이 문서의 그래프와 표에서는 소수점 대신 소수 쉼표를 쓴다

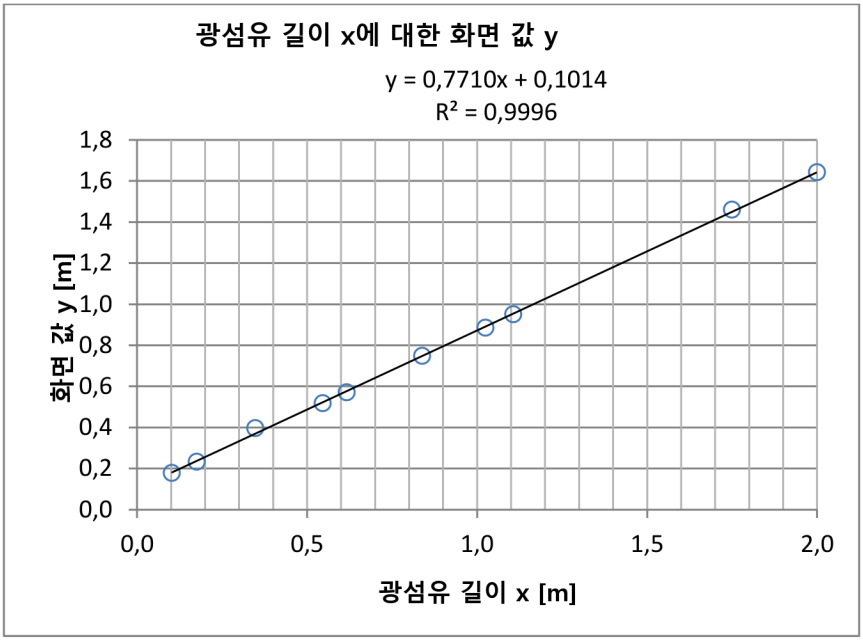
1.1	LDM으로 탁자 윗면에서 바닥까지의 거리 H를 측정하시오. 불확도 ΔH를 적으시오. 이 측정을 어떻게 하는지 스케치로 보이시오.	0.4

$H = 907\ \text{mm} \pm 2\ \text{mm}$. 1.3b에 해당하는 그림의 스케치를 보라. LDM을 뒤쪽 모드로 두고 높이를 어떻게 재는지 드러나야 한다.

1.2a	x와 y의 대응하는 값들을 측정하시오. 측정값으로 표를 만드시오. y를 x의 함수로 나타낸 그래프를 그리시오.	1.8

여기서는 2 m 케이블을 썼지만 1 m면 충분하다. 0 m에서 1 m 사이에 고르게 퍼진 길이 8개쯤이면 된다.

x	*y*
m	m
0,103	0,177
0,176	0,232
0,348	0,396
0,546	0,517
0,617	0,570
0,839	0,748
1,025	0,885
1,107	0,950
1,750	1,459
2,000	1,642



1.2b	그래프를 써서 광섬유 케이블의 중심핵을 이루는 물질의 굴절률 n_{co}를 구하시오. 광섬유 케이블 중심핵 속 빛의 속력 v_{co}를 계산하시오.	1.2

굴절률은 직선 그래프 기울기의 두 배이다. $n_{co} = 2 \cdot 0.7710 \approx 1.54$.
그 까닭은 빛 펄스의 이동 시간이 다음과 같기 때문이다.

$$t = \frac{x}{v_{co}} = \frac{x n_{co}}{c}$$

따라서 화면에는 $y = \frac{1}{2}ct + k \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}n_{co}x + k$가 나타난다.

케이블 중심핵 속 빛의 속력은 $v_{co} = \frac{c}{n_{co}} = \frac{2{,}998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \cdot 0.7710} \approx 1.95 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ 이다.

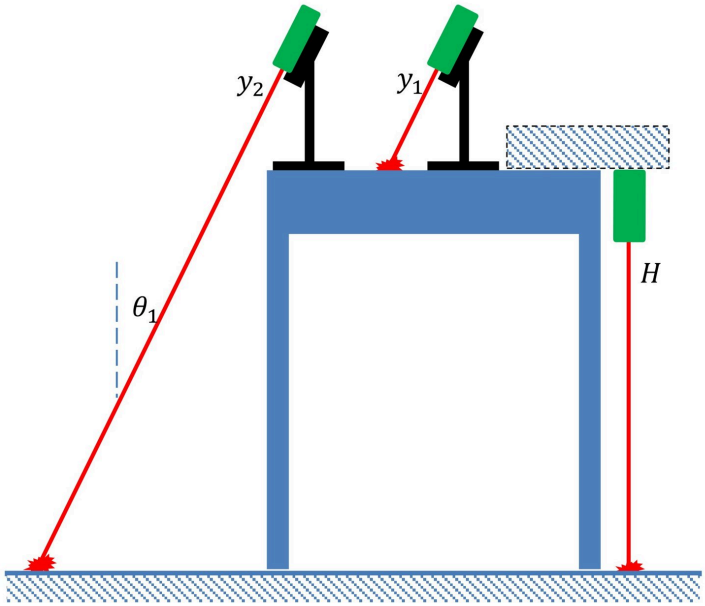
1.3a	레이저 빛살이 탁자 윗면에 닿는 레이저 점까지의 거리 y_1을 LDM으로 측정하시오. 그다음 레이저 빛살이 바닥에 닿을 때까지 LDM을 단 상자를 수평으로 옮기시오. 레이저 빛살이 바닥에 닿는 레이저 점까지의 거리 y_2를 측정하시오. 불확도를 밝히시오.	0.2

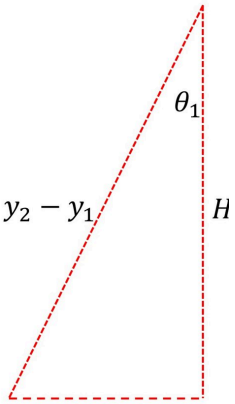
$y_1 = 312\ \text{mm} \pm 2\ \text{mm}$, $y_2 = 1273\ \text{mm} \pm 2\ \text{mm}$

1.3b	이 측정값 y_1, y_2와 (문제 1.1의) H만 써서 각 θ_1을 계산하시오. 불확도 $\Delta\theta_1$을 구하시오.	0.4

$$\theta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{H}{y_2 - y_1}\right)$$
$$= \cos^{-1}\left(\frac{907\ \text{mm}}{961\ \text{mm}}\right)$$
$$= 19.30^\circ$$

(그림 참조)





레이저 점의 크기 때문에 어떤 삼각형의 수평 부분을 재는 것은 매우 부정확하다. 그런 방법에는 점수를 주지 않는다. y_1, y_2, H의 불확도로 $\delta = 2\ \text{mm}$를 쓰면 θ_1의 불확도는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\Delta \cos\theta_1 = \Delta\left(\frac{H}{y_2 - y_1}\right)$$

간단한 미분을 쓰면

$$\tan\theta_1 \cdot \Delta\theta_1 = \frac{\delta}{H} + \frac{2\delta}{y_2 - y_1}$$

$$\Delta\theta_1 = \frac{\left(\frac{\delta}{H} + \frac{2\delta}{y_2 - y_1}\right)}{\tan\theta_1} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{\left(\frac{2}{907} + \frac{4}{961}\right)}{\tan 19{,}30^\circ} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 1^\circ$$

또는 최솟값/최댓값 방법을 쓰면

$$\Delta\theta_1 = \theta_{1\,\max} - \theta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{H_{\min}}{y_{2\,\max} - y_{1\,\min}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{905\ \text{mm}}{965\ \text{mm}}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{907\ \text{mm}}{961\ \text{mm}}\right) = 1.0^\circ$$

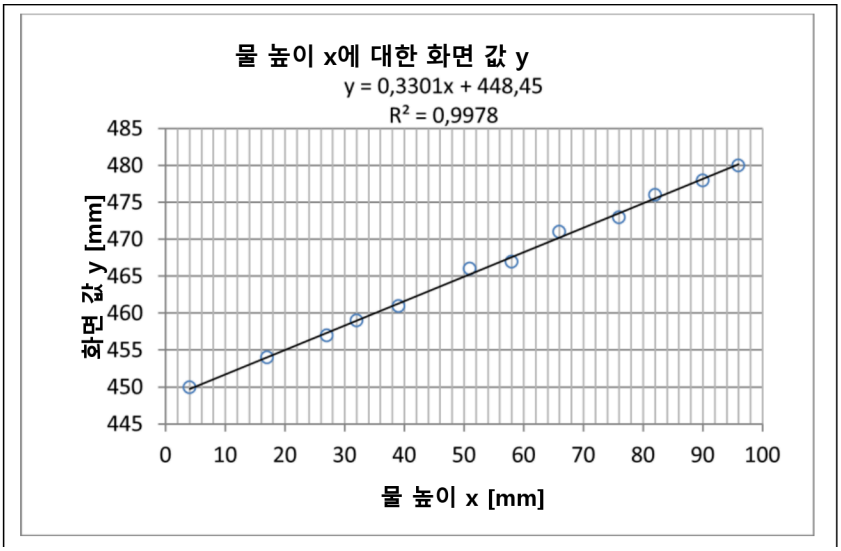
또는 $\Delta(y_2 - y_1) = \sqrt{(\Delta y_1)^2 + (\Delta y_2)^2} = \sqrt{2}\,\delta$로 $\Delta\theta_1$을 계산한 다음

$$\tan\theta_1 \cdot \Delta\theta_1 = \sqrt{\left(\frac{\delta}{H}\right)^2 + \frac{2\delta^2}{(y_2 - y_1)^2}}$$

$\delta = 1\ \text{mm}$와 $\Delta\theta_1 = 0.5^\circ$도 인정한다.

1.4a	x와 y의 대응하는 값들을 측정하시오. 측정값으로 표를 만드시오. y를 x의 함수로 나타낸 그래프를 그리시오.	1.6

x [mm]	y [mm]
4	450
17	454
27	457
32	459
39	461
51	466
58	467
66	471
76	473
82	476
90	478
96	480



1.4b	그래프가 어떤 모양일지 식으로 이론적으로 설명하시오.	1.2

빛이 수면에 이르는 데 걸리는 시간은

$$t_1 = \frac{(h-x)/\cos\theta_1}{c}$$

수면에서 바닥까지 빛이 쓰는 시간은

$$t_2 = \frac{x/\cos\theta_2}{v}$$

갔다가 돌아오는 전체 이동 시간은

$$t = 2t_1 + 2t_2 = 2\frac{(h-x)/\cos\theta_1}{c} + 2\frac{x/\cos\theta_2}{v} = 2\frac{h-x}{c\cos\theta_1} + 2\frac{nx}{c\cos\theta_2}$$

따라서 화면에는 다음이 나타난다(간단히 $n = n_{\mathrm{w}}$로 쓴다).

$$y = \tfrac{1}{2}ct + k = \left(\frac{n}{\cos\theta_2} - \frac{1}{\cos\theta_1}\right)x + \frac{h}{\cos\theta_1} + k$$

이는 x의 일차 함수이다. 그다음 삼각 함수 항등식과 스넬 법칙을 쓰면

$$\cos\theta_2 = \sqrt{1-\sin^2\theta_2} = \sqrt{1-\frac{\sin^2\theta_1}{n^2}}.$$

이로부터 기울기 α는 다음과 같다.

$$\alpha = \frac{n}{\sqrt{1-\dfrac{\sin^2\theta_1}{n^2}}} - \frac{1}{\cos\theta_1} = \frac{n^2}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta_1}} - \frac{1}{\cos\theta_1}$$

1.4c	그래프를 써서 물의 굴절률 n_{w}를 구하시오.	1.2

그래프에서 기울기 α를 알면 이 방정식을 풀어 굴절률 n을 구한다.
실용적인 매개변수를 도입하면

$$p = \alpha + \frac{1}{\cos\theta_1}$$

위 방정식은 다음이 된다.

$$p = \frac{n_{\mathrm{w}}^2}{\sqrt{n_{\mathrm{w}}^2-\sin^2\theta_1}} \;\Leftrightarrow\; n_{\mathrm{w}}^4 - p^2 n_{\mathrm{w}}^2 + p^2\sin^2\theta_1 = 0$$

그 해는

$$n_{\mathrm{w}} = \sqrt{\frac{p^2 \pm \sqrt{p^4 - 4p^2\sin^2\theta_1}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}p\sqrt{1 \pm \sqrt{1-\left(\frac{2\sin\theta_1}{p}\right)^2}}$$

그래프에서 $\alpha = 0.3301$을 얻고, 이로부터 $p = 1.388356$, 따라서

$$n_{\mathrm{w}} = 1.34676 \approx 1.347.$$

$n_{\mathrm{w}} < 1$인 해는 모두 버린다.

n_{w}를 구하는 다른, 더 멋진 방법은 다음 식에 스넬 법칙을 쓰는 것이다.

$$\alpha = \frac{n_{\mathrm{w}}}{\cos\theta_2} - \frac{1}{\cos\theta_1} = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2\cos\theta_2} - \frac{1}{\cos\theta_1} = \frac{2\sin\theta_1}{\sin 2\theta_2} - \frac{1}{\cos\theta_1}$$

이로부터

$$\sin 2\theta_2 = \frac{2\sin\theta_1}{\alpha + \dfrac{1}{\cos\theta_1}}$$

여기서 θ_2를 계산할 수 있고, 따라서 $n_{\mathrm{w}} = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$이다. 이 방법도 그래프와 각 θ_1만 쓰며, θ_2의 측정은 필요 없다.

정상 조건에서 순수한 물의 굴절률 표값은 파장 $\lambda = 635\ \mathrm{nm}$에서 $n_{\mathrm{w}} = 1.331$이다.

다음 근사를 쓸 수 있다. 작은 각에서는

$$n_{\mathrm{w}} \approx \frac{\sqrt{2}}{2}p\sqrt{1 + 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2\sin\theta_1}{p}\right)^2} \approx p\sqrt{1 - \left(\frac{\sin\theta_1}{p}\right)^2} \approx p\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\theta_1}{p}\right)^2\right)$$

아주 작은 각에서는 다음을 얻는다.

$$n_{\mathrm{w}} \approx p \approx \alpha + 1$$

아주 작은 $\theta_1 \approx 0$으로 실험하면 훨씬 간단하지만 권하지 않는다. 수면에서의 반사가 바닥에서 오는 신호를 망치기 때문이다.