뛰는 알갱이 – 상전이와 불안정성의 모형 (10점)

이 문제를 시작하기 전에 별도의 봉투에 든 일반 지침을 읽으시오.

서론

상전이는 일상생활에서 잘 알려져 있다. 예를 들어 물은 고체, 액체, 기체 같은 서로 다른 상태를 가진다. 이런 상태들은 상전이로 갈라지며, 상전이에서는 물질 안 분자들의 집단적 행동이 바뀐다. 그런 상전이는 언제나 상태가 바뀌는 전이 온도와 관련되어 있는데, 위의 예에서는 물의 어는점과 끓는점이 그것이다.

그런데 상전이는 훨씬 더 널리 퍼져 있어서 자석이나 초전도체 같은 다른 계에서도 일어난다. 이런 계에서는 전이 온도 아래에서 거시적인 상태가 각각 상자성체에서 강자성체로, 그리고 보통 도체에서 초전도체로 바뀐다.

이 모든 전이는 이른바 *질서 변수*를 도입하면 하나의 공통된 틀에서 기술할 수 있다. 예를 들어 자성에서는 질서 변수가 원자 자기 모멘트의 정렬, 즉 거시적인 자기화와 관련된다.

이른바 연속 상전이에서는 질서 변수가 임계 온도보다 위에서는 언제나 0이고, 그 아래에서는 아래 그림 1의 자석 모식도처럼 연속적으로 자라난다. 연속 상전이의 전이 온도를 임계 온도라고 한다. 이 그림에는 미시적인 질서와 무질서의 모식도도 들어 있다. 자석의 경우 강자성 상태에서는 각각의 자기 모멘트가 정렬하여 거시적인 자기화를 만들지만, 상자성 상에서는 무작위로 놓여 거시적인 자기화가 0이 된다.

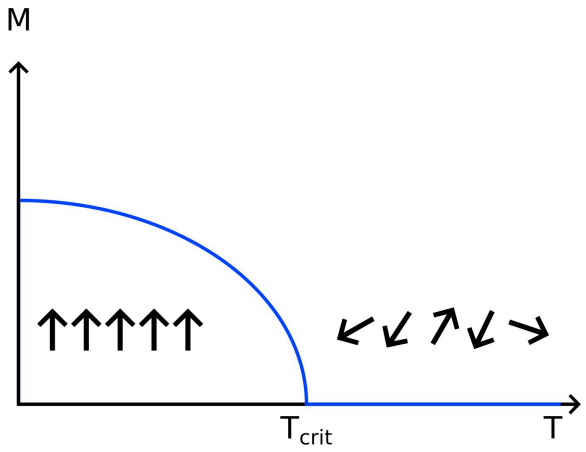


그림 1: 상전이에서 질서 변수 M 의 온도 의존성을 나타낸 모식도. 임계 온도 T_{crit} 아래에서는 질서 변수가 자라나 0이 아니지만, T_{crit} 보다 높은 온도에서는 0이다.

연속 상전이에서는 일반적으로 전이 근처의 질서 변수가 거듭제곱 법칙을 따름이 알려져 있다. 예를 들어 자성에서 임계 온도 T_{crit} 아래의 자기화 M 은 다음과 같이 주어진다:

$$M \begin{cases} \sim (T_{\text{crit}} - T)^b, & T < T_{\text{crit}} \\ = 0, & T > T_{\text{crit}} \end{cases} \tag{1}$$

여기서 T 는 온도이다. 더욱 놀라운 것은 이 행동이 보편적이라는 점이다. 이 거듭제곱 법칙의 지수는 여러 가지 서로 다른 상전이에서 모두 같다.

과제

연속 상전이의 몇 가지 특징을 살펴볼 수 있는 간단한 예를 다룬다. 불안정성이 어떻게 입자의 집단적 행동을 낳고 따라서 상전이로 이어지는지, 그리고 거시적인 변화가 입자의 들뜸에 어떻게 의존하는지를 알아본다.

흔한 상전이에서는 이 들뜸이 보통 온도로 조절된다. 우리 예에서 들뜸은 스피커에 의해 가속된 입자의 운동 에너지로 이루어진다. 여기서 살펴볼 상전이에 해당하는 거시적인 변화는, 작은 벽으로 나뉜 원통의 한쪽 절반으로 알갱이가 몰리는 것이다.

입자가 원통의 한쪽 절반으로 몰린 상태에서 진폭을 키우면 결국 입자가 두 절반에 고르게 퍼짐을 알게 될 것이다. 이는 임계 온도를 넘어 가열한 것에 해당한다.

목표는 여기서 다루는 모형 상전이의 임계 지수를 구하는 것이다.

재료 목록

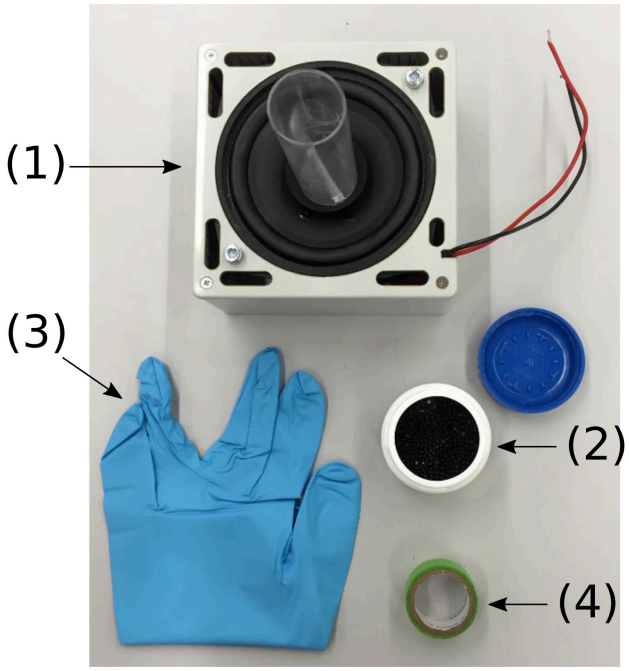


그림 2: 이 실험에 쓰는 추가 장비.

1. 위에 플라스틱 원통이 달린 스피커 조립품
2. 양귀비 씨앗 약 100개(플라스틱 통에 들어 있음)
3. 장갑 한 짝
4. 접착 테이프

중요한 주의 사항

- 스피커 위에 달린 플라스틱 원통에 옆 방향으로 지나친 힘을 주지 말 것. 스피커 막이 찢어지거나 플라스틱 원통이 떨어져 나가도 교체해 주지 않음에 유의하여라.
- 배터리가 쓸데없이 닳지 않도록 쓰지 않을 때는 스피커 조립품을 꺼 두어라.
- 이 실험에서는 신호 발생기 옆면에 있는 스피커 단자로 $4\,\mathrm{Hz}$ 톱니파 신호가 나온다.
- 톱니파 신호의 진폭은 *speaker amplitude* (4)라고 표시된 오른쪽 전위차계로 조절할 수 있다. 신호 진폭에 비례하는 직류 전압이 (*GND* 소켓 (7)에 대한) *speaker amplitude* 감시 소켓 (6)으로 나온다. 번호는 일반 지침에 실린 사진(그림 2)을 가리킨다.
- 스피커 막은 약하다. 수직으로든 옆으로든 어떤 방법으로도 쓸데없는 압력을 주지 않도록 하여라.

A 부분. 임계 들뜸 진폭 (3.3점)

이 문제의 실제 과제를 시작하기 전에, 스피커를 신호 발생기 옆면의 단자에 연결하여라(극성을 맞출 것). 스피커에 달린 원통에 양귀비 씨앗을 (예를 들어 50 개쯤) 넣고, 제공된 장갑에서 잘라 낸 조각으로 원통 위를 막아 씨앗이 원통 안에 있도록 하여라. 토글 스위치로 들뜸을 켜고, 제공된 드라이버로 *speaker amplitude* (4)라고 표시된 오른쪽 전위차계를 돌려 진폭을 조절하여라. 여러 진폭을 시험해 보며 알갱이가 분리되는 모습을 관찰하여라.

첫 번째 과제는 이 전이의 임계 들뜸 진폭을 구하는 것이다. 이를 위해 두 칸에 있는 알갱이의 개수 N_1 과 N_2 를 표시된 진폭 A_D 의 함수로 세어야 한다(칸의 이름은 $N_1 \leq N_2$ 가 되도록 고른다). A_D 는 *speaker amplitude* 소켓 (6)에서 잰 전압이다. 이 전압은 스피커를 구동하는 톱니파의 진폭에 비례한다. 전압마다 적어도 5번 측정하여라.

힌트:

- 연구하는 입자에 언제나 운동이 있도록, *speaker amplitude* 전압이 $0.7\,\mathrm{V}$ 를 넘는 진폭만 살펴보아라. 알갱이를 세지 않고 전압을 천천히 바꾸며 계의 행동을 지켜보는 것으로 시작하여라. 정전기 때문에 몇몇 알갱이가 바닥에 붙을 수 있다. 이런 알갱이는 세지 말 것.

A.1	여러 진폭 A_D 에 대해 통의 각 절반에 있는 입자 수 N_1 과 N_2 의 측정값을 **표 A.1** 에 기록하여라.	1.2pt
A.2	N_1 과 N_2 측정값의 표준 편차를 계산하여 그 결과를 **표 A.1** 에 적어라. 표시된 진폭 A_D 의 함수로 N_1 과 N_2 를 불확도와 함께 **그래프 A.2** 에 그려라.	1.1pt
A.3	정상 상태에 이를 때까지 기다린 뒤, 그래프를 바탕으로 $N_1 = N_2$ 가 되는 임계 표시 진폭 $A_{D,\mathrm{crit}}$ 를 구하여라.	1pt

B 부분. 눈금 맞추기 (3.2점)

표시된 진폭 A_D 는 스피커에 걸린 전압에 해당한다. 그러나 물리적으로 흥미로운 양은 스피커 진동의 최대 변위 A 이다. 이것이 알갱이가 얼마나 세게 들뜨는지와 관련되기 때문이다. 따라서 표시된 진폭의 눈금을 맞추어야 한다. 이를 위해 제공된 재료와 도구는 무엇이든 써도 된다.

B.1	들뜸 진폭, 즉 한 진동 주기 동안 스피커의 최대 이동 거리 A(단위 mm)를 재는 데 쓴 장치를 그려라.	0.5pt
B.2	알맞은 개수의 점에 대해 진폭 A 를 mm 단위로 구하여라. 즉 표시된 진폭 A_D 의 함수로 진폭 A 를 **표 B.2** 에 기록하고 측정의 불확도를 나타내어라.	0.8pt
B.3	불확도를 포함하여 자료를 **그래프 B.3** 에 그려라.	1.0pt

B.4	알맞은 맞춤을 써서 얻어진 곡선의 변수를 구하고, 눈금 함수 $A(A_D)$ 를 구하여라.	0.8pt

B.5	양귀비 씨앗의 임계 들뜸 진폭 A_{crit} 를 구하여라.	0.1pt

C 부분. 임계 지수 (3.5점)

우리 계에서 온도는 들뜸의 입력 운동 에너지에 해당한다. 이 에너지는 스피커 속력의 제곱에 비례한다. 즉 $v^2 = A^2 f^2$ 이며 여기서 f 는 진동의 진동수이다. 이제 이 의존성을 시험하여 질서 변수의 행동을 지배하는 거듭제곱 법칙의 지수 b 를 구한다(식 1 참고).

C.1	불균형 $\left\lvert\frac{N_1-N_2}{N_1+N_2}\right\rvert$ 은 우리 계의 질서 변수로 알맞은 후보이다. 임계 진폭보다 위에서는 0 이고 낮은 들뜸에서는 1 이기 때문이다. 이 질서 변수를 진폭 A 의 함수로 구하여라. 결과를 **표 C.1** 에 기록하여라.	1.1pt

C.2	불균형 $\left\lvert\frac{N_1-N_2}{N_1+N_2}\right\rvert$ 을 $\left\lvert A_{\mathrm{crit}}^2 - A^2\right\rvert$ 의 함수로 **그래프 C.2** 에 그려라. 이때 두 축은 모두 로그 눈금이다(양쪽 로그 그래프). 계산에는 **표 C.1** 을 쓸 수 있다. 그래프 위의 점들이 선형 관계를 따르지 않는 것처럼 보일 수 있지만, 임계 지수 공식에 맞추기 위해 그래도 선형 회귀를 해야 한다.	1pt

C.3	지수 b 를 구하고 오차를 어림하여라.	1.4pt