas) 단위로 구하시오.

(2점)

시간 t에 렌즈와 근원별이 하늘에서 각 $\theta \equiv u(t)\theta_E$ 만큼 떨어져 있다고 가정하라. 근원별의 두 이미지가 렌즈와 근원별의 위치를 연결하는 선상에 만들어지는데, 이 이미지들이 렌즈로부터 떨어진 각 거리가 각각 θ_+와 θ_- 이다. 다음 식으로 계산된다.

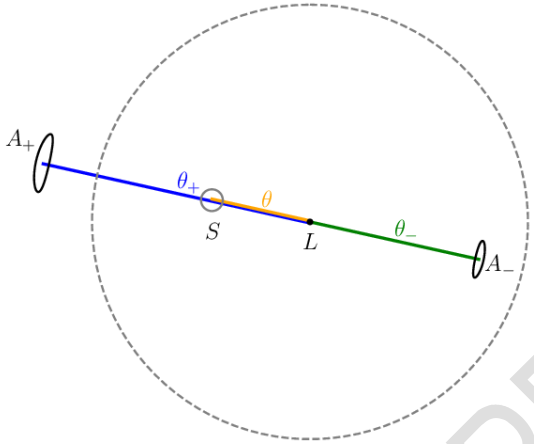
$$\theta_\pm = \frac{1}{2}\left(u \pm \sqrt{u^2+4}\right)\theta_{\rm E}.$$

이 두 이미지는 중력렌즈현상이 없는 상태의 근원별에 비해 밝아진다. 이 이미지들의 밝기 증가 비율은 다음과 같다.

$$A_\pm = \frac{1}{2}\left(\frac{u^2+2}{u\sqrt{u^2+4}} \pm 1\right)$$

아래의 그림은 이 현상의 기하학적 도식이다. 렌즈의 위치는 L로, 근원별은 S로, 근원별의 두 이미지의 위치는 A_+ 와 A_- 로 표시되어 있다. 점선 원의 반지름은 1 아인슈타인 각 반지름이다.

DELEGATION PRINT



(이 그림의 컬러 버전이 다른 종이에 주어질 것이다.)

(b) 현재 망원경들로는 이 이미지 쌍을 구별하기 어렵고, 두 이미지의 위치에 대한 밝기-가중 평균 위치 (weighted mean) 로 이미지의 중심 위치를 측정하는 것 만이 가능하다. 이미지 중심 위치가 렌즈의 위치에 대해 상대적으로 얼마나 떨어져 있는 지를 나타내는 θ_c를 u와 θ_E의 함수에 대한 표현식으로 유도하시오.

(8점)

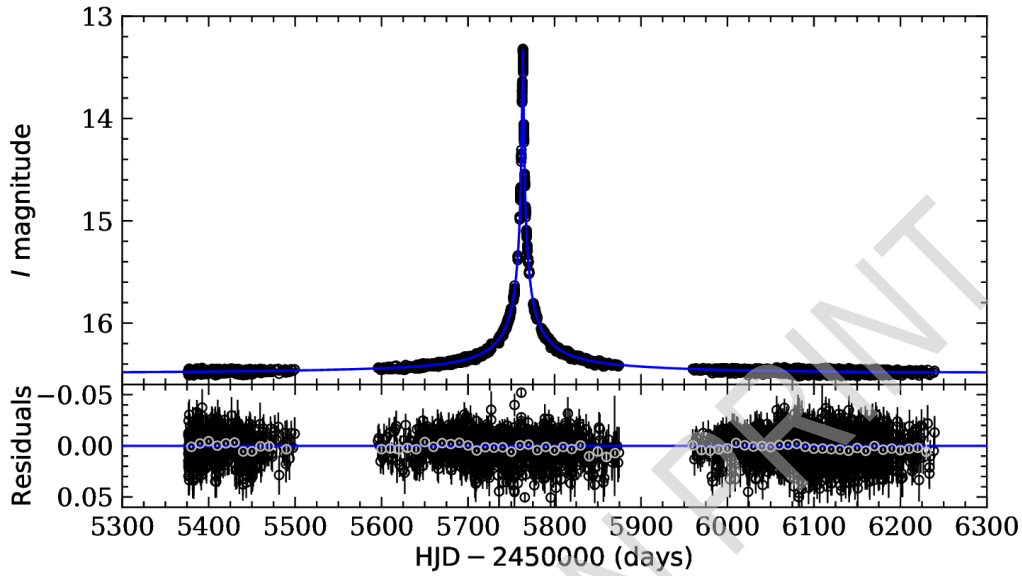
(c) 중력렌즈현상을 겪지 않은 상태의 근원별의 위치와 이미지 중심 위치 사이의 차이를 나타내는 각도, 즉 편향각 $\Delta\theta$를 u와 $\theta_{\rm E}$에 대한 식으로 나타내시오. 렌즈와 근원별이 완전히 정렬되었을 때 ($u \approx 0$)의 편향각은 얼마인가?

(4점)

근원별과 렌즈가 하늘에서 서로에 대해 상대적으로 이동하고 있다. 그로 인해 두 이미지의 총 밝기 증폭량과 중심 위치가 시간에 따라 변화하는데, 결과적으로 그런 변화가 중력렌즈효과의 측광/측성 관측을 가능하게 만든다. 지금 문제를 풀기 위해서 근원별과 렌즈의 상대적 운동이 직선운동이라고 가정하자.

아래 그림은, 바르샤바 대학의 천문학자들이 이끈 OGLE sky survey에 의해 발견된, 미세중력렌즈 현상 OGLE-2011-BLG-0462의 광도 곡선이다. 실선은 관측을 가장 잘 설명하는 광도 곡선 모델을 나타낸다. 렌즈에 대해 근원별이 1 아인슈타인 각 반지름 만큼 이동하는데 필요한 시간을 아인슈타인 시간척도(Einstein timescale)라고 하는데, 이 현상에 대한 아인슈타인 시간척도는 $t_{\rm E} = 247$일 이였다. 이 미세중력렌즈 현상은 2011년 7월 21일 ($\mathrm{HJD} = 2455763$)에 최대 밝기를 보였다. 렌즈와 근원별 사이의 최소 간격은 $u_0 \approx 0$ 였다.

DELEGATION PRINT



아래 표에는 허블우주망원경 데이터를 이용해 얻은 배경에 대해 측정한 근원별의 동쪽과 북쪽 방향으로의 위치가 적혀있다.

HJD	E position (mas)	N position (mas)
2455765.2	2.58 ± 0.13	7.29 ± 0.16
2455865.7	2.32 ± 0.12	5.44 ± 0.24
2456179.7	0.46 ± 0.14	1.62 ± 0.08
2456195.8	0.88 ± 0.36	1.56 ± 0.77
2456426.2	-1.02 ± 0.21	-0.94 ± 0.12
2456587.7	-2.04 ± 0.07	-1.88 ± 0.40
2456956.6	-4.54 ± 0.25	-5.16 ± 0.29
2457995.2	-11.14 ± 0.12	-15.14 ± 0.17

(d) 근원별의 동쪽과 북쪽 방향으로의 측정된 위치를 시간에 대한 함수로 각각 그리시오.

(10점)

(e) 관측된 근원별의 움직임은 두 효과의 합으로 생겨난 것이다. 실제 선형 고유 운동과 미세중력렌즈 효과이다. 이 중 실제 고유운동의 크기와 그 오차를 동쪽과 북쪽 방향에 대해 mas/year 단위로 구하시오.

(8점)

DELEGATION PRINT

(f) 데이터에서 진짜 고유 운동의 영향을 제거한 후, 남은 편향각을 u에 대한 함수로 계산하고 그리시오. 고유운동 계산에 의한 오차는 무시하시오.

(20점)

(g) 데이터를 분석해서 아인슈타인 각 반지름 θ_{E}와 그 오차를 계산해라. (힌트 : $\Delta\theta$ 에 대한 식을 선형화하면 도움이 될 수 있다.)

(16점)

(h) OGLE-2011-BLG-0462 과 같이 오랜 시간동안 일어나는 현상에서는 렌즈/근원별의 고유운동이 선형적으로 일어난다고 가정할 수 없다. 지구의 공전 운동이 영향을 주기 때문이다. '미세중력렌즈 시차' $\pi_{\mathrm{E}} = (\pi_l - \pi_s)/\theta_{\mathrm{E}}$라는 무차원 변수를 정의해야 하는데, π_l 와 π_s 는 각각 렌즈와 근원별의 시차이다.

이 현상에서 $\pi_E = 0.095 \pm 0.009$이다. 위에서 주어진 θ_{E}에 대한 식을 다시 정리해서 중력렌즈의 질량과 그 오차를 태양 질량 단위로 계산해라.

(7점)

DELEGATION PRINT