

IPhO 2018
Lisbon, Portugal

# 실험 문제 2 풀이

## 고분자 실의 점탄성

(J. M. Gil, J. Pinto da Cunha, R. C. Vilão, H. V. Alberto)

2018년 7월 22일

v1.1

Confidential

# 문제 2: 고분자 실의 점탄성 (10점)

## 파트 A. 응력 완화 측정 (1.9점)

### A.1

측정: $\ell_0 = 42.7 + 2 \times 0.5 = 43.7\,\mathrm{cm}$,

| | | |
|---|---|---|
| **A.1** | $\ell_0 = (43.7 \pm 0.2)\,\mathrm{cm}.$ | 0.3pt |

### A.2

| | | |
|---|---|---|
| **A.2** | $P_0 = (81.11 \pm 0.03)\,\mathrm{gf}.$ | 0.3pt |

### A.3

표에는 저울 눈금 $P$ 의 읽음값(문항 A.3)과 일정한 변형에서 실에 걸리는 힘 $F(t)$(문항 D.1)가 들어 있다. $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$(문항 D.6)의 값은 같은 시간 간격으로 수치적으로 계산하였다. 함수 $y(t)$(문항 D.10)는 $y(t) = F(t) - F_0 - F_1\,\mathrm{e}^{-t/\tau_1}$ 로 주어진다.

**A.3** (1.0pt)

| $t\,/\mathrm{s}$ | $P(t)\,/\mathrm{gf}$ | $F\,/\mathrm{gf}$ | $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\,/\mathrm{gf\,s^{-1}}$ | $y(t)\,/\mathrm{gf}$ |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 35.7 | 45.41 | | 2.82 |
| 17 | 36.2 | 44.91 | | 2.33 |
| 26 | 36.6 | 44.51 | | 1.95 |
| 32 | 36.8 | 44.31 | | 1.76 |
| 40 | 37.0 | 44.11 | | 1.57 |
| 46 | 37.1 | 44.01 | | 1.48 |
| 51 | 37.2 | 43.91 | | 1.38 |
| 58 | 37.3 | 43.81 | | 1.29 |
| 65 | 37.4 | 43.71 | | 1.20 |

Confidential

**A.3** 0.3pt

| $t$ /s | $P(t)$ /gf | $F$ /gf | $\frac{dF}{dt}$ /gf s$^{-1}$ | $y(t)$ /gf |
|---|---|---|---|---|
| 73 | 37.5 | 43.61 | | 1.12 |
| 84 | 37.6 | 43.51 | | 1.03 |
| 94 | 37.7 | 43.41 | | 0.94 |
| 105 | 37.8 | 43.31 | | 0.86 |
| 118 | 37.9 | 43.21 | | 0.77 |
| 136 | 38.0 | 43.11 | | 0.70 |
| 151 | 38.1 | 43.01 | | 0.62 |
| 173 | 38.2 | 42.91 | | 0.55 |
| 193 | 38.3 | 42.81 | | 0.48 |
| 217 | 38.4 | 42.71 | | 0.41 |
| 247 | 38.5 | 42.61 | | 0.35 |
| 279 | 38.6 | 42.51 | | 0.29 |
| 317 | 38.7 | 42.41 | | 0.23 |
| 358 | 38.8 | 42.31 | | 0.18 |
| 408 | 38.9 | 42.21 | | 0.14 |
| 471 | 39.0 | 42.11 | | 0.11 |
| 525 | 39.1 | 42.01 | | 0.07 |
| 591 | 39.2 | 41.91 | | 0.03 |
| 600 | 39.2 | 41.91 | | 0.04 |
| 672 | 39.3 | 41.81 | | 0.01 |
| 773 | 39.4 | 41.71 | | 0.007 |
| 866 | 39.5 | 41.61 | | $-0.01$ |
| 900 | 39.52 | 41.59 | | $-0.00$ |
| 993 | 39.6 | 41.51 | | $-0.01$ |
| 1124 | 39.7 | 41.41 | | |
| 1200 | 39.74 | 41.37 | $-7.00 \times 10^{-4}$ | |
| 1272 | 39.8 | 41.31 | | |
| 1419 | 39.9 | 41.21 | | |
| 1500 | 39.94 | 41.17 | $-5.33 \times 10^{-4}$ | |
| 1628 | 40.0 | 41.11 | | |
| 1800 | 40.06 | 41.05 | $-4.67 \times 10^{-4}$ | |
| 1869 | 40.1 | 41.01 | | |
| 2037 | 40.2 | 40.91 | | |
| 2100 | 40.22 | 40.89 | $-3.83 \times 10^{-4}$ | |
| 2400 | 40.29 | 40.82 | | |

Confidential

## A.4

측정: $\ell = 50.0 + 2 \times 0.5 = 51.0\,\text{cm}$,

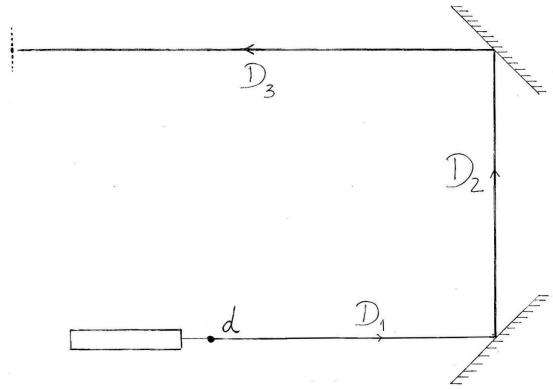
| A.4 | $\ell = (51.0 \pm 0.2)\,\text{cm}.$ | 0.3pt |
|---|---|---|

### 파트 B. 늘어난 실 지름의 측정 (1.5점)

## B.1

거울 두 개를 써서 거리 D 를, 따라서 회절 극소 사이의 거리를 최대로 한다.

**B.1** 방법의 스케치 0.6pt




## B.2

전체 거리 $D$ 는 다음의 합이다

$$D = D_1 + D_2 + D_3 = (26.0 + 36.0 + 102.3)\,\text{cm} = 164.3\,\text{cm} = 1.643\,\text{m}.$$

어림한 불확도는 다음과 같다

$$\sigma_{D_1} = \sigma_{D_2} = \sigma_{D_3} \approx 0.5\,\text{cm} \;\Rightarrow\; \sigma_D = \sqrt{3 \times \sigma_{D_1}^2} = 0.5 \times \sqrt{3} = 0.87\,\text{cm}.$$

| B.2 | $D = (1.643 \pm 0.009)\,\text{m}.$ | 0.3pt |
|---|---|---|

Confidential

## B.3

극소 사이의 거리 $x$ 는 꽤 작다. 오차를 줄이기 위해 $N = 22$ 로 하여 전체 거리 $Nx$ 를 측정하였다:

$$22\,x = 49\,\text{mm} \;\Rightarrow\; \bar{x} = 2.227\,\text{mm}.$$

이에 대응하는 불확도는

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_{22\,x}}{22} = \frac{0.25\,\text{mm}}{22} = 0.011\,\text{mm}.$$

| B.3 | $\bar{x} = (2.227 \pm 0.011)\,\text{mm}.$ | 0.3pt |
|---|---|---|

## B.4

앞의 결과를 쓰면

$$d = \frac{\lambda}{\sin\theta} \simeq \frac{\lambda D}{\bar{x}} = \frac{650\times10^{-9}\,\text{m}\times 1.643\,\text{m}}{2.227\times10^{-3}\,\text{m}} = 4.795\times10^{-4}\,\text{m} = 0.480\,\text{mm}.$$

불확도에 대해서는

$$\frac{\sigma_d}{d} = \frac{\sigma_\lambda}{\lambda} + \frac{\sigma_D}{D} + \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}} = \frac{10}{650} + \frac{0.0087}{1.643} + \frac{0.011}{2.227} = 0.02517 \;\Rightarrow\; \sigma_d = 0.02517\times 0.480\,\text{mm} = 0.012\,\text{mm}.$$

| B.4 | $d = (0.480 \pm 0.012)\,\text{mm}.$ | 0.3pt |
|---|---|---|

Confidential

### 파트 C. 새 실로 바꾸기 (0.3점)

## C.1

측정: $\ell_0' = 31.6 + 2\times 0.5 = 32.6\,\text{cm}.$

| C.1 | $\ell_0' = (32.6 \pm 0.2)\,\text{cm}.$ | 0.3pt |
|---|---|---|

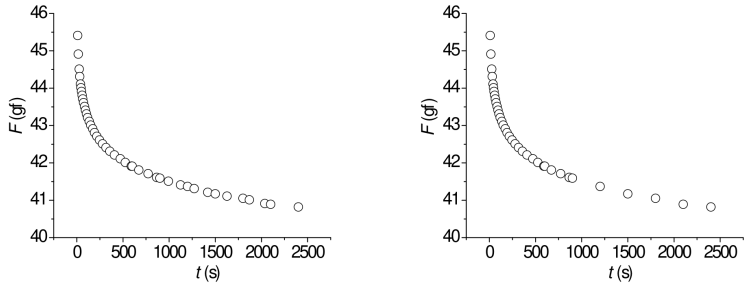
## 파트 D. 자료 분석 (5.7점)

### D.1

실에 걸리는 힘은 $F(t) = (P_0 - P(t))$ 로 그램힘 단위로 계산하였다.

| | | |
|---|---|---|
| **D.1** | A.3의 표에서 $F(t)$ 열을 보라. | 0.3pt |

### D.2




**D.2** 0.4pt

**왼쪽**: 시간 간격이 고르지 않게 표본한 $F(t)$. **오른쪽**: $t > 1000$ s 에서 같은 시간 간격으로 표본한 $F(t)$.

### D.3

무차원 양 $\epsilon$ 은 다음과 같이 주어진다

$$\epsilon = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} = \frac{51.0 - 43.7}{43.7} = 0.167.$$

$\epsilon$ 의 불확도 $\sigma_\epsilon$ 은 측정한 길이의 불확도 $\sigma_\ell$ 과 $\sigma_{\ell_0}$ 을 전파시켜 계산한다:

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_\epsilon}{\epsilon} &= \frac{\sigma_{(\ell-\ell_0)}}{\ell - \ell_0} + \frac{\sigma_{\ell_0}}{\ell_0} \\ &= \frac{\sqrt{\sigma_\ell^2 + \sigma_{\ell_0}^2}}{\ell - \ell_0} + \frac{\sigma_{\ell_0}}{\ell_0} \\ &= \frac{0.2 \times \sqrt{2}}{7.3} + \frac{0.2}{43.7} \\ &= 0.0433\end{aligned}$$

따라서 $\sigma_\epsilon = 0.0433 \times 0.167 = 0.0072$ 이다.

| | | |
|---|---|---|
| **D.3** | $\epsilon = 0.167 \pm 0.007.$ | 0.3pt |

Confidential

## D.4

다음이 성립한다

$$\frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{F}{\epsilon S}.$$

이 경우 $S = \pi(d/2)^2 = 1.809 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}^2$ 이고 $\epsilon = 0.167$ 이다. 또한 $1\,\mathrm{gf} = g \times 10^{-3}\,\mathrm{N}$ 이고 $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ 이다. 따라서 $F$ 를 그램힘 단위로 쓰면

$$\frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{9.8 \times 10^{-3}\,\mathrm{gf^{-1}\,N}}{0.167 \times 1.809 \times 10^{-7}\,\mathrm{m^2}}\,F = \left(324293\,\mathrm{gf^{-1}\,N\,m^{-2}}\right)F,$$

여기서 $F$ 는 gf 단위이고 $\sigma$ 는 $\mathrm{N\,m^{-2}}$ 단위이다. $\frac{\sigma}{\epsilon} = \beta F$ 와 비교하면 다음을 얻는다

$$\beta = 324293\,\mathrm{gf^{-1}\,N\,m^{-2}}.$$

다음과 같이 쓰면

$$F(t) = F_0 + F_1\,\mathrm{e}^{-t/\tau_1} + F_2\,\mathrm{e}^{-t/\tau_2} + F_3\,\mathrm{e}^{-t/\tau_3} + \cdots \tag{1}$$

이고, 다음 식과 비교하면

$$\frac{\sigma}{\epsilon} = \beta F(t) = E_0 + E_1\,\mathrm{e}^{-t/\tau_1} + E_2\,\mathrm{e}^{-t/\tau_2} + E_3\,\mathrm{e}^{-t/\tau_3} + \cdots \tag{2}$$

$E_0 = \beta F_0$, $E_1 = \beta F_1$, $E_2 = \beta F_2$ 등임을 알 수 있다.

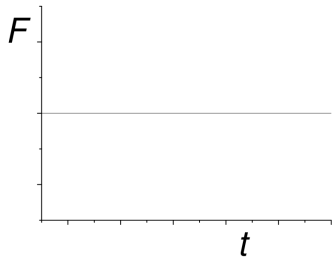
**D.4** $\beta = 3.24 \times 10^5\,\mathrm{gf^{-1}\,N\,m^{-2}}.$ 0.3pt

## D.5

순수한 탄성 과정에서는 $\sigma = \epsilon E_0$ 이고

$$F = \alpha\,\sigma = \alpha\,\epsilon\,E_0.$$

따라서 상수 함수의 그래프가 예상된다.




**D.5** 0.4pt

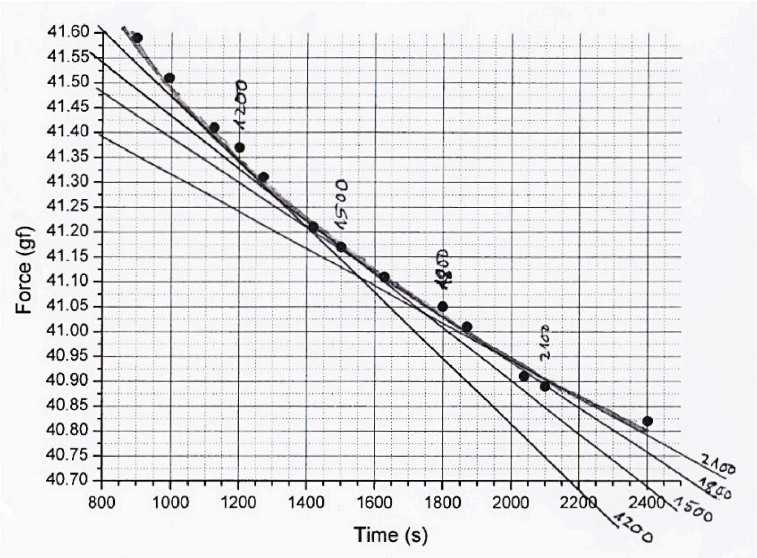
Confidential

## D.6

A.3에서 소개한 표에 넣은 $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$ 자료는 같은 시간 간격에 대해 수치적으로 계산하였다.
그러나 그래프 방법도 예시하였다. 이 그래프에서는 네 개의 서로 다른 시각(1200, 1500, 1800, 2100 s) 에서 $F(t)$ 에 접선을 그었다. 그 직선들의 기울기가 그 시각에서의 $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$ 의 척도이다.

**D.6** A.3에서 쓴 표의 $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$ 열을 보라. 0.5pt

이 그래프는 그래프 방법을 쓸 때에만 필요하다.




## D.7

단일 점탄성 과정에 대해서는,

$$F = \frac{1}{\beta}\left(E_0 + E_1\,\mathrm{e}^{-t/\tau_1}\right) = F_0 + F_1\,\mathrm{e}^{-t/\tau_1}.$$

따라서,

**D.7** $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{F_1}{\tau_1}\,\mathrm{e}^{-t/\tau_1}$, 여기서 $F_1 = \dfrac{E_1}{\beta}$. 0.3pt

## D.8

$\mathrm{d}F/\mathrm{d}t$ 식의 선형화는 로그를 써서 이루어진다:

$$\ln\left(-\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right) = \ln\left(\frac{F_1}{\tau_1}\right) - \frac{1}{\tau_1}\,t.$$

Confidential

$\ln(-\mathrm{d}F/\mathrm{d}t)$ 의 그래프를 아래에 나타냈으며, 미분을 수치적으로 얻은 경우(왼쪽)와 그래프 방법으로 얻은 경우(오른쪽)이다.

왼쪽 그래프에서 최적 직선은 $\ln(-\mathrm{d}F/\mathrm{d}t) = m_1 t + b_1$ 이고 $m_1 = (-6.47 \pm 0.62) \times 10^{-4}$, $b_1 = (-6.52 \pm 0.11)$ 이다(시간은 초, 힘은 그램힘 단위). 시간 간격이 고르지 않게 미분을 수치적으로 계산하더라도 최종 변수 $E_1$ 과 $\tau_1$ 은 비슷하다.

오른쪽 그래프의 최적 직선은 $m_1 = (-6.00 \pm 0.15) \times 10^{-4}$, $b_1 = (-6.63 \pm 0.02)$ 를 준다 (시간은 초, 힘은 그램힘 단위).

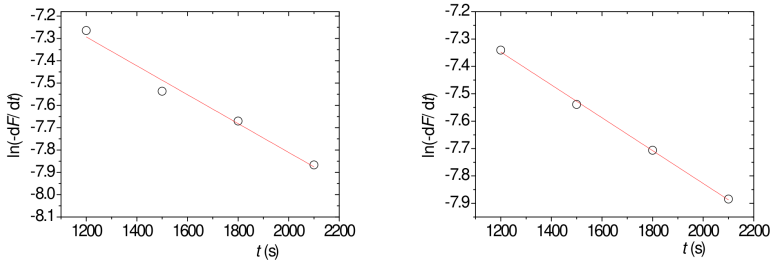
따라서 왼쪽 그래프의 자료를 쓰면 $\tau_1 = \frac{1}{-m_1} = 1546\,\mathrm{s}$ 이고

$$F_1 = \tau_1\,\mathrm{e}^{b_1} = 2.28\,\mathrm{gf} \;\Rightarrow\; E_1 = \beta\,F_1 = 7.39 \times 10^5\,\mathrm{N\,m^{-2}}.$$

오른쪽 그래프에 대해서는 최종 변수가 $\tau_1 = 1667\,\mathrm{s}$ 이고 $E_1 = 7.13 \times 10^5\,\mathrm{N\,m^{-2}}$ 이다.

**D.8** 1.0pt

$\tau_1 = 1546\,\mathrm{s}\,,\qquad E_1 = 7.39 \times 10^5\,\mathrm{N\,m^{-2}}.$




**왼쪽**: 같은 시간 간격으로 수치적으로 계산한 $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$. **오른쪽**: D.6의 그래프에서 얻은 자료 사용.

## D.9

D.8의 왼쪽 그래프에 있는 네 점에 대해 다음과 같이 쓸 수 있다

$$F(t) = F_0 + F_1\,\mathrm{e}^{-t/\tau_1} \;\Rightarrow\; F_0 = F(t) - F_1\,\mathrm{e}^{-t/\tau_1}$$

따라서 D.8의 왼쪽 그래프의 네 점에 대해 $F_0$ 를 평균하면:

$$F_0 = \left(\frac{40.32 + 40.31 + 40.34 + 40.30}{4}\right) = 40.32\,\mathrm{gf}$$

끝으로,

$$E_0 = \beta\,F_0 = 324293 \times 40.32\,\mathrm{N\,m^{-2}}.$$

**D.9** 0.3pt

$E_0 = 1.31 \times 10^7\,\mathrm{N\,m^{-2}}.$

Confidential

## D.10

함수 $y(t)$ 는 다음과 같이 주어지고

$$y(t) = F(t) - F_0 - F_1\,\mathrm{e}^{-t/\tau_1}\,,$$

$F_0 = 40.32\,\mathrm{gf}$, $F_1 = 2.28\,\mathrm{gf}$, $\tau_1 = 1546\,\mathrm{s}$ 를 써서 A.3에서 소개한 표에 더하였다.

| | | |
|---|---|---|
| **D.10** | A.3의 표에서 $y(t)$ 열을 보라. | 0.3pt |

## D.11

다음이므로

$$y(t) = F(t) - F_0 - F_1\,\mathrm{e}^{-t/\tau_1}\,,$$

그러면

$$y(t) = F_2\,\mathrm{e}^{-t/\tau_2} + F_3\,\mathrm{e}^{-t/\tau_3} + \cdots\,, \quad \tau_2 > \tau_3 > \cdots$$

긴 시간에서 더 높은 성분의 기여가 충분히 작아지면 $\ln y(t)$ 가 선형으로 거동할 것으로 기대된다:

$$\ln y = \ln F_2 - \frac{1}{\tau_2}\,t.$$

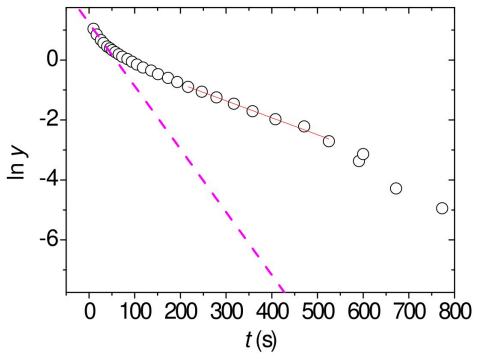
이 경우 $y(t)$ 자료점은 500 s 위에서는 의미가 없어진다. 200–500 s 영역에서 그래프는 선형이며, 그 영역을 써서 둘째 성분의 변수를 뽑아낼 수 있다. 직선의 방정식은 $\ln y_2 = b_2 + m_2 t$ 이다. 아래 그래프로부터,

$$m_2 = -(5.65 \pm 0.19) \times 10^{-3} \;\Rightarrow\; \tau_2 = \frac{1}{-m_2} = 177\,\mathrm{s}$$

$$b_2 = 0.33 \pm 0.07 \;\Rightarrow\; F_2 = \mathrm{e}^{b_2} = 1.39 \;\Rightarrow\; E_2 = \beta F_2 = 4.5 \times 10^5\,\mathrm{N\,m^{-2}}.$$

.

| | | |
|---|---|---|
| **D.11** | $E_2 = 4.5 \times 10^5\,\mathrm{N\,m^{-2}}\,,$ $\tau_2 = 177\,\mathrm{s}.$ | 1.0pt |




200–500 s 범위의 최적 직선은 변수 $\tau_2$ 와 $E_2$ 를 준다(문항 D.11). $[10, 30]$ s 범위의 최적 직선의 기울기는 $\tau_3$ 의 어림값을 준다 (문항 D.12와 D.13).

Confidential

## D.12

대략 30 s 아래에서는 선형 거동에서 뚜렷이 벗어나며, 이는 셋째 성분이 있음을 뜻한다. 이 경우 첫 자료점은 $t = 10\,\mathrm{s}$ 에서 얻었다.

(0.2 pt)

$$t_i = 10\,\mathrm{s} \qquad , \qquad t_f = 30\,\mathrm{s}$$

## D.13

D.12에서 정한 범위의 처음 자료점들을 써서 그래프에 직선을 그으면, D.11의 그래프에서처럼 $\tau_3$ 을 다음과 같이 어림할 수 있다:

$$m_3 = -0.02 \;\Rightarrow\; \tau_3 \approx m_3^{-1}\,,$$

**D.13** $\tau_3 \approx 50\,\mathrm{s}.$ 0.3pt

### 파트 E. 일정한 응력 조건에서 $E$ 측정 (0.6점)

## E.1

문항 C.1로부터 다음을 얻는다

$$\ell_0' = (32.60 \pm 0.2)\,\mathrm{cm}.$$

최종 길이 $\ell'$ 을 측정해야 한다. 이 경우,

$$\ell' = 42.2 + 2 \times 0.5 = 43.2\,\mathrm{cm} \;\Rightarrow\; \ell' = (43.2 \pm 0.2)\,\mathrm{cm}.$$

따라서 변형은 다음과 같다

$$\epsilon = \frac{\ell' - \ell_0'}{\ell_0'} = 0.325.$$

다음이 주어지므로

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{\frac{Mg}{\pi R^2}}{\epsilon} = \frac{80.2 \times 10^{-3} \times 9.8}{\pi \times (0.24 \times 10^{-3})^2 \times 0.325} = 1.337 \times 10^7\,\mathrm{N\,m^{-2}}.$$

늘어난 실의 반지름 $R$ 은 측정하지 않았음에 유의하라. 과제 B.4에서 측정한 값 $R \approx 0.24 \times 10^{-3}$ m 를 썼다.

Confidential

상대 차이는 다음과 같다

$$\frac{E - E_0}{E_0} = 0.021.$$

**E.1** $E = 1.337 \times 10^7\,\mathrm{N\,m^{-2}}$ , $\frac{E - E_0}{E_0} = 2.1\%.$ 0.6pt

Confidential