풀이

PART-A 공의 질량과 위치의 곱 (m×l) (4.0점)

1. 식을 써서, m×l을 얻을 수 있는 방법을 제안하고 그 근거를 밝히시오. (2.0점)

$$m\times l = (M+m)\times l_{\mathrm{cm}}$$

(설명) 전체 계의 질량 중심 위치를 찾으면, 그림 A-1처럼 역학 "블랙박스"에 지레 규칙을 적용한다.

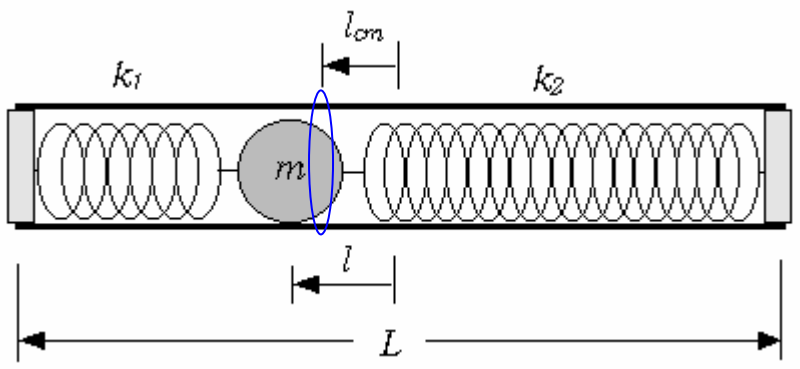


그림 A-1 실험 장치

2. m×l의 값을 실험으로 정하시오. (2.0점)

$$m\times l = 2.96\times 10^{-3}\,\mathrm{kg\cdot m}$$

(설명) 잰 양은 다음과 같다.

$$M+m = (1.411\pm 0.0005)\times 10^{-1}\,\mathrm{kg}$$

또

$$l_{\mathrm{cm}} = (2.1\pm 0.06)\times 10^{-2}\,\mathrm{m} \quad \text{곧} \quad 21\pm 0.6\ \mathrm{mm}.$$

따라서

$$\begin{aligned} m\times l &= (M+m)\times l_{\mathrm{cm}} \\ &= (1.411\pm 0.0005)\times 10^{-1}\,\mathrm{kg}\times (2.1\pm 0.06)\times 10^{-2}\,\mathrm{m} \\ &= (2.96\pm 0.08)\times 10^{-3}\,\mathrm{kg\cdot m} \end{aligned}$$

PART-B 공의 질량 m (10.0점)

1. h를 여러 값으로 바꾸어 가며 v를 재시오. m의 값을 구하기에 알맞은 꼴로 데이터를 그래프 용지에 그리시오. 그래프에서 느린 회전 영역과 빠른 회전 영역을 찾아 표시하시오. (4.0점)

2. 측정으로부터 느린 회전 영역에서는 $h = C v^2$, 빠른 회전 영역에서는 $h = A v^2 + B$임을 보이시오. (1.0점)

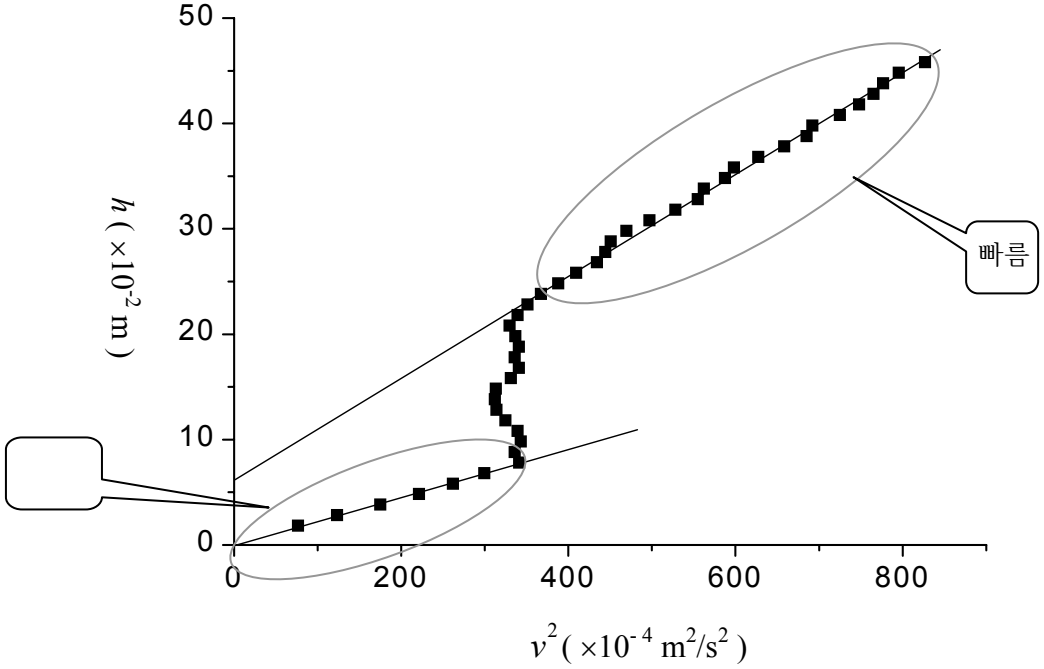


그림 B-1 실험 데이터

(설명) 잰 데이터는 다음과 같다.

	h_1 ($\times 10^{-2}$ m) [a]	Δt (ms)	h ($\times 10^{-2}$ m) [b]	v ($\times 10^{-2}$ m/s) [c]	v^2 ($\times 10^{-4}$ m^2/s^2)
1	25.5±0.1	269.4±0.05	1.8±0.1	8.75±0.02	76.6±0.2
2	26.5±0.1	235.7±0.05	2.8±0.1	11.12±0.02	123.7±0.3
3	27.5±0.1	197.9±0.05	3.8±0.1	13.24±0.03	175.3±0.6
4	28.5±0.1	176.0±0.05	4.8±0.1	14.89±0.03	221.7±0.6
5	29.5±0.1	161.8±0.05	5.8±0.1	16.19±0.03	262.1±0.7
6	30.5±0.1	151.4±0.05	6.8±0.1	17.31±0.03	299.6±0.7
7	31.5±0.1	141.8±0.05	7.8±0.1	18.48±0.04	342±1
8	32.5±0.1	142.9±0.05	8.8±0.1	18.33±0.04	336±1

9	33.5±0.1	141.4±0.05	9.8±0.1	18.53±0.04	343±1
10	34.5±0.1	142.2±0.05	10.8±0.1	18.42±0.04	339±1
11	35.5±0.1	145.4±0.05	11.8±0.1	18.02±0.04	325±1
12	36.5±0.1	147.8±0.05	12.8±0.1	17.73±0.04	314±1
13	37.5±0.1	148.3±0.05	13.8±0.1	17.67±0.04	312±1
14	38.5±0.1	148.0±0.05	14.8±0.1	17.70±0.04	313±1
15	39.5±0.1	143.9±0.05	15.8±0.1	18.21±0.04	332±1
16	40.5±0.1	141.9±0.05	16.8±0.1	18.46±0.04	341±1
17	41.5±0.1	142.9±0.05	17.8±0.1	18.33±0.04	336±1
18	42.5±0.1	141.9±0.05	18.8±0.1	18.46±0.04	341±1
19	43.5±0.1	142.8±0.05	19.8±0.1	18.35±0.04	337±1
20	44.5±0.1	144.3±0.05	20.8±0.1	18.16±0.04	330±1
21	45.5±0.1	142.2±0.05	21.8±0.1	18.42±0.04	339±1
22	46.5±0.1	139.8±0.05	22.8±0.1	18.74±0.04	351±1
23	47.5±0.1	136.7±0.05	23.8±0.1	19.17±0.04	368±1
24	48.5±0.1	133.0±0.05	24.8±0.1	19.70±0.04	388±1
25	49.5±0.1	129.5±0.05	25.8±0.1	20.23±0.04	409±1
26	50.5±0.1	125.7±0.05	26.8±0.1	20.84±0.04	434±1
27	51.5±0.1	124.3±0.05	27.8±0.1	21.08±0.04	444±1
28	52.5±0.1	123.4±0.05	28.8±0.1	21.23±0.04	451±1
29	53.5±0.1	120.9±0.05	29.8±0.1	21.67±0.04	470±1
30	54.5±0.1	117.5±0.05	30.8±0.1	22.30±0.04	497±1
31	55.5±0.1	114.0±0.05	31.8±0.1	22.98±0.04	528±1
32	56.5±0.1	111.2±0.05	32.8±0.1	23.56±0.05	555±2
33	57.5±0.1	110.5±0.05	33.8±0.1	23.71±0.05	562±2
34	58.5±0.1	108.1±0.05	34.8±0.1	24.24±0.05	588±2
35	59.5±0.1	107.1±0.05	35.8±0.1	24.46±0.05	598±2
36	60.5±0.1	104.6±0.05	36.8±0.1	25.05±0.05	628±2
37	61.5±0.1	102.1±0.05	37.8±0.1	25.66±0.05	658±2
38	62.5±0.1	100.1±0.05	38.8±0.1	26.17±0.05	685±2
39	63.5±0.1	99.6±0.05	39.8±0.1	26.31±0.05	692±2
40	64.5±0.1	97.3±0.05	40.8±0.1	26.93±0.05	725±2
41	65.5±0.1	95.8±0.05	41.8±0.1	27.35±0.05	748±2
42	66.5±0.1	94.7±0.05	42.8±0.1	27.67±0.05	766±2
43	67.5±0.1	94.0±0.05	43.8±0.1	27.87±0.06	777±2
44	68.5±0.1	92.9±0.05	44.8±0.1	28.20±0.06	795±2
45	69.5±0.1	91.1±0.05	45.8±0.1	28.76±0.06	827±2

여기서 a) h_1은 추가 떨어지기 시작하기 전 추의 윗면 위치의 눈금 값,
b) h는 추가 떨어진 거리로 $h = h_1 - h_2 + d/2$로 얻으며,
h_2 (= (25±0.05)×10⁻² m)는 광문을 가리기 시작할 때 추의 윗면 위치,

d (= (2.62±0.005)×10⁻² m)는 추의 길이,
c) v는 $v = d/\Delta t$로 얻는다.

3. 계수 C를 MBB의 매개변수로 나타내시오. (1.0점)

$$h = Cv^2, \text{ 여기서} C = \{m_o + I/R^2 + m(l^2 + 2/5\, r^2)/R^2\}/2m_o g$$

(설명) 공은 정적 평형 상태(x = l)에 있다. 추의 속력이 v일 때 전체 계의 운동 에너지 증가는 다음과 같다.

$$\Delta K = 1/2\, m_o v^2 + 1/2\, I\omega^2 + 1/2\, m(l^2 + 2/5\, r^2)\omega^2$$
$$= 1/2\, \{m_o + I/R^2 + m(l^2 + 2/5\, r^2)/R^2\}v^2,$$

여기서 ω (= v/R)는 역학 "블랙박스"의 각속도이고, I는 공을 뺀 전체 계의 유효 관성 모멘트이다. 추의 중력 퍼텐셜 에너지 감소가

$$\Delta U = - m_o g h\ ,$$

이므로, 에너지 보존($\Delta K + \Delta U = 0$)에서

$$h = 1/2\, \{m_o + I/R^2 + m(l^2 + 2/5\, r^2)/R^2\}v^2/m_o g$$
$$= Cv^2, \quad \text{여기서} C = \{m_o + I/R^2 + m(l^2 + 2/5\, r^2)/R^2\}/2m_o g$$

4. 계수 A와 B를 MBB의 매개변수로 나타내시오. (1.0점)

$$h = Av^2 + B, \text{ 여기서} A = [m_o + I/R^2 + m\{(L/2 - \delta - r)^2 + 2/5\, r^2\}/R^2]/2m_o g$$
$$\text{또} \quad B = [-k_1(L/2 - l - \delta - r)^2$$
$$+ k_2\{(L - 2\delta - 2r)^2 - (L/2 + l - \delta - r)^2\}]/2m_o g$$

(설명) 공은 관의 마개에 머문다(x = L/2 − δ − r). 추의 속력이 v일 때 전체 계의 운동 에너지 증가는 다음과 같다.

$$K = 1/2\ [m_o + I/R^2 + m\{(L/2 - \delta - r)^2 + 2/5\ r^2\}/R^2]v^2.$$

용수철의 탄성 퍼텐셜 에너지 증가가 다음과 같으므로

$$\Delta U_e = 1/2\ [-k_1(L/2 - l - \delta - r)^2 + k_2\{(L - 2\delta - 2r)^2 - (L/2 + l - \delta - r)^2\}],$$

에너지 보존(△K + △U + △U_e = 0)에서

$$h = 1/2\ [m_o + I/R^2 + m\{(L/2 - \delta - r)^2 + 2/5\ r^2\}/R^2]v^2/m_o g + \Delta U_e/m_o g$$
$$= A\,v^2 + B,$$

여기서

$$A = [m_o + I/R^2 + m\{(L/2 - \delta - r)^2 + 2/5\ r^2\}/R^2]/2m_o g$$

또

$$B = [-k_1(L/2 - l - \delta - r)^2 + k_2\{(L - 2\delta - 2r)^2 - (L/2 + l - \delta - r)^2\}]/2m_o g.$$

5. 측정과 PART-A에서 얻은 결과로 m의 값을 정하시오. (3.0점)

$$m = 6.2\times10^{-2}\ \text{kg}$$

(설명) PART-B 3과 4의 결과에서 다음을 얻는다.

$$A - C = \frac{m}{2gm_o R^2}\left\{(L/2 - \delta - r)^2 - l^2\right\}.$$

잰 값은

$$L = (40.0\pm0.05)\times10^{-2}\ \text{m}$$
$$m_o = (100.4\pm0.05)\times10^{-3}\ \text{kg}$$
$$2R = (3.91\pm0.005)\times10^{-2}\ \text{m}$$

따라서

$$(L/2 - \delta - r)^2 = \{(20.0\pm0.03) - 0.5 - 1.1\}^2\times10^{-4}\ \text{m}^2 = (338.6\pm0.8)\times10^{-4}\ \text{m}^2$$

또

$$2gm_oR^2 = 2\times980\times(100.4\pm0.05)\times(1.955\pm0.003)^2\times10^{-6}\ \text{kg}\cdot\text{m}^3/\text{s}^2$$
$$= (752\pm2)\times10^{-6}\ \text{kg}\cdot\text{m}^3/\text{s}^2.$$

PART-B 1의 그래프(그림 B-1)에서 두 직선의 기울기는 각각

$$A = 5.0\pm0.1\,\mathrm{s^2/m} \quad \text{와} \quad C = 2.4\pm0.1\,\mathrm{s^2/m},$$

이며, 따라서

$$A - C = 2.6\pm0.1\,\mathrm{s^2/m}.$$

PART-A에서 이미 $m\times l = (M + m)\times l\mathrm{cm} = 2.96\times10^{-3}$ kg・m을 얻었으므로,
다음 방정식

$$(338.6\pm0.8)m^2 - (752\pm2)\times10^3\times(0.026\pm0.001)m - (296\pm8)^2 = 0$$

또는

$$(338.6\pm0.8)m^2 - (19600\pm800)m - (88000\pm3000) = 0$$

을 얻는다. 여기서 m은 g 단위로 나타낸 것이다.
이 방정식의 근은

$$m = \frac{(9800\pm400)\pm\sqrt{(9800\pm400)^2 + (338.6\pm0.8)\times(88000\pm3000)}}{(338.6\pm0.8)}.$$

물리적으로 의미 있는 양의 근은

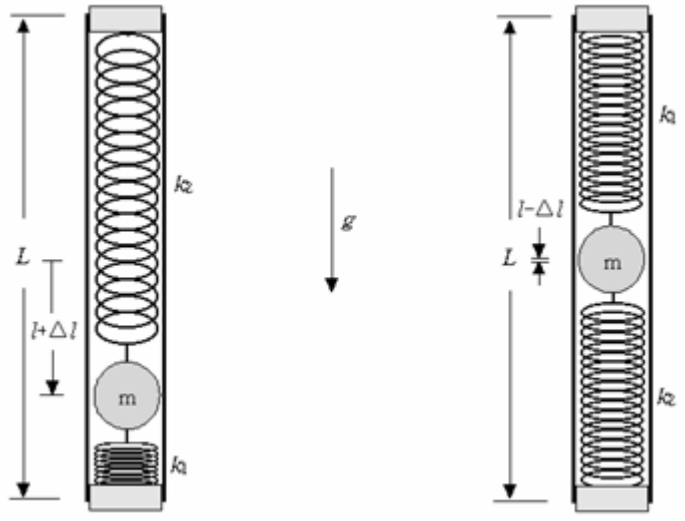
$$m = \frac{(9800\pm400)+\sqrt{(126000000\pm6000000)}}{(338.6\pm0.8)} = (62\pm2)\,\mathrm{g} = (6.2\pm0.2)\times10^{-2}\,\mathrm{kg}.$$

PART-C 용수철 상수 k_1과 k_2 (6.0점)

1. 그림 3(1)과 (2)에 보인 작은 진동의 주기 T_1과 T_2를 재어 각각의 값을 적으시오. (1.0점)

$T_1 = 1.1090\mathrm{s}$ 그리고 $T_2 = 1.0193\mathrm{s}$

(설명)



(1) (2)

그림 C-1 작은 진동 실험 장치

잰 주기는 다음과 같다.

	T_1 (s)		T_2 (s)
1	1.1085±0.00005	1	1.0194±0.00005
2	1.1092±0.00005	2	1.0194±0.00005
3	1.1089±0.00005	3	1.0193±0.00005
4	1.1085±0.00005	4	1.0191±0.00005
5	1.1094±0.00005	5	1.0192±0.00005
6	1.1090±0.00005	6	1.0194±0.00005
7	1.1088±0.00005	7	1.0194±0.00005
8	1.1090±0.00005	8	1.0191±0.00005
9	1.1092±0.00005	9	1.0192±0.00005
10	1.1094±0.00005	10	1.0193±0.00005

배치마다 10번 잰 값을 각각 평균하면 다음을 얻는다.

$T_1 = 1.1090 \pm 0.0003$s 그리고 $T_2 = 1.0193 \pm 0.0001$s.

2. 두 배치의 작은 진동 각진동수 ω_1과 ω_2가 왜 다른지 식을 써서 설명하시오. (1.0점)

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{Mg\,L/2 + mg\left(L/2 + l + \Delta l\right)}{I_o + m\left\{\left(L/2 + l + \Delta l\right)^2 + \frac{2}{5}r^2\right\}}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{Mg\,L/2 + mg\left(L/2 - l + \Delta l\right)}{I_o + m\left\{\left(L/2 - l + \Delta l\right)^2 + \frac{2}{5}r^2\right\}}}$$

(설명) 관 위쪽 끝의 회전축에 대한 역학 "블랙박스"의 관성 모멘트는 그림 C-1(1)과 (2)에 보인 MBB의 방향에 따라 다음과 같다.

$$I_1 = I_o + m\left\{\left(L/2 + l + \Delta l\right)^2 + \frac{2}{5}r^2\right\} \quad \text{또는} \; I_2 = I_o + m\left\{\left(L/2 - l + \Delta l\right)^2 + \frac{2}{5}r^2\right\}$$

(MBB의 방향에 따라 각각).

MBB가 연직에서 각 θ만큼 조금 기울어지면, 중력이 주는 돌림힘은

$$\tau_1 = Mg\left(L/2\right)\sin\theta + mg\left(L/2 + l + \Delta l\right)\sin\theta \approx \left\{Mg\left(L/2\right) + mg\left(L/2 + l + \Delta l\right)\right\}\theta$$

또는

$$\tau_2 = Mg\left(L/2\right)\sin\theta + mg\left(L/2 - l + \Delta l\right)\sin\theta \approx \left\{Mg\left(L/2\right) + mg\left(L/2 - l + \Delta l\right)\right\}\theta$$

(MBB의 방향에 따라)
따라서 진동의 각진동수는 다음과 같다.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\tau_1/\theta}{I_1}} = \sqrt{\frac{Mg\,L/2 + mg\left(L/2 + l + \Delta l\right)}{I_o + m\left\{\left(L/2 + l + \Delta l\right)^2 + \frac{2}{5}r^2\right\}}}$$

또

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\tau_2/\theta}{I_2}} = \sqrt{\frac{Mg\,L/2 + mg\left(L/2 - l + \Delta l\right)}{I_o + m\left\{\left(L/2 - l + \Delta l\right)^2 + \frac{2}{5}r^2\right\}}}\,.$$

3. 앞의 결과에서 I_0를 소거하여 $\triangle l$을 구하시오. (1.0점)

$$\Delta l = (7.2 \pm 0.9)\,\text{cm} = (7.2 \pm 0.9) \times 10^{-2}\,\text{m}$$

(설명) 각진동수 ω_1과 ω_2에 대한 두 식을 다음과 같이 고쳐 쓰면

$$Mg\,L/2 + mg\left(L/2 + l + \Delta l\right) = I_o\omega_1^2 + m\omega_1^2\left\{\left(L/2 + l + \Delta l\right)^2 + \frac{2}{5}r^2\right\}$$

또

$$Mg\,L/2 + mg\left(L/2 - l + \Delta l\right) = I_o\omega_2^2 + m\omega_2^2\left\{\left(L/2 - l + \Delta l\right)^2 + \frac{2}{5}r^2\right\}$$

공을 뺀 MBB의 모르는 관성 모멘트 I_0를 소거할 수 있다.
I_0를 소거하면 $\triangle l$에 대한 다음 식을 얻는다.

$$\left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right)\left\{\frac{(M+m)gL}{2} + mg\Delta l\right\} + \left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right)mgl = \omega_1^2\omega_2^2 m(L + 2\Delta l)(2l).$$

잰 값과 주어진 값으로부터 다음을 얻는다.

$$\left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right) = \left\{\left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2\right\} = \left(\frac{6.2832}{1.0193 \pm 0.0001}\right)^2 - \left(\frac{6.2832}{1.1090 \pm 0.0003}\right)^2$$

$$= 5.90 \pm 0.01\,\text{s}^{-2}$$

$$\frac{(M+m)gL}{2} = \frac{(141.1 \pm 0.05) \times 980 \times (40.0 \pm 0.05)}{2} = (27.66 \pm 0.04) \times 10^{-2}\,\text{kg·m}^2/\text{s}^2$$

$$\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right)mgl = \left\{\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2\right\}(M+m)l_{cm}g$$

$$= \left\{\left(\frac{6.2832}{1.1090 \pm 0.0003}\right)^2 + \left(\frac{6.2832}{1.0193 \pm 0.0001}\right)^2\right\} \times (296 \pm 8) \times 980$$

$$= (203 \pm 5) \times 10^{-2}\ \text{kg·m}^2/\text{s}^4$$

$$\omega_1^2 \omega_2^2 ml = \left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 \left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2 (M+m) l_{cm}$$

$$= \left(\frac{6.2832}{1.1090 \pm 0.0003}\right)^2 \left(\frac{6.2832}{1.0193 \pm 0.0001}\right)^2 \times (296 \pm 8)$$

$$= (3.6 \pm 0.1)\ \text{kg·m/s}^4.$$

따라서 PART-C 3에서 얻은 식은 다음이 된다.

$$(5.90 \pm 0.01)\{(27.66 \pm 0.04) \times 10^5 + (62 \pm 2) \times 980 \times \Delta l\} + (203 \pm 5) \times 10^5$$

$$= (7.2 \pm 0.2) \times 10^5 \times \{(40.0 \pm 0.05) + 2\Delta l\},$$

여기서 Δl은 cm 단위이다. 이 식을 풀면 다음을 얻는다.

$$\Delta l = (7.2 \pm 0.9)\ \text{cm} = (7.2 \pm 0.9) \times 10^{-2}\ \text{m}$$

4. 두 용수철 계의 유효 전체 용수철 상수 k의 값을 적으시오. (2.0점)

$$k = 9\ \text{N/m}$$

(설명) 유효 전체 용수철 상수는 다음과 같다.

$$k \equiv \frac{mg}{\Delta l} = \frac{(62 \pm 2) \times 980}{7.2 \pm 0.9} = 9000 \pm 1000\ \text{dyne/cm} \quad \text{곧} \quad 9 \pm 1\ \text{N/m}.$$

5. k_1과 k_2의 값을 각각 구해 적으시오. (1.0점)

$$k_1 = 5.7\ \text{N/m}$$
$$k_2 = 3\ \text{N/m}$$

(설명) MBB가 수평면 위에서 평형 상태에 있을 때 공에 대한 힘의 평형 조건은 다음과 같다.

$$\frac{L/2 - l - \delta - r}{L/2 + l - \delta - r} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{k_2}{k_1}.$$

$k = k_1 + k_2$이므로,

$$k_1 = \frac{k}{\dfrac{L/2 - l - \delta - r}{L/2 + l - \delta - r} + 1} = \frac{L/2 + l - \delta - r}{L - 2\delta - 2r} k$$

또

$$k_2 = k - k_1 = \frac{L/2 - l - \delta - r}{L - 2\delta - 2r} k.$$

잰 값과 주어진 값으로부터

$$\frac{L/2 + l - \delta - r}{L - 2\delta - 2r} = \frac{(20.0 \pm 0.03) + \left(\dfrac{296 \pm 8}{62 \pm 2}\right) - 0.5 - 1.1}{(40.0 \pm 0.05) - 1.0 - 2.2} = 0.63 \pm 0.005.$$

따라서

$k_1 = (0.63 \pm 0.005) \times (9000 \pm 1000) = 5700 \pm 600$ dyne/cm 곧 5.7±0.6N/m,

또

$k_2 = (9000 \pm 1000) - (5700 \pm 600) = 3000 \pm 1000$ dyne/cm 곧 3±1N/m.