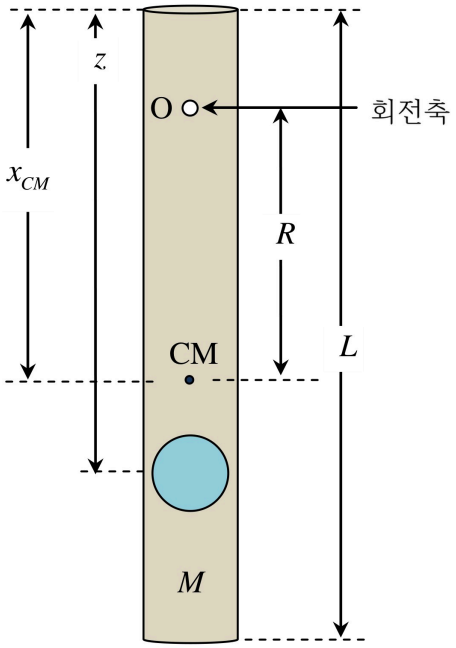
풀이: 2. 역학 블랙박스: 안에 공이 든 원통



i, ii, iii의 값을 계산하려면 다음을 알아야 한다.

a. 관(tubing)과 입자(물체)의 질량 중심 위치. 이는 z, m, M에 따라 달라진다.

b. 위 물체의 관성 모멘트.

질량 중심의 위치는 균형을 잡아 찾을 수 있다. I_{CM}은 관과 물체의 진동 주기로 계산할 수 있다.

그래프에 쓸 매개변수를 고르는 분석 단계

I. $$x_{CM} = \frac{mz + M\frac{L}{2}}{m + M} \qquad \text{..... (1)}$$

L은 자로 쉽게 잰다.

x_{CM}은 관과 물체의 균형을 잡아 정한다.

II. 어떤 점 O에 대한 작은 진폭 진동의 주기 T는 다음 방정식을 생각하여 얻는다.

$$\{(M+m)R^2 + I_{CM}\}\ddot{\theta} = -g(M+m)R\sin\theta \approx -g(M+m)R\theta \quad \text{..... (2)}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{CM} + (M+m)R^2}{g(M+m)R}} \quad \text{..... (3)}$$

여기서
$$I_{CM} = \frac{1}{3}M\left(\frac{L}{2}\right)^2 + M\left(x_{CM} - \frac{L}{2}\right)^2 + m(z - x_{CM})^2$$
$$= \frac{1}{3}ML^2 + Mx_{CM}^2 - MLx_{CM} + m(z - x_{CM})^2 \quad \text{..... (4)}$$

다음에 주의하라.

$$T^2\frac{g(M+m)}{4\pi^2} = \frac{I_{CM}}{R} + (M+m)R \quad \text{..... (5)}$$

방법 (a): (직선 그래프 방법)

식 (5)는 다음 꼴로 쓸 수 있다.

$$T^2R = \left(\frac{4\pi^2}{g}\right)R^2 + \frac{4\pi^2 I_{CM}}{(M+m)g} \quad \text{..... (6)}$$

따라서 T^2R 대 R^2의 그래프는 다음과 같은 직선이 된다.

$$\text{기울기 } \alpha = \frac{4\pi^2}{g} \quad \text{..... (7)}$$

$$\text{y절편 } \beta = \frac{4\pi^2 I_{CM}}{(M+m)g} \quad \text{..... (8)}$$

$$\text{따라서, } I_{CM} = (M+m)\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{..... (9)}$$

g의 값은 식 (7)로부터: $g = \frac{4\pi^2}{\alpha}$ ..... (10)

방법 (b): **최솟점 곡선 방법**

식 (5)는 T가 다음에서 최솟값을 가짐을 뜻한다.

$$R = R_{\min} \equiv \sqrt{\frac{I_{CM}}{M+m}} \qquad \text{..... (11)}$$

따라서 $R_{\min}$은 T 대 R 그래프에서 얻을 수 있다.

그러므로 $$I_{CM} = (M+m)R_{\min}^2 \qquad \text{..... (12)}$$

이 식 (12)와 식 (1)로 필요한 값 z와 $\frac{M}{m}$을 계산할 수 있다.

$R = R_{\min}$에서 식 (5)는 $T_{\min}^2 \frac{g(M+m)}{4\pi^2} = (M+m)R_{\min} + (M+m)R_{\min}$이 된다.

$$g = \frac{2R_{\min}}{T_{\min}^2} \times 4\pi^2 = \frac{8\pi^2 R_{\min}}{T_{\min}^2} \qquad \text{..... (13)}$$

이로부터 g를 계산할 수 있다.

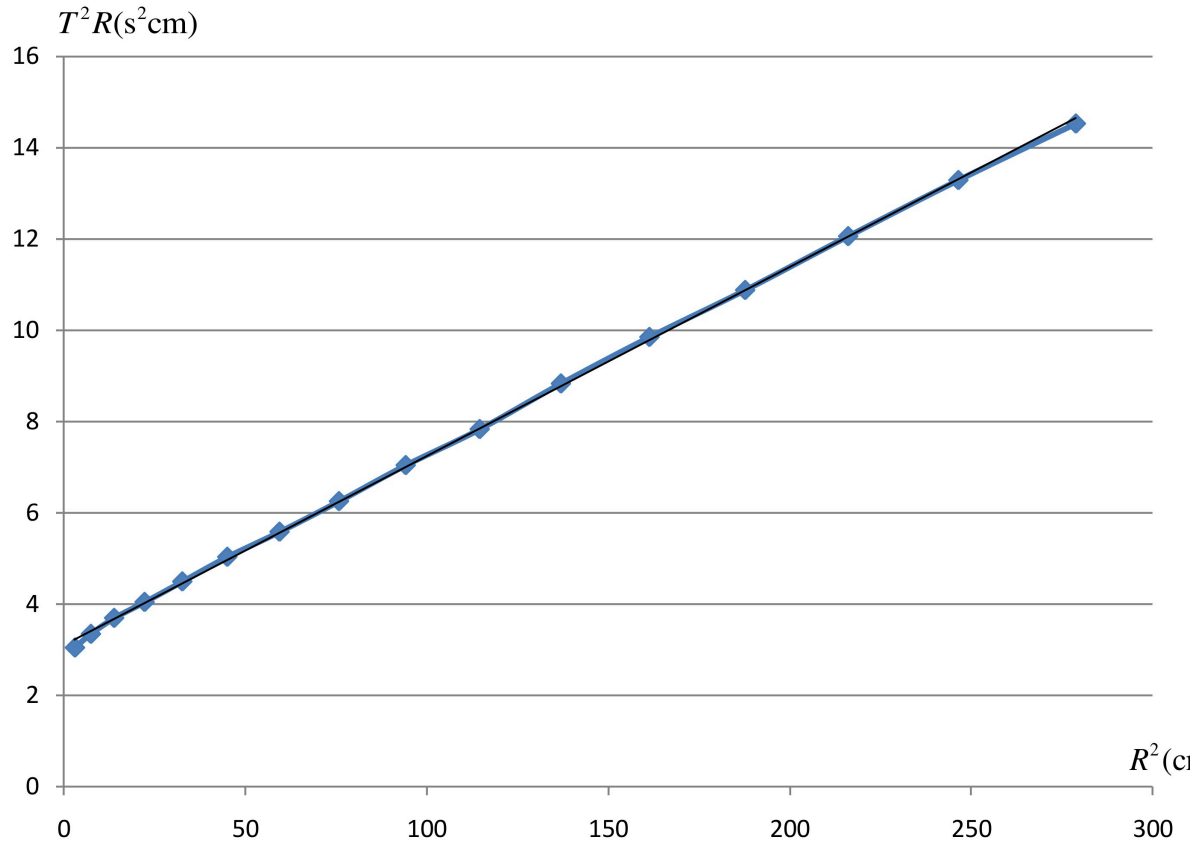
결과

$L = 30.0\ \text{cm} \pm 0.1\ \text{cm}$
$x_{CM} = 17.8\ \text{cm} \pm 0.1\ \text{cm}$ (꼭대기에서)

$x_{CM} - R$ (cm)	20주기 동안의 시간 (s)			T (s)	R (cm)	R^2 (cm^2)	T^2R (s^{2}cm)
1.1	18.59	18.78	18.59	0.933	16.7	278.9	14.53
2.1	18.44	18.25	18.53	0.920	15.7	246.5	13.29
3.1	18.10	18.09	18.15	0.906	14.7	216.1	12.06
4.1	17.88	17.78	17.81	0.891	13.7	187.7	10.88
5.1	17.69	17.50	17.65	0.881	12.7	161.3	9.85
6.1	17.47	17.38	17.28	0.869	11.7	136.9	8.83
7.1	17.06	17.06	17.22	0.856	10.7	114.5	7.83
8.1	17.06	17.00	17.06	0.852	9.7	94.1	7.04
9.1	16.97	16.91	16.96	0.847	8.7	75.7	6.25
10.1	17.00	17.03	17.06	0.852	7.7	59.3	5.58
11.1	17.22	17.37	17.38	0.866	6.7	44.9	5.03
12.1	17.78	17.72	17.75	0.888	5.7	32.5	4.49
13.1	18.57	18.59	18.47	0.927	4.7	22.1	4.04
14.1	19.78	19.90	19.75	0.991	3.7	13.7	3.69
15.1	11.16	11.13	11.13	1.114	2.7	7.3	3.34
16.1	13.25	13.40	13.50	1.338	1.7	2.9	3.04

주: $x_{CM} - R = 15.1, 16.1$ cm에서는 10주기 동안의 시간.

방법 (a)



직선 그래프로 계산: 기울기 $\alpha = 0.04108 \pm 0.0007\ \mathrm{s}^2/\mathrm{cm}$, y절편 $\beta = 3.10 \pm 0.05\ \mathrm{s}^2\mathrm{cm}$

$$g = \frac{4\pi^2}{\alpha} \text{이므로 } g = (961 \pm 20)\ \mathrm{cm/s}^2$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{3.10}{0.04108} = 75.46\ \mathrm{cm}^2\ \ (\pm 2.5\ \mathrm{cm}^2)$$

$$I_{CM} = (M+m)\frac{\beta}{\alpha} = (75.46)(M+m)$$

식 (4)로부터: $I_{CM} = \frac{1}{3}M\left(\frac{L}{2}\right)^2 + M\left(x_{CM} - \frac{L}{2}\right)^2 + m(z - x_{CM})^2$

그러면 $(75.46)(M+m) = 75.0M + 7.84M + m(z-17.8)^2$

$$-7.38\frac{M}{m} + 75.46 = (z-17.8)^2 \quad \text{..... (14)}$$

질량 중심의 위치로부터

$$17.8(M+m) = 15.0M + mz$$

$$\frac{M}{m} = \frac{z-17.8}{2.8} \quad \text{..... (15)}$$

식 (14)와 (15)로부터

$$-\frac{7.38}{2.8}(z-17.8) + 75.46 = (z-17.8)^2$$

$$(z-17.8) = 7.47$$

그리고 $z = 25.27 = 25.3 \pm 0.1$ cm

$$\frac{M}{m} = 2.68 = 2.7$$

<u>오차 어림</u>

g의 오차 구하기:

식 (10)에서 $g = \dfrac{4\pi^2}{\alpha}$

$$\Delta g = \frac{\Delta\alpha}{\alpha} g = 16.3\,\text{cm/s}^2 \approx 20\,\text{cm/s}^2$$

i) z의 오차 구하기:

먼저 $r = \dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{3.10}{0.04108} = 75.46\ \text{cm}^2$의 오차를 구한다.

$$\Delta r = \left(\frac{\Delta\alpha}{\alpha} + \frac{\Delta\beta}{\beta}\right) r = 2.5\,\text{cm}^2$$

r의 오차가 가장 크게 기여하므로($\frac{\Delta r}{r} \sim 0.03$인 데 비해 $\frac{\Delta L}{L}$, $\frac{\Delta x_{cm}}{x_{cm}} \sim 0.005$), 분석을 간단히 하려고 r에서 오는 오차 전파만 어림하며, 최솟값과 최댓값을 식 (4)에 넣는다.

이제 $r_{\max} = r + \Delta r = 75.46 + 2.5 = 77.96$을 쓴다. 해당 이차 방정식은 $(z-17.8)^2 + 1.743(z-17.8) - 77.96 = 0$이며, 그 해는 $(z-17.8)_{\max} = 7.55$ cm이다.

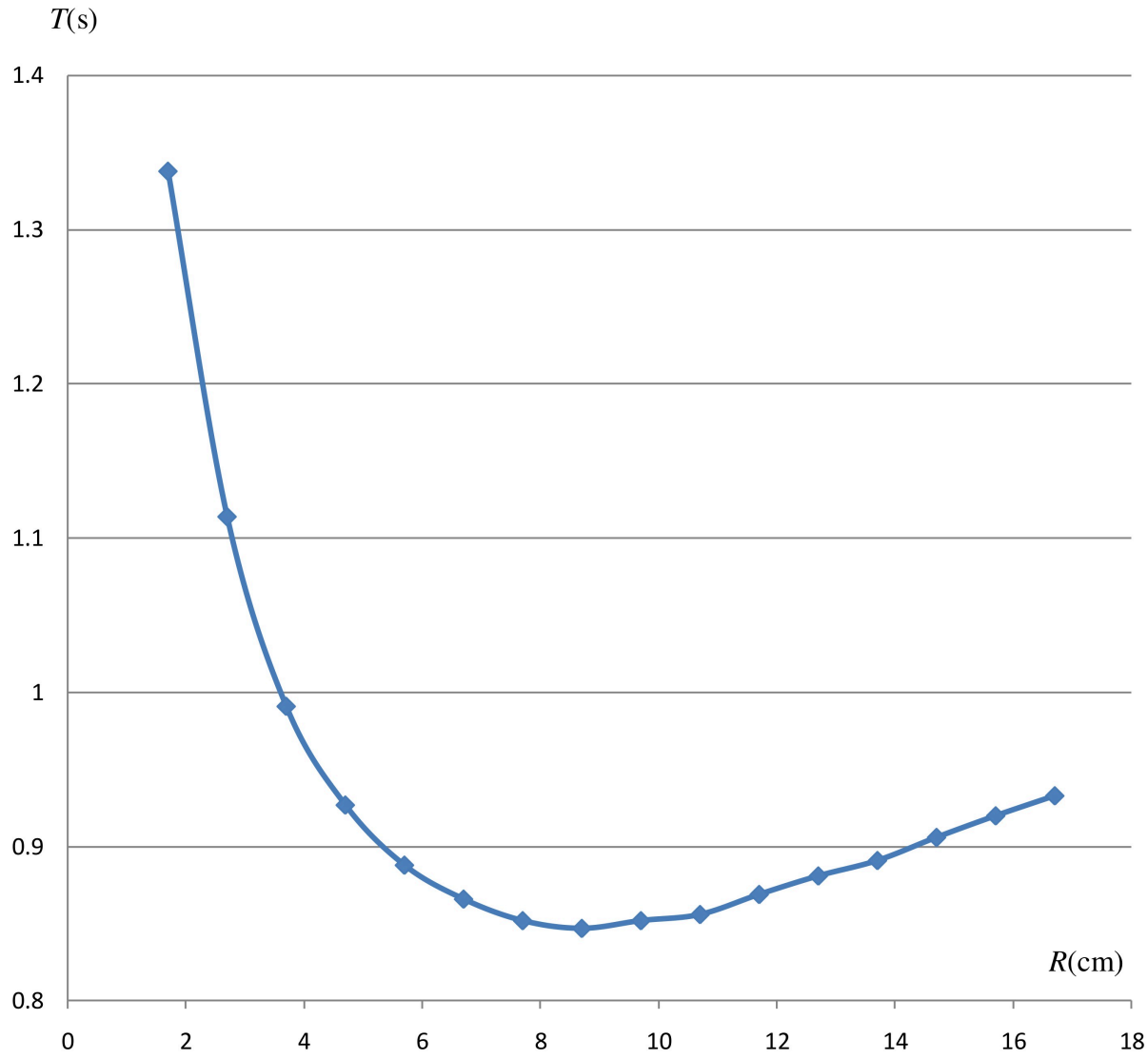
$r_{\min} = r - \Delta r = 75.46 - 2.5 = 72.96$을 쓰면 해당 이차 방정식은
$(z - 17.8)^2 + 3.529(z - 17.8) - 72.96 = 0$
그 해는 $(z - 17.8)_{\min} = 6.96$ cm
따라서 $\Delta(z - 17.8) = \dfrac{7.55 - 6.96}{2} = 0.3$ cm

$\dfrac{\Delta(z - 17.8)}{z - 17.8} \sim 0.04$임에 주의하라. 그러므로 $\Delta L, \Delta x_{cm}$에 따른 오차 전파는 여전히 무시한다.
오차 Δz는 $\Delta z \approx \Delta(z - 17.8) = 0.3$ cm로 어림할 수 있다.

ii) $\dfrac{M}{m}$의 오차 구하기:
$\dfrac{M}{m} = \dfrac{z - 17.8}{2.8}$임을 안다.
$\Delta\left(\dfrac{M}{m}\right) = \dfrac{\Delta(z - 17.8)}{2.8} = 0.11$

방법 (b)

T-R 그래프로 계산:



최솟값 위치를 쓰면: $T = T_{\min}$에서 $I_{CM} = (M+m)R_{\min}^2$이고 $g = \dfrac{8\pi^2 R_{\min}}{T_{\min}^2}$

그래프로부터: $R_{\min} = 8.9 \pm 0.2$ cm, $T_{\min} = 0.846 \pm 0.005$ s

$$\therefore \quad g = 982 \pm 40 \text{ cm/s}^2$$

$$I_{CM} = (M+m)(8.9)^2 = (79.21)(M+m) \qquad \text{..... (16)}$$

식 (14), (15), (16)으로부터

$$\begin{aligned}(79.21)(M+m) &= 75.0M + 7.84M + m(z-17.8)^2 \\ -3.63M + 79.21m &= m(z-17.8)^2 \\ (x-17.8)^2 + \frac{3.63}{2.8}(x-17.8) - 79.21 &= 0 \\ (z-17.8) &= 8.28\end{aligned}$$

그리고 $z = 26.08 = 26.1 \pm 0.7\ \text{cm}$

$$\frac{M}{m} = 2.95 = 3.0 \pm 0.3$$

<u>오차 어림</u>

i) g의 오차 구하기:

최솟값 위치 $g = \dfrac{8\pi^2 R_{\min}}{T_{\min}^2}$를 쓰면

$$\Delta g = \left(\frac{\Delta R_{\min}}{R_{\min}} + 2\frac{\Delta T_{\min}}{T_{\min}}\right) g = 34 \approx 30\ \text{cm/s}^2$$

ii) z의 오차 구하기:

먼저 $r = R_{\min}^2 = 79.21\ \text{cm}^2$의 오차를 구한다.

$$\Delta r = 2R_{\min}\Delta R_{\min} = 3.56\ \text{cm}^2$$

이 r는 파트 1의 r와 같다. 그러므로 같은 오차 분석을 따르면 된다.

그 결과

$$z = 26.08 \approx 26.1\ \text{cm}$$
$$\Delta z = 0.8\ \text{cm}$$

iii) $\dfrac{M}{m}$의 오차 구하기:

파트 I과 같은 분석을 따르면

$$\frac{M}{m} = 2.96\,;\ \Delta\left(\frac{M}{m}\right) = 0.15$$

주: 이 최솟점 곡선 방법은 보통의 직선 그래프 방법만큼 정확하지 않다.