IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q2-1

Korean (Korea (Republic of))

고분자 실의 점탄성 (10점)

실험을 시작하기 전에 실에 힘이 가해져서는 안 됨에 유의하라!

저울을 지금 바로 켜라(예열 시간은 약 10분이다). 저울의 설정을 바꾸지 마라.

서론

고체 물질에 외력이 가해지면 변형된다. 가해진 힘이 작으면 이 변형은 힘에 비례하며(훅 법칙) 되돌릴 수 있어서, 힘이 없어지면 물질이 처음 모양을 회복한다.

고체에 대해서는 응력과 변형률의 개념으로 기술하는 것이 더 편하다. 응력 σ 는 단위 넓이당 힘, 즉 힘 F 를 그것이 작용하는 넓이 S 로 나눈 것으로 정의하고, 변형률 ϵ 은 길이의 상대적 변화이다:

$$\sigma = \frac{F}{S} \qquad \text{그리고} \qquad \epsilon = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} \ , \tag{1}$$

여기서 ℓ 과 ℓ_0 은 각각 마지막 길이와 처음 길이이다. 단순한 탄성 거동에서 응력은 단순히 변형률에 비례하며($\sigma = E\epsilon$, 훅 법칙) 비례상수 E 를 *영률*이라 한다.

훅 법칙으로 나타낸 탄성 거동은 변형률이 충분히 작을 때만 유효한 근사이다. 변형률이 더 커지면 변화가 점점 되돌릴 수 없게 되어 소성 영역에 이르고, 그 경우 분자 운동이 구속에서 풀리기 시작하여 점성 유체의 운동을 닮는다. 즉 탄성 한계를 넘어 늘이거나 누르면 물질은 점근적으로 유체가 된다.

점탄성 물질

어떤 물질들은 탄성 고체의 면과 점성 유체를 닮은 특징을 함께 가지며, 그래서 *점탄성*이라 한다.

점탄성 물질을 다룰 때에는 순수한 탄성 거동과 추가적인 점성 거동을 따로 생각하는 것이 합리적이다. 따라서 주어진 변형률 ϵ 을 만드는 데 필요한 전체 응력 σ 는 순수 탄성 항 $\sigma_0 = E_0\epsilon_0$ 과 점탄성 항 σ_1 의 합이 된다:

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \tag{2}$$

두 응력 항은 같은 변형률에 대응한다고 가정한다($\epsilon = \epsilon_0 = \epsilon_1$). 그러나 점탄성 항에 대응하는 변형률 ϵ_1 은 보통 순수 탄성 변형률 $\epsilon_1^{\mathrm{e}} = \sigma_1/E_1$ 과 순수 점성 변형률 ϵ_1^{v} 의 합으로 모형화한다(둘 다 같은 응력 $\sigma_1 = \sigma_1^{\mathrm{e}} = \sigma_1^{\mathrm{v}}$ 를 받는다):

$$\epsilon_1 = \epsilon_1^{\mathrm{e}} + \epsilon_1^{\mathrm{v}} \tag{3}$$

IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q2-2

Korean (Korea (Republic of))

순수한 점성 과정에서는 응력과 변형률의 시간 미분 사이에 (점성 유체에서 발견되는 것과 비슷하게) 선형 관계가 성립한다고 본다,

$$\sigma_1 = \eta_1 \frac{\mathrm{d}\epsilon_1^{\mathrm{v}}}{\mathrm{d}t},$$

여기서 η_1 은 점성 계수이다.

이 현상론적 모형이 이른바 선형 점탄성의 *표준 선형 고체 모형*이며, 그림 1에 그렸다. 여기서 용수철은 순수한 탄성 성분을, 통은 순수한 점성 성분을 나타낸다.

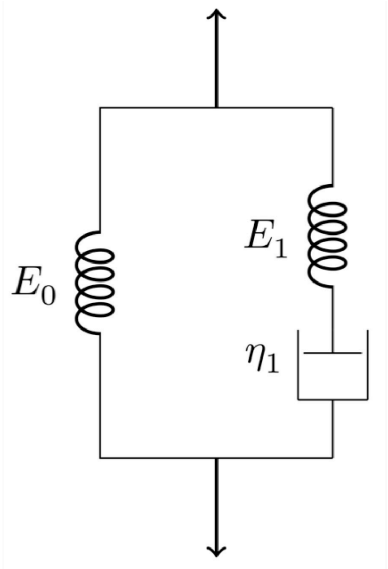


그림 1. 선형 점탄성의 표준 선형 고체 모형.

위 식들로부터 다음 관계를 얻는다:

$$\frac{\mathrm{d}\epsilon_1}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{E_1}\frac{\mathrm{d}\sigma_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\sigma_1}{\eta_1} \tag{4}$$

따라서 점탄성의 표준 선형 모형 안에서 다음을 보일 수 있다

$$\sigma = E_0\epsilon + \tau_1(E_0 + E_1)\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}t} - \tau_1\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} \tag{5}$$

여기서 $\tau_1 = \eta_1/E_1$ 이다. 이 미분 방정식은 변형률과 응력 사이의 관계가 더는 선형이 아니며, 변형률과 응력이 일반적으로 둘 다 시간의 함수임을 보여 준다. $\epsilon(t)$ 를 얻으려면 함수 $\sigma(t)$ 를 지정해야 하고, 그 반대도 마찬가지이다.

실용적으로 흥미로운 두 특수한 경우가 있는데, $\mathrm{d}\epsilon/\mathrm{d}t = 0$ 이거나 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}t = 0$ 인 경우로, 각각 *응력 완화 조건*과 *크리프 조건*이라 흔히 불린다. 응력 완화 조건에서는 갑작스러운 변형률 ϵ 을 물질에 가한 뒤 시간에 대해 일정하게 유지하여 $\mathrm{d}\epsilon/\mathrm{d}t = 0$ 이 되게 한다.

이런 경우 함수 $\sigma(t)$ 는 매질의 점탄성 변수에만 의존하며 식 (5)의 해는

$$\sigma(t) = \epsilon(E_0 + E_1 \mathrm{e}^{-t/\tau_1}) \tag{6}$$

이며, 여기서 $t = 0$ 에서는 탄성 성분만이 응력에 기여하므로 $\sigma(t = 0) = \epsilon(E_0 + E_1)$ 이라고 보았다. 이 해는 점탄성 응력이 시간 상수 τ_1 로 시간에 따라 지수적으로 감소함을 보여 준다.

다중 점탄성 과정

표준 선형 모형은 그림 2에서 제안하듯이 여러 점탄성 과정을 포함하도록 쉽게 확장할 수 있다.

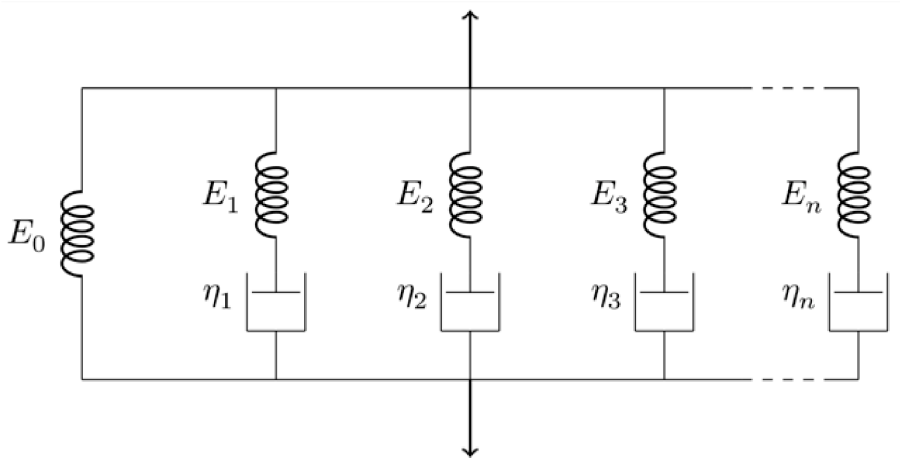


그림 2. 다중 점탄성 과정에 대한 일반화된 모형.

따라서 N 개의 서로 다른 점탄성 성분을 생각하면,

$$\sigma = \sigma_0 + \sum_k \sigma_k, \quad k = 1, 2, \cdots, N \tag{7}$$

여기서 $\frac{\mathrm{d}\epsilon_k}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{E_k}\frac{\mathrm{d}\sigma_k}{\mathrm{d}t} + \frac{\sigma_k}{\eta_k}$ 이고, 위와 마찬가지로 $\frac{\mathrm{d}\epsilon_0}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\epsilon_k}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}t}$ 이다.

따라서 식 (5)의 다음 일반화를 적용할 수 있다:

$$\sigma = E_0\epsilon + \eta_\mathrm{t}\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}t} - \sum_k \tau_k \frac{\mathrm{d}\sigma_k}{\mathrm{d}t}, \quad k = 1, 2, \cdots, N \tag{8}$$

여기서 $\eta_\mathrm{t} = \sum_k \eta_k$ 이고 $\tau_k = \eta_k / E_k$ 이다.

IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q2-4

Korean (Korea (Republic of))

일정한 변형률 조건에서 여러 점탄성 응력은 여전히 시간에 따라 지수적으로 감소해야 하므로, $\sigma_k = A_k \mathrm{e}^{-t/\tau_k}$ 이고 다음 해에 이른다:

$$\sigma(t) = \epsilon \left(E_0 + \sum_k E_k \mathrm{e}^{-t/\tau_k} \right), \quad k = 1, 2, \cdots, N \tag{9}$$

여기서 $t = 0$ 에서는 탄성 성분만이 전체 응력에 기여하므로 $\sigma_0 = \epsilon(E_0 + \sum_k E_k)$ 라고 보았다. 그 결과 점탄성 반응은 분명히 비선형이다.

IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q2-5

Korean (Korea (Republic of))

장비

이 실험 문제에는 다음 장비 세트가 주어진다(그림 3 참조):

1. 레이저 포인터를 놓는 지지 장치와, 저울 위에 실을 일정한 변형률로 수직으로 늘어뜨려 잡아 두는 또 다른 위쪽 지지 장치가 있는 스탠드 구조물 1개;
2. 속이 빈 원통형 질량체와 실을 매는 고정 나사로 이루어진 질량 세트 1개;
3. 질량 세트에 매여 있고, 위쪽 지지대에 실을 매다는 데 쓰는 또 다른 고정 나사에 매여 있는 긴 열가소성 폴리우레탄(TPU) 실 1개;
4. 고정 나사 하나에 매여 있는 짧은 TPU 실 1개;
5. 레이저 포인터 1개와 그 지지대;
6. 디지털 저울 1개;
7. 평면거울 2개;
8. 스톱워치 1개;
9. 자 1개;
10. 금속 줄자 1개;
11. 스크린 역할을 할 A4 종이 1장;
12. 레이저를 제자리에 잡아 두고 켜는 스프링 클램프 1개.

IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q2-6

Korean (Korea (Republic of))

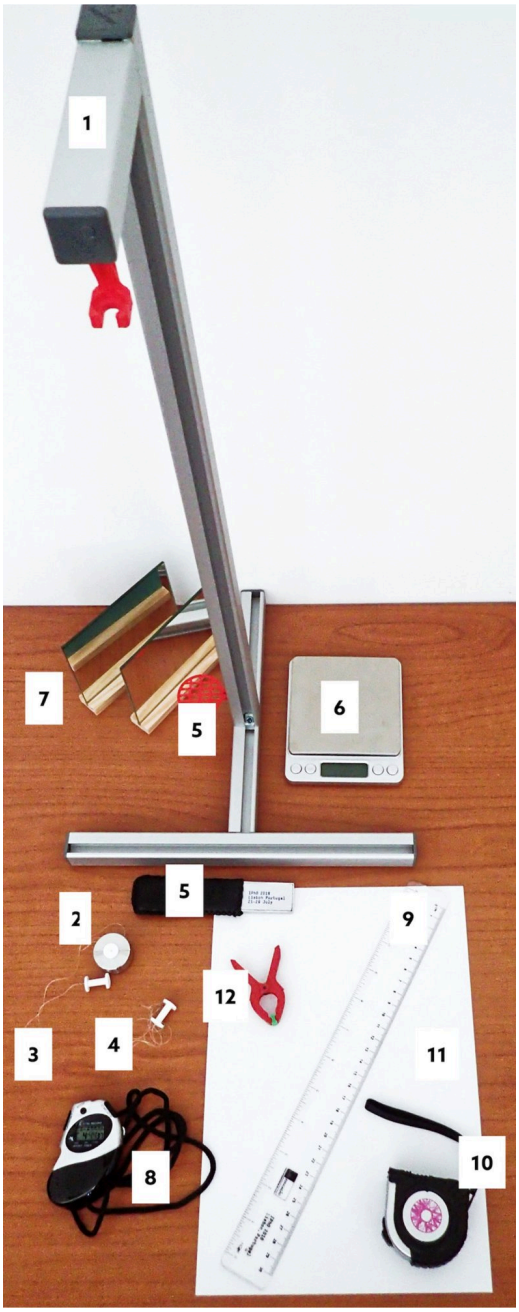


그림 3. 이 실험 문제를 위한 장비.

IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q2-7

Korean (Korea (Republic of))

파트 A: 응력 완화 측정 (1.9점)

실험을 시작하기 전에 실에 힘이 가해져서는 안 됨에 유의하라! 실수로 실에 힘이 가해졌다면 여분의 실을 요청하되, 시간이 걸리므로 실험에 쓸 수 있는 시간이 줄어든다는 점을 유의하라.

이 파트의 측정을 시작하기 전에 "파트 D: 자료 분석"에 주어진 지시를 잘 읽고 측정 방법을 계획해야 한다.

A.1	나사 머리 사이에서 늘어나지 않은 실의 길이를 재라. 나사 안쪽 길이를 포함한 전체 실 길이 ℓ_0 을 얻으려면 각 나사마다 5 mm 를 더하라. 측정한 ℓ_0 값과 그 불확도를 답안지에 적어라.	0.3pt

A.2	질량 세트의 전체 무게 P_0 를 그램중(gf) 단위로 재라. 1 그램중은 질량 1 그램의 무게에 해당하는 힘임을 기억하라($1\ \mathrm{gf} = 9.80 \times 10^{-3}\ \mathrm{N}$). 측정한 값과 그 불확도의 어림을 답안지에 적어라.	0.3pt

여러 완화 성분을 실험적으로 관찰하려면 충분히 긴 시간 동안 응력을 측정해야 한다. 이 경우 약 **45분** 동안 응력의 변화를 표본으로 얻으면 충분하다.

이제 두 가지 동작 1과 2를 동시에 수행해야 한다. 시작하기 전에 지시를 잘 읽어라.

중요: 어떤 이유로든 실험이 중단되면 다시 이어서 할 수 없다. 새 실로 다시 시작해야 한다. 그런 경우 여분의 실을 요청하라.

다음 동작을 동시에 수행하라:

1. 질량 세트를 저울판 위에 둔 채, 반대쪽 끝의 고정 나사가 스탠드 구조물의 실 지지 장치에 놓이도록 실을 늘여라 (그림 4).
2. 동작 1과 동시에 크로노미터를 시작하라.

IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q2-8

Korean (Korea (Republic of))

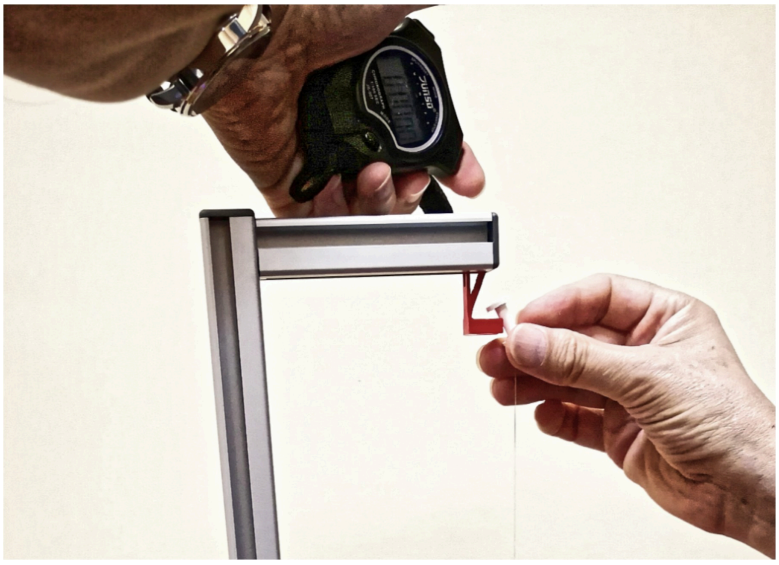


그림 4. 지지대에 실을 걸고 측정을 시작하기.

A.3	약 45분 동안 저울의 값 $P(t)$ 와 그에 대응하는 읽은 시각 t 를 답안지에 주어진 표에 기록하라.	1.0pt

A.4	늘어난 실의 길이 ℓ 을 재고 그에 대응하는 불확도를 어림하라. 측정한 ℓ 값과 그 불확도를 답안지에 적어라.	0.3pt

파트 B: 늘어난 실 지름의 측정 (1.5점)

절대로 레이저를 직접 들여다보지 마라! 쓰지 않을 때에는 레이저 포인터를 꺼 두어야 한다.
회절 무늬를 얻는 데 어려움이 있으면 새 레이저를 요청하라.

이 파트에서는 빛의 회절을 이용해 고분자 실의 지름을 잰다. 늘어나지 않은 실의 공칭 지름은 0.5 mm 이다. 알다시피, 너비 d 인 직사각형 슬릿의 회절 무늬는 슬릿 너비와 같은 지름 d 를 갖는 원통형 물체의 것과 비슷하다. 회절 무늬를 물체의 지름보다 훨씬 먼 거리에 놓인 표적 스크린에서 관찰하는 원거리장(프라운호퍼) 영역에서는, 작은 각에 대해 회절 극소 사이의 거리가 슬릿과 물체에서 같으며 다음과 같이 주어진다

$$d \sin\theta = n\lambda, \quad n = 1, 2, 3, \cdots, \tag{10}$$

여기서 θ 는 회절각이다.

파장이 $\lambda = 650 \pm 10$ nm 인 레이저 빛을 쓴다.

이 파트를 수행하려면 다음과 같이 하라:

1. 스프링 클램프를 써서 레이저를 켜라(그림 5 참조).
2. 레이저가 늘어난 실을 곧바로 비추도록 놓아라.

IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q2-9

Korean (Korea (Republic of))

1. 주어진 재료로, 회절 무늬를 종이 스크린에 투영하고 식 (10)을 써서 실의 지름을 정하는 데 필요한 자료를 잴 방법을 고안하라.



그림 5. 스프링 클램프로 레이저 켜기.

B.1	여러분의 방법을 답안지에 그림으로 그려라.	0.6pt
B.2	실과 투영된 회절 무늬 사이의 광학적 거리 D 를 재라. 불확도의 어림과 함께 답안지에 적어라.	0.3pt
B.3	회절 극소 사이의 평균 거리 $\bar{x}$ 와 그 불확도를 정하라. 불확도의 어림과 함께 답안지에 적어라.	0.3pt
B.4	회절 자료에 식 (10)을 적용하여, 늘어난 고분자 실의 지름 d 와 그 불확도를 정하라. 불확도의 어림과 함께 답안지에 적어라.	0.3pt

파트 C: 새 실로 바꾸기 (0.3점)

자료 분석(**파트 D**)으로 넘어가기 전에 더 짧은 실로 측정할 장치를 준비해야 한다(**파트 E**).

긴 실에서 질량 세트를 떼어내고(나사를 풀어서) 더 짧은 실의 자유로운 끝으로 옮겨라(실을 구멍에 넣고 나사산으로 고정한다, 그림 6 참조).

실을 구멍에 넣을 수 없으면 도움을 요청하라.

IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q2-10

Korean (Korea (Republic of))

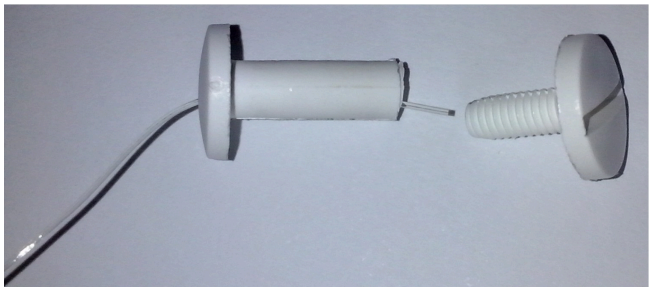


그림 6. 고정 나사에 TPU 실 매기.

C.1	**A.1** 에서처럼 실의 길이 ℓ_0' 을 재라. 불확도의 어림과 함께 답안지에 적어라.	0.3pt

질량이 일정한 응력을 주도록 이 새 실을 위쪽 지지대에 매달아라. 자료 분석을 하는 동안 실은 결국 정지 변형률 $\epsilon = \sigma/E$ 에 이르게 된다(**최소 30분 동안 매달아 두어야 한다**).

파트 D: 자료 분석 (5.7점)

참고: 리스본에서 중력 가속도는 $g = 9.80\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ 이다.

D.1	모든 자료점에 대해 실에 작용하는 힘 F 를 gf 단위로 계산하고 **A.3** 에서 쓴 표의 해당 열을 채워라.	0.3pt

D.2	답안지에 주어진 모눈종이에 $F(t)$ 를 그려라.	0.4pt

저울판이 움직이지 않으므로 측정은 일정한 변형률에서 이루어진 것으로 볼 수 있고 식 (9)를 쓸 수 있다. 비 $\frac{\sigma}{\epsilon}$ 은 $\frac{\sigma}{\epsilon} = \beta F(t)$ 로 쓸 수 있으며, 여기서 β 는 상수이다. 따라서,

$$\frac{\sigma}{\epsilon} = \beta F(t) = E_0 + E_1 \mathrm{e}^{-t/\tau_1} + E_2 \mathrm{e}^{-t/\tau_2} + E_3 \mathrm{e}^{-t/\tau_3} + \ldots \tag{11}$$

여기서 합은 편의상 $(\tau_1 > \tau_2 > \tau_3 > \ldots)$ 순서로 정렬하였다.

D.3	일정한 변형률 ϵ 과 그에 대응하는 불확도를 정하라. 불확도의 어림과 함께 답안지에 적어라.	0.3pt

D.4	σ 는 SI 단위, F 는 gf 단위로 하여 인자 β 를 계산하라. 답안지에 적어라(불확도는 필요 없다).	0.3pt

D.5	**D.2** 에서 쓴 그래프의 자료를 보라: 순수한 탄성 과정으로는 설명할 수 없다. 순수 탄성인 경우 $F(t)$ 로 기대되는 모습을 답안지에 주어진 모눈종이에 정성적으로 그려라.	0.4pt

자료 분석은 $F(t)$ 대신 $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$ 를 생각하면 더 쉬워진다. 그러면 완화 변수를 손으로 연속된 단계에서 뽑아낼 수 있다. 그렇게 하려면 시간 미분 $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$ 를

IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q2-11

Korean (Korea (Republic of))

모든 점에서 계산해야 한다. 이는 그래프로도 수치적으로도 할 수 있다. 자료점이 같은 간격으로 얻어진 더 간단한 경우, 자료 집합 $(t_1, f_1), (t_2, f_2), (t_3, f_3), \cdots$ 에서 점 t_i 에서의 함수 $f(t)$ 의 미분의 수치 값은 근사적으로 다음과 같이 주어진다

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \qquad i = 2, \cdots, N-1 \tag{12}$$

여기서 h 는 점 사이의 (일정한) 간격이고 N 은 점의 개수이다.

자료점 사이의 간격이 같지 않으면, 미분의 수치 값은 근사적으로 다음과 같이 주어진다:

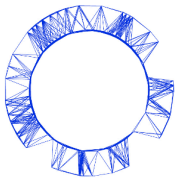
$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_i = \frac{h_-^2 f_{i+1} - h_+^2 f_{i-1} + (h_+^2 - h_-^2) f_i}{h_+^2 h_- + h_+ h_-^2} \qquad i = 2, \cdots, N-1 \tag{13}$$

여기서 $h_+ = (t_{i+1} - t_i)$, $h_- = (t_i - t_{i-1})$ 이고 N 은 자료점의 개수이다. 이 식은 역 시간 간격으로 가중한, 왼쪽과 오른쪽 미분의 평균을 나타낸다.

자료를 분석하고 관련 변수를 뽑아내려면 일련의 단계를 따라야 한다. 따라서 식 (11)의 정렬된 합이 주어졌을 때 다음을 수행하라:

D.6	여러분의 자료 집합이 τ_2 보다 오래 지속된다고 가정하고, $t > 1000\,\mathrm{s}$ 인 시각의 자료점에 대해 미분 $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$ 를 계산하라. 값을 **A.3** 에서 쓴 표에 기록하라. $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$ 를 계산하는 데 그래프 방법을 쓴다면 답안지에 주어진 모눈종이를 써라.	0.5pt
D.7	단일 점탄성 과정인 경우 $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$ 의 기대되는 시간 의존성을 나타내는 식을 답안지에 써라.	0.3pt
D.8	**D.6** 에서 언급한 자료점으로부터, 그래프 방법을 써서 변수 E_1 과 τ_1 을 SI 단위로 뽑아내라. E_1 과 τ_1 을 답안지에 적어라(불확도는 필요 없다).	1.0pt
D.9	**D.6** 에서 언급한 자료점으로부터 변수 E_0 를 SI 단위로 뽑아내라. 답안지에 적어라(불확도는 필요 없다).	0.3pt
D.10	**A.3** 에서 쓴 표의 $y(t)$ 열을, $F(t)$ 에서 탄성 성분과 가장 긴 점탄성 성분을 빼서 채워라 (**D.6** 에서 쓴 점은 여기서 생각할 필요가 없다).	0.3pt
D.11	**D.10** 의 $y(t)$ 로부터 그래프 방법을 써서, 두 번째 점탄성 성분의 변수 E_2 와 τ_2 를 SI 단위로 뽑아내라. E_2 와 τ_2 를 답안지에 적어라(불확도는 필요 없다).	1.0pt

추가 점탄성 성분도 비슷한 방법으로 뽑아낼 수 있다.



IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q2-12

Korean (Korea (Republic of))

D.12	세 번째 성분과 관련된 시간 구간 $[t_i, t_f]$ 를 확인하라. t_i 와 t_f 를 답안지에 적어라(불확도는 필요 없다).	0.3pt

D.13	**D.11** 의 그래프로부터 τ_3 을 SI 단위로 어림하라. 답안지에 적어라(불확도는 필요 없다).	0.3pt

파트 E: 일정한 응력 조건에서 E 측정 (0.6점)

파트 C 에서 매달아 둔 더 짧은 실로 돌아가라. 실을 매단 뒤 최소 30분이 지났는지 확인하라. 이제 이 실이 변형률의 정지 값 $\epsilon = \sigma/E$ 에 이르렀다고 안전하게 가정할 수 있다.

E.1	늘어난 실의 길이로부터 E 를 직접 정하라. **파트 D** 에서 얻은 값 E_0 에 대한 상대적 차이와 함께 답안지에 적어라(불확도는 필요 없다).	0.6pt