문제 E1. 물의 투자율 *(10점)*

파트 A. 수면의 정성적 모양 *(1점)*

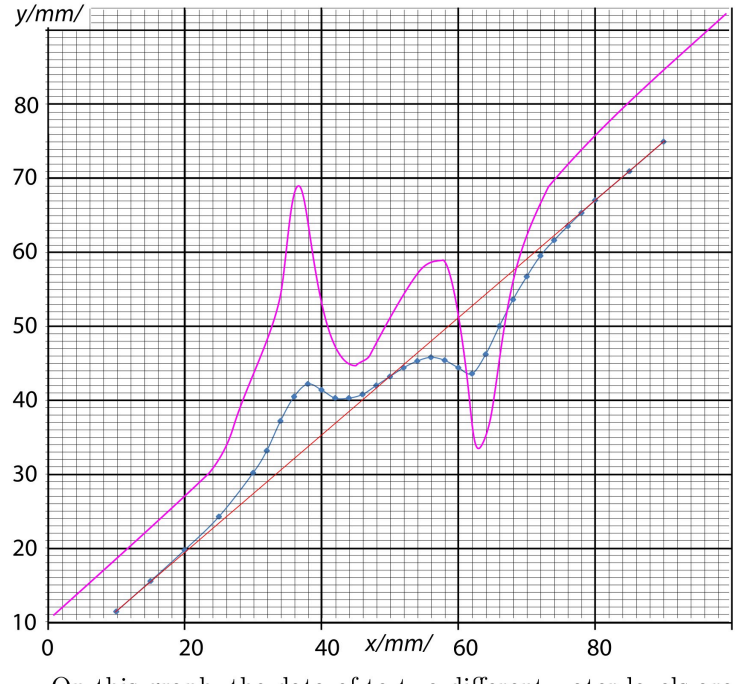
수면의 반사(특히 곧은 선, 예컨대 종이 모서리의 반사)를 관찰하면 수면의 모양이 극솟값을 하나 가지고 바닥이 비교적 평평하다는 것을 쉽게 알 수 있다. 즉 올바른 답은 "보기 D"이다(보기 B에도 만점을 준다). 이 모양은 물이 자석에서 밀려난다는 뜻이며, 이는 $\mu < 1$을 뜻한다($\mu > 1$인 강자성체는 끌려간다는 것을 떠올리자).

파트 B. 수면의 정확한 모양 *(7점)*

i. (1.6점) 화면 위 빛점의 높이 y를 캘리퍼의 수평 위치 x의 함수로 아래 표에 나타내었다. y의 밀리미터 값은 정수로 반올림해도 된다는 점에 주의하라(이 측정은 가능한 한 높은 정밀도를 목표로 했다).

x (mm)	10	15	20	25	30	32	34	36
y (mm)	11.5	15.6	19.8	24.3	30.2	33.2	37.2	40.5
x (mm)	38	40	42	44	46	48	50	52
y (mm)	42.2	41.4	40.3	40.3	40.8	42	43.2	44.4
x (mm)	54	56	58	60	62	64	66	68
y (mm)	45.3	45.8	45.4	44.4	43.6	46.2	50	53.6
x (mm)	70	72	74	76	78	80	85	90
y (mm)	56.7	59.5	61.6	63.5	65.3	67	70.9	74.9

ii. (0.7점)



이 그래프에는 서로 다른 두 물 높이의 자료를 나타내었다. 파란 곡선은 물 깊이 *약 2 mm*(위 표의 자료), 보라 곡선은 1 mm에 해당한다.

iii. (0.5점) 수면이 평평하다면 y는 x에 선형으로 의존하며, 각 α_0의 탄젠트는 $\tan\alpha_0 = \frac{\Delta y}{\Delta x}$로 주어진다. 여기서 Δx는 포인터의 수평 변위, Δy는 그에 따른 빛점 높이의 변위이다. 포인터가 양 끝에 있을 때 빛살은 자석에서 아주 먼 곳의 수면에 닿는데, 거기서는 수면이 사실상 흐트러지지 않는다. 그래프의 해당 점들을 이으면 평평한 수면에 해당하는 직선, 즉 빨간 선을 얻는다. 이 두 끝 자료점으로 각도 쉽게 계산할 수 있다. $\alpha_0 = \arctan\frac{74.9-11.5}{90-10} \approx 38°$.

iv. (1.4점) 계산을 빨리 하려면 (주어진 공식에 나오는) $y - y_0 - (x - x_0)\tan\alpha_0$를 앞 그래프에서 빨간 선과 파란 선 사이의 거리로 읽으면 된다. 빨간 선은 $y_r = y_0 + (x - x_0)\tan\alpha_0$로 주어진다. $\frac{1}{2}\cos^2\alpha_0 \approx 0.31$도 미리 계산해 둘 수 있다. 계산 결과는 다음 표와 같다($z = \tan\beta \cdot 10^5$. 앞에서 말했듯이 경연 중에는 유효 숫자 두 자리의 더 낮은 정밀도면 충분하다).

x (mm)	10	15	20	25	30	32	34	36
z	0	10	27	66	204	303	473	591
x (mm)	38	40	42	44	46	48	50	52
z	597	428	239	128	53	26	0	-26
x (mm)	54	56	58	60	62	64	66	68
z	-72	-145	-278	-449	-606	-536	-388	-254
x (mm)	70	72	74	76	78	80	85	90
z	-154	-74	-40	-20	-6	2	-2	0

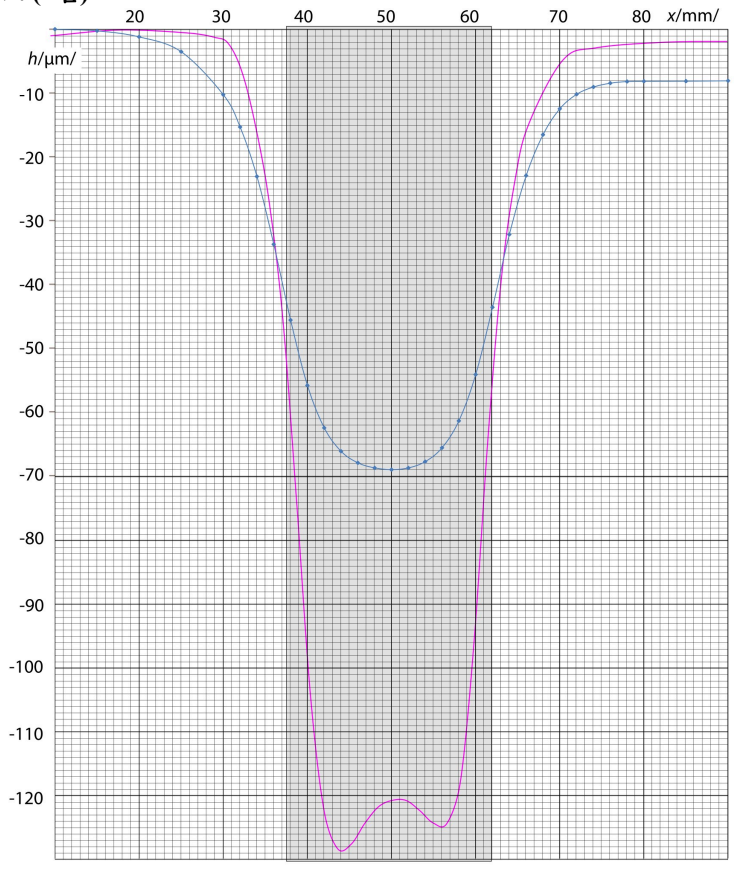
v. (1.6점) 물 높이는 적분 $h = \int \tan\beta\, dx$로 얻을 수 있다. 따라서 앞 행의 높이에 수평 변위 $x_{i+1} - x_i$와 평균 기울기 $\frac{1}{2}(\tan\beta_{i+1} + \tan\beta_i)$의 곱을 더해 가며 행마다 물 높이를 계산한다.

x (mm)	10	15	20	25	30	32	34	36
$-h$ (μm)	0	0	1	4	10	15	23	34
x (mm)	38	40	42	44	46	48	50	52
$-h$ (μm)	46	56	63	66	68	69	69	69
x (mm)	54	56	58	60	62	64	66	68
$-h$ (μm)	68	66	61	54	44	32	23	17
x (mm)	70	72	74	76	78	80	85	90
$-h$ (μm)	12	10	9	8	8	8	8	8

표 끝의 물 높이도 0이어야 한다는 점에 주의하라(이곳도 흐트러지지 않은 영역에 해당한다). 0이 아닌 결과는 측정의 불확도로 설명된다. h에서 선형 추세 $8\,\mu\text{m} \cdot \frac{x - 10\text{ mm}}{80\text{ mm}}$를 빼면 결과를 개선할 수 있다.

자석 위 물 높이가 1 mm이면, 자석 축에서 수면은 흐트러지지 않은 높이보다 약 120 μm 내려간다.

vi. (1점)



앞 그림과 마찬가지로 파란 곡선은 물 깊이 약 2 mm(위 표의 자료), 보라 곡선은 1 mm에 해당한다.

자석의 위치는 캘리퍼로 재어 찾을 수 있다(레이저 빛살이 자석의 가장자리에 닿는 위치들을 찾아 그 사이 거리를 구하면 약 24 mm가 된다). 또 대칭성을 써도 된다. 자석은 수면 높이 곡선에 대해 대칭으로 놓여 있다.

파트 C. 투자율 *(2점)*

수면은 등퍼텐셜 모양을 이룬다. 물의 단위 부피에 대해, 자기 상호 작용에 따른 퍼텐셜 에너지는 $\frac{B^2}{2\mu_0}(\mu^{-1} - 1) \approx B^2 \frac{1-\mu}{2\mu_0}$이고, 지구 중력에 따른 퍼텐셜 에너지는 $\rho g h$이다. 수면에서 이 둘의 합은 일정해야 한다. 흐트러지지 않은 수면의 한 점에서 이 식은 0이므로 $B^2 \frac{\mu-1}{2\mu_0} + \rho g h = 0$, 따라서 $\mu - 1 = 2\mu_0 \rho g h / B^2$이다. 여기서 $h = 120\,\mu\text{m}$은 자석 축에서 수면의 깊이이다. 앞 과제의 끝에서 설명한 누적 오차를 보정했고, h를 자석 축에서의 깊이(121 μm)와 그래프 오른쪽의 반깊이(1 μm)의 차로 얻었다는 점에 주의하라. 수치를 넣으면 $\mu - 1 = -1.2 \times 10^{-5}$을 얻는다.