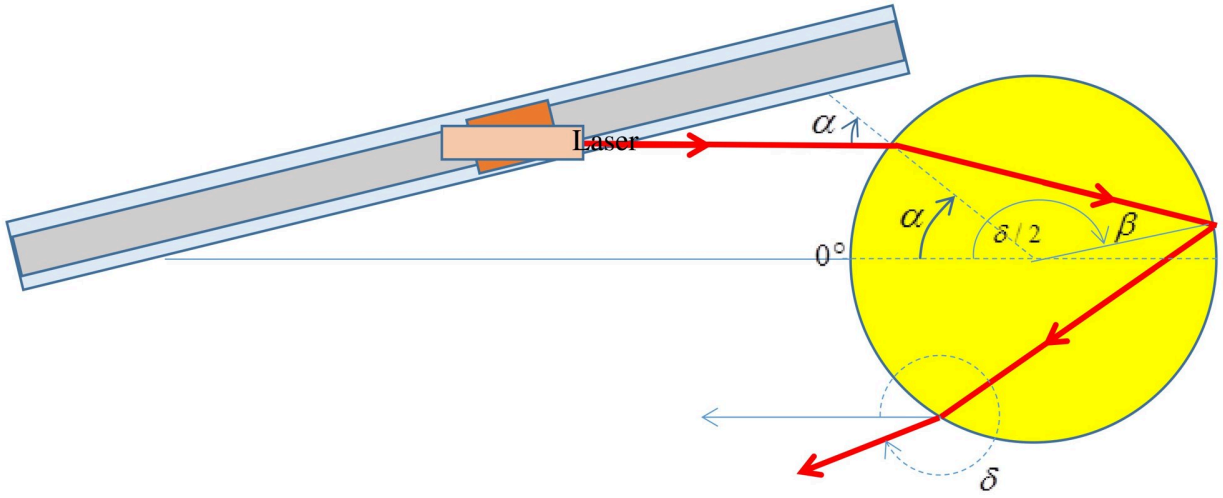
광학 측정 – 풀이

파트 A: 원판의 굴절률

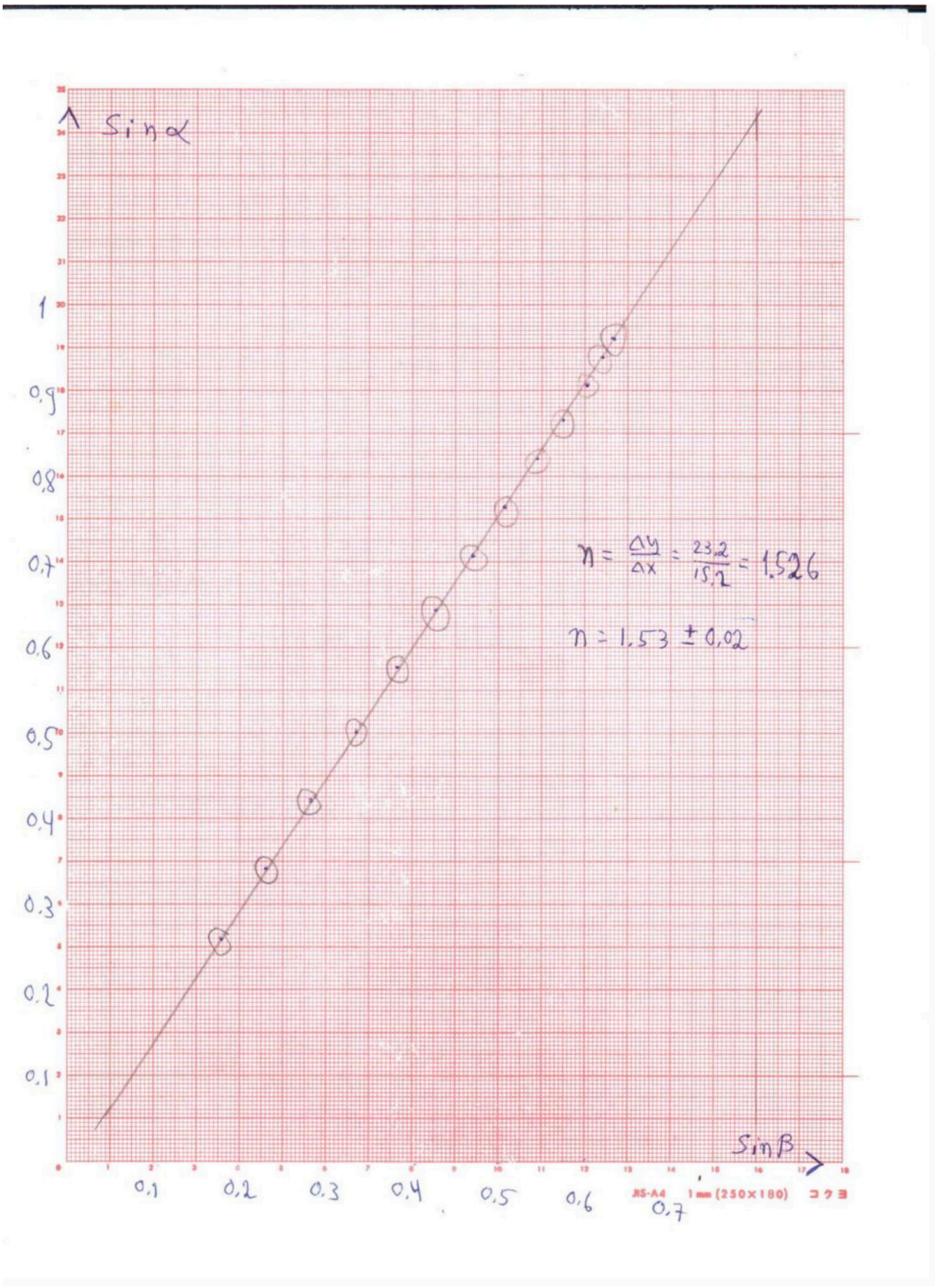
A.1: $N = 3$ 일 때 실험 장치의 개략도



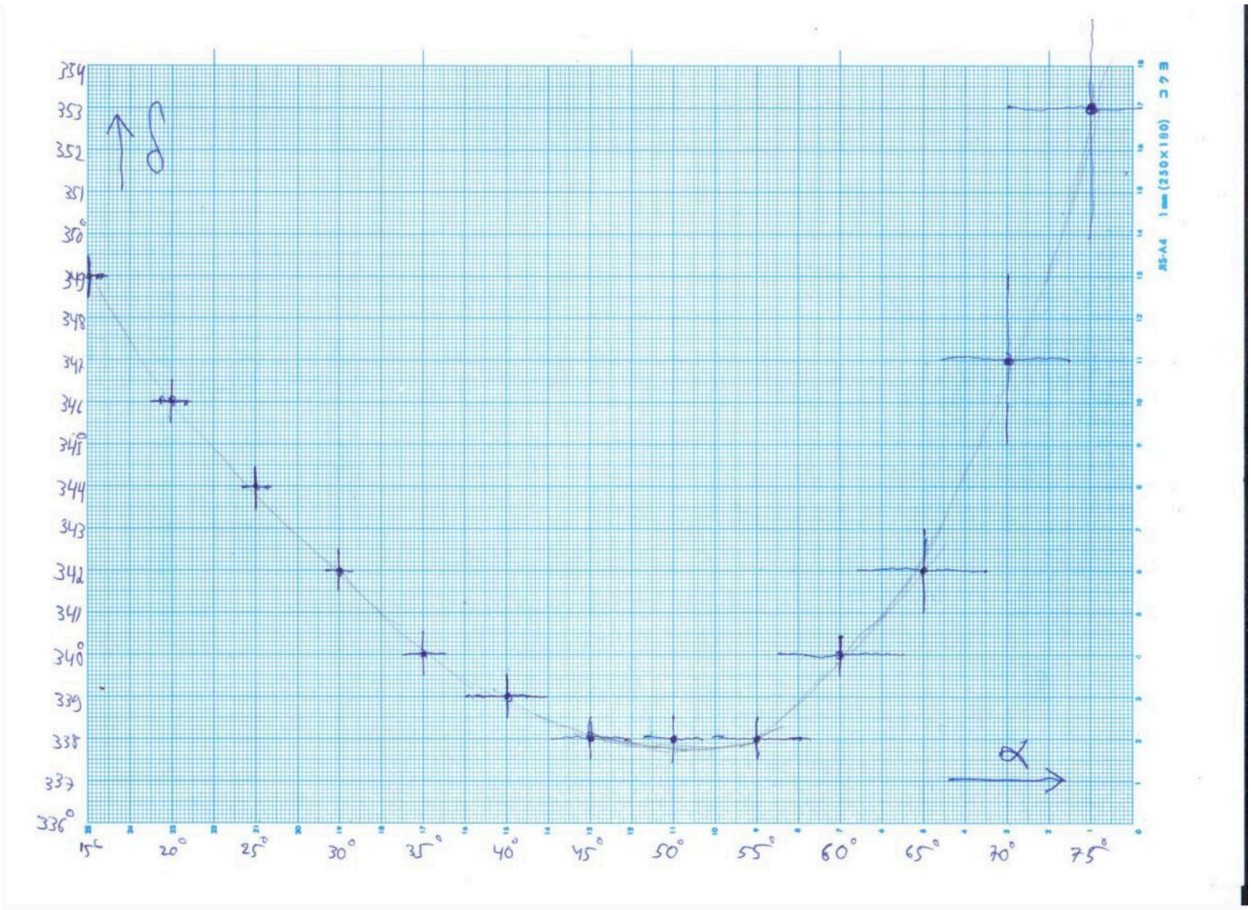
A.1: 측정값과 계산값의 표

$\alpha(^\circ)$	$\Delta\alpha(^\circ)$	$\delta/2(^\circ)$	$\Delta\delta/2(^\circ)$	$\delta(^\circ)$	$\Delta\delta(^\circ)$	$\beta(^\circ)$	$\sin\alpha$	$\sin\beta$
15	0.25	174.5	0.25	349	0.5	10.25	0.259	0.178
20	0.25	173	0.25	346	0.5	13.5	0.342	0.233
25	0.25	172	0.25	344	0.5	16.5	0.423	0.284
30	0.25	171	0.25	342	0.5	19.5	0.500	0.334
35	0.5	170	0.25	340	0.5	22.5	0.574	0.383
40	1	169.5	0.25	339	0.5	25.25	0.643	0.427
45	1	169	0.25	338	0.5	28	0.707	0.469
50	1	169	0.25	338	0.5	30.5	0.766	0.508
55	1	169	0.25	338	0.5	33	0.819	0.545
60	1.5	170	0.25	340	0.5	35	0.866	0.574
65	1.5	171	0.5	342	1	37	0.906	0.602
70	1.5	173.5	1	347	2	38.25	0.940	0.619
75	2	176.5	1.5	353	3	39.25	0.966	0.633

A.2:


Sinα
Sinβ
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
$n = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{23.2}{15.2} = 1.526$
$n = 1.53 \pm 0.02$

A.3:



멀리 있는 스크린을 관찰하면 δ 가 최소가 되는 점을 최고의 정확도로 찾을 수 있다.

우리가 구한 값은

$\alpha = 49^\circ \pm 0.25^\circ$ 이고 $\delta = 338^\circ \pm 0.5^\circ$

A.4:

δ 가 최소일 때 $\frac{d\delta}{d\alpha} = 0$ 이다.

관계 $\delta = 2\alpha + (N-1)(180^\circ - 2\beta)$ 를 α 로 미분하면:

$2 - 2(N-1)\frac{d\beta}{d\alpha} = 0$ 이므로 $\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{1}{N-1}$.

스넬 법칙 $\sin\alpha = n\sin\beta$ 를 미분하면 $\cos\alpha = n\cos\beta \cdot \dfrac{d\beta}{d\alpha} = \dfrac{n\cos\beta}{N-1}$ 을 얻는다.

이 결과와 스넬 법칙을 각각 제곱하여 더하면:

$$1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = n^2\sin^2\beta + \frac{n^2\cos^2\beta}{(N-1)^2}$$

따라서: $\dfrac{1}{n^2} = \sin^2\beta + \dfrac{\cos^2\beta}{(N-1)^2}$

굴절각 β 와 물질의 굴절률 사이의 명시적인 관계를 얻었다. 원판 안에서 여러 번 반사되므로, 빔이 원판–공기 경계에 부딪히는 모든 점을 따라가면 각 β 를 매우 높은 정확도로 측정할 수 있다.

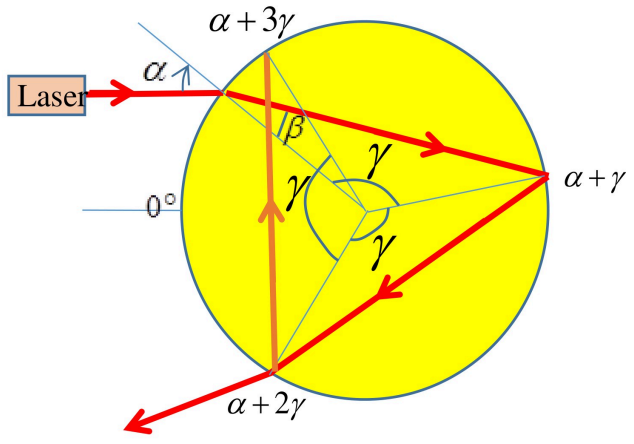
A.5: 측정한 모든 양을 보여 주는 개략도:

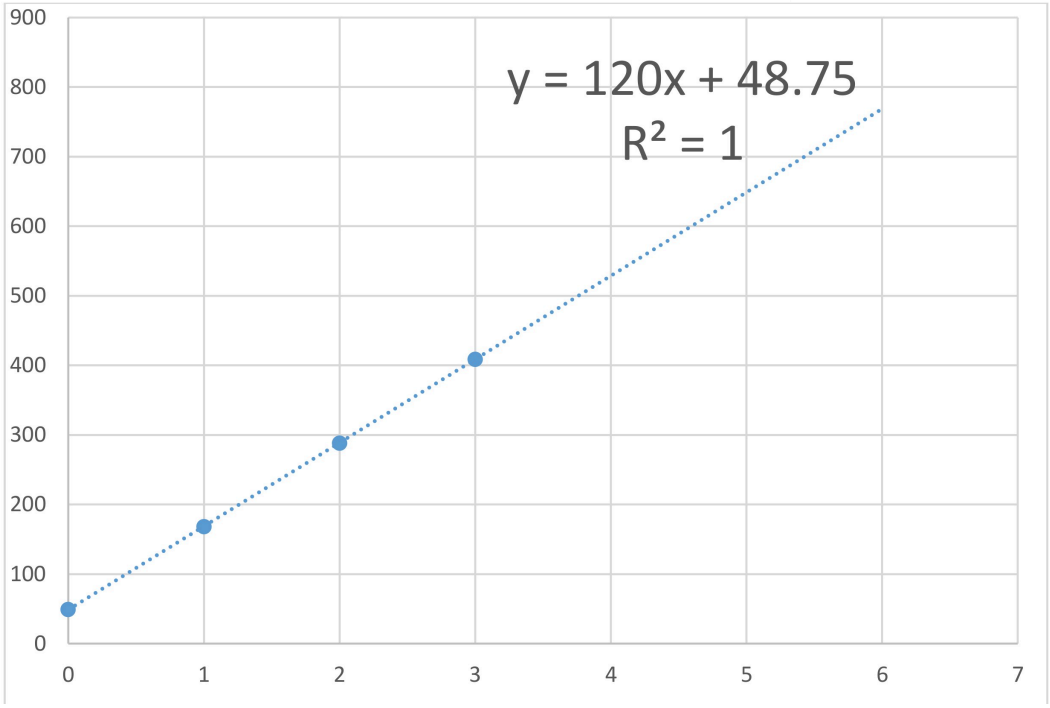
개략도에서처럼 각 $\gamma = 180^\circ - 2\beta$ 를 정의한다. 실제로 원판 안에서 두 번 반사한 뒤 빔은 들어간 점과 매우 가까운 점에서 나온다. 우리는 빔이 k 번 반사한 뒤 경계에 부딪히는 점들의 각 위치를, 가능한 한 많은 k 값에 대해 측정한다:

k	$\alpha + k\gamma$
0	49
1	168.5
2	288.5
3	409

참고: $N = 3$ 인 경우에는 $k > 3$ 을 측정할 수 없다. 이 경우 $k = 3$ 부터는 충돌점이 앞선 점들과 겹치기 때문이다.

다음으로 k 에 대한 $y = \alpha + k\gamma$ 의 그래프를 그리고 선형 회귀의 기울기 γ 를 구한다:



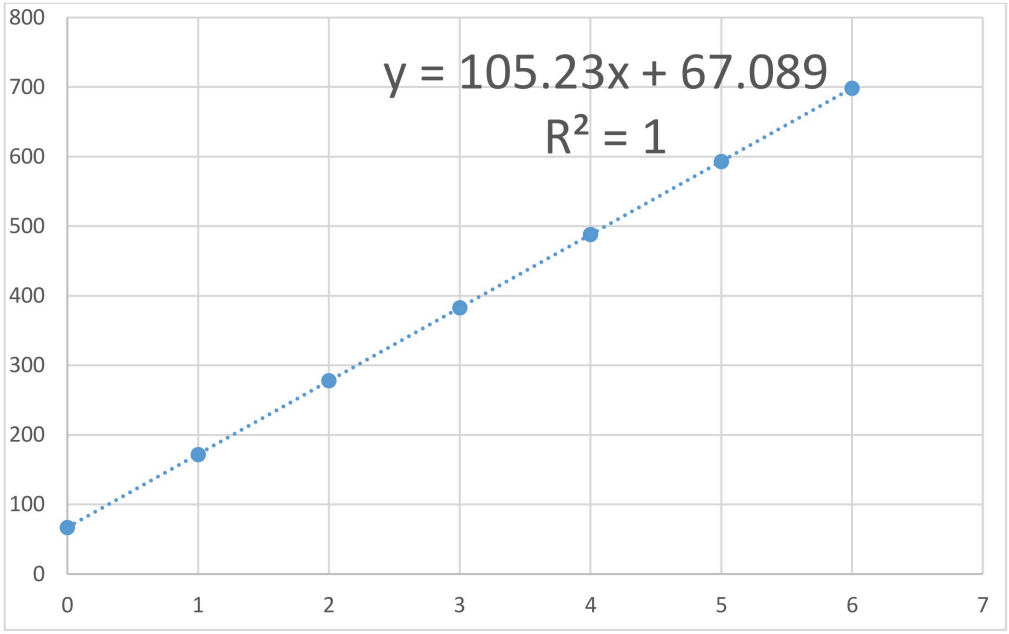


$\gamma = 120^\circ$ 로부터 $\beta = 30^\circ$ 를 얻고, A.4에서 유도한 식을 쓰면:

$$n = \frac{1}{\sqrt{(\sin\beta)^2 + (\cos\beta)^2/(N-1)^2}} = 1.512$$

A.6: 4번의 굴절/반사($N = 4$) 후에 원판을 빠져나가는 빔을 찾고, $N = 4$ 에 대해 δ_{min} 을 얻을 때까지 입사각을 바꾼다. 빔이 원판–공기 경계에 부딪히는 횟수 k 의 함수로 $\alpha + k\gamma$ 를 측정한다:

k	$\alpha + k\gamma$
0	67
1	172
2	278
3	383
4	488
5	593
6	698.5

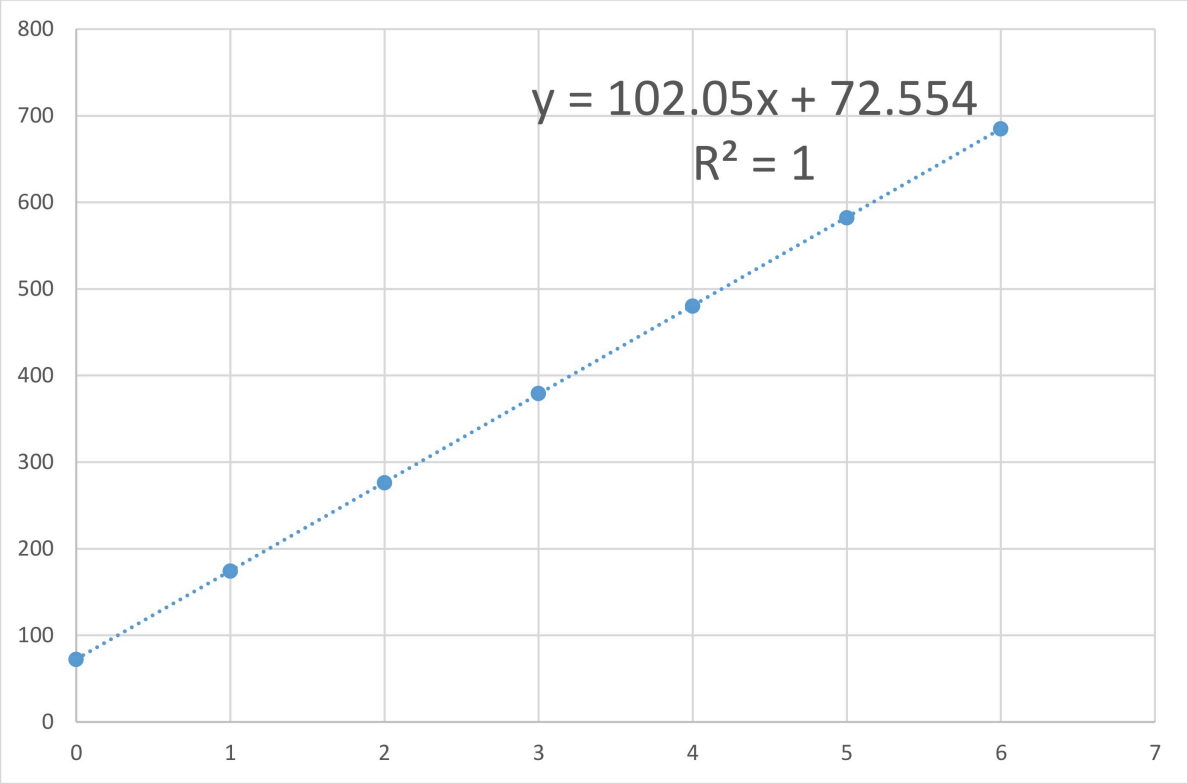


$$n = \frac{1}{\sqrt{(\sin\beta)^2 + (\cos\beta)^2/(N-1)^2}} = 1.511$$

$N = 5$ 에 대해 이 과정을 반복한다:

원판–공기 경계에 5번 부딪힌 뒤($N = 5$) 원판을 빠져나가는 빔을 찾고, 부딪힌 횟수 k 의 함수로 $\alpha + k\gamma$ 를 측정한다:

k	$\alpha + k\gamma$
0	72.5
1	174.5
2	276.5
3	379.5
4	480.5
5	582.5
6	685



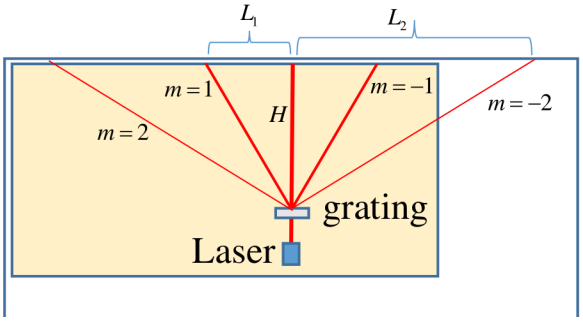
$$n = \frac{1}{\sqrt{(\sin\beta)^2 + (\cos\beta)^2/(N-1)^2}} = 1.519$$

세 결과를 평균하면: $n = \frac{1.519 + 1.511 + 1.512}{3} = 1.514 \pm 0.004$

섹션 B – 회절격자의 변수

B.1: 스크린(실험실 벽)에서 약 $H = 70cm$ 떨어지고 방의 양 옆 벽에서 같은 거리에 있는 점 Q를 책상 위에 표시한다.

주어진 줄자를 써서, 표시한 점 Q의 오른쪽이면서 왼쪽 벽에서 약 100cm 되는 같은 거리에 있는 두 점 P_1 과 P_2 를 스크린 위에 표시한다. 스크린 위에서 구간 P_1P_2 의 중점에 점 P 를 표시한다. 그런 다음 점 Q와 P를 지나도록 레이저를 겨눈다. 이 빔은 스크린으로 쓸 벽에 수직이 된다.



표준 방법:

빔이 격자를 지나도록 격자를 놓는다. 격자를 조금씩 돌려서 회절 차수 1과 -1, 그리고 2와 -2 가 0차 점을 중심으로 대칭으로 나타나게 한다. 스크린 위 0차의 위치는 각 α 에 의존하지 않음에 유의하라. 이 상황에서는 격자에 대한 빔의 입사각이 $\alpha = 0$ 이라고 놓아도 된다.

개략도에서처럼 H, L_1, L_2 를 측정하고 관계 $d\sin\theta_m = m\lambda$ 를 쓴다.

측정값은 $2L_1 = 53.3\text{cm}$, $2L_2 = 163.5\text{cm}$ 그리고 $H = 60.8\text{cm}$ 이다.

1차에 대해 $\frac{\lambda}{d} = 0.4015$ 를 얻는다. 2차에 대해 $\frac{\lambda}{d} = 0.4012$ 를 얻는다.

B.2: 두 번째 방법

입사각 $\alpha = 0$ 에서는 더 높은 차수를 얻을 수 없다. 따라서 α 를 바꾸면 그 결과 각 θ_m 도 바뀐다. θ_m 이 최소가 되는 각이 있다. 관계 $d\left(\sin\alpha + \sin(\theta_m - \alpha)\right) = m\lambda$ 를 α 로 미분하면 최솟값 ($\frac{d\theta_m}{d\alpha} = 0$)에서

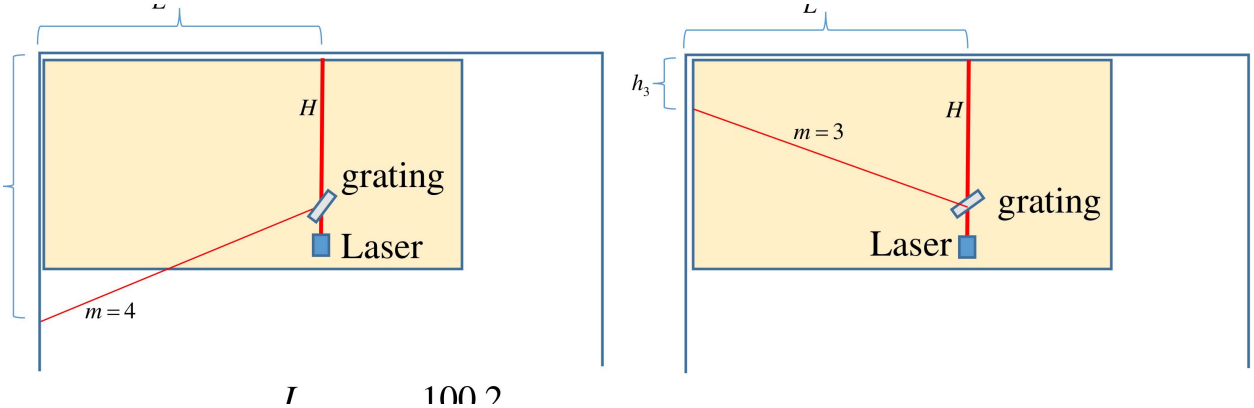
$\cos\alpha - \cos(\theta_m - \alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\theta_m}{2}$ 를 얻는다. 이로부터 $2d\sin\left(\frac{\theta_m}{2}\right) = m\lambda$ 를 얻는다.

각 α 를 측정할 필요는 없고, α 를 바꾸어 가며 θ_m 의 최솟값을 찾아내기만 하면 된다.

이 방법으로 $m = 1$ 과 $m = 2$ 차수도 측정할 수 있다. $m = 2$ 와 $m = -2$ 에 대해서는 이 두 차수가 0차로부터 같은 거리에 있는지 확인함으로써 빔이 스크린에 수직임을 검증할 수 있다.

$m = 3$ 에 대해서는 α 를 바꾸어 θ_{3min} 을 얻고 거리 L 과 h_3 을 측정한다.

아래 개략도에 나타낸 대로 측정값은 $H = 67.0\text{cm}$, $L = 100.2\,\text{cm}$, $h_3 = 37.8\,\text{cm}$ 이다.



$\tan\theta_{3\,\text{min}} = \dfrac{L}{H - h3} = \dfrac{100.2}{67.0 - 37.8} = 3.432$ 를 얻고, 따라서 $\theta_{3\,\text{min}} = 73.75^\circ$

그러므로: $\dfrac{\lambda}{d} = \dfrac{2}{3}\sin\dfrac{\theta_{3\,\text{min}}}{2} = \dfrac{2}{3}\sin\dfrac{73.75^\circ}{2} = 0.400$

$m = 4$ 에 대해서는 α 를 바꾸어 $\theta_{4\,\text{min}}$ 을 얻고 거리 h_4 를 측정한다.

측정값은 $H = 67.0\text{cm}$, $L = 100.2\,\text{cm}$, $h_4 = 96.3\,\text{cm}$ 이다.

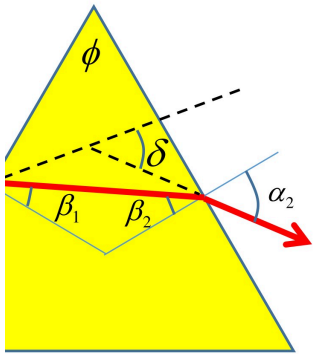
개략도로부터 $\tan(\theta_{4\,\text{min}} - 90^\circ) = \dfrac{h_4 - H}{L} = \dfrac{96.3 - 67.0}{100.2} = 0.2924$ 를 얻는다.

따라서 $\theta_{4\,\text{min}} = 106.3^\circ$, 그러므로 $\dfrac{\lambda}{d} = \dfrac{2}{4}\sin\dfrac{\theta_{4\,\text{min}}}{2} = \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{106.3^\circ}{2} = 0.400$

섹션 C – 삼각 프리즘의 굴절률

C.1: 레이저 빔의 경로를 보여 주는 개략도와 빔 경로 역전의 원리로부터, 각 α_1 과 α_2 를 서로 바꾸어도 입사 빔의 방향으로부터의 편향각 δ 가 바뀌지 않음을 알 수 있다. 따라서 상황이 완전히 대칭일 때, 즉 $\alpha_1 = \alpha_2$ 일 때 δ 는 극값(사실은 최솟값)을 갖는다. 이 경우

$$\beta_1 = \beta_2 = \frac{\phi}{2}.$$



대칭인 경우 입사각 α 는 관계 $\alpha = \frac{\delta}{2} + \frac{\phi}{2}$ 를 만족하고, 스넬 법칙으로부터 $\sin\left(\frac{\delta}{2} + \frac{\phi}{2}\right) = n \sin\frac{\phi}{2}$ 를 얻는다.

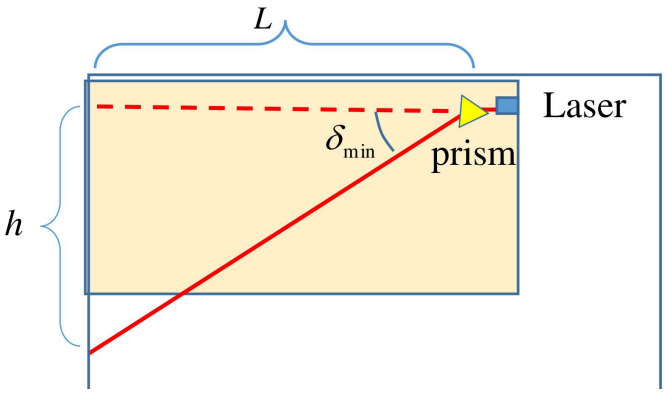
프리즘이 정확히 정삼각형이 아니면 프리즘의 각을 $\phi_i = 60^\circ + 2\varepsilon_i$ 로 표시한다. 삼각형의 각의 합으로부터 $\sum \varepsilon_i = 0$ 을 얻는다. 또한 $\beta_i = 30 + \varepsilon_i$ 이다. 이 경우 $\delta_{\min} = \delta_0 + 2\Delta_i$ 이며, 여기서 δ_0 은 $\phi = 60^\circ$ 일 때의 최소 δ 이다.

스넬 법칙으로부터 $\sin\left(\frac{\delta_0}{2} + 30^\circ + \Delta_i + \varepsilon_i\right) = n \sin(30^\circ + \varepsilon_i)$ 를 얻는다. 작은 각 근사를 쓰면: $\sin\left(\frac{\delta_0}{2} + 30^\circ\right) + \cos\left(\frac{\delta_0}{2} + 30^\circ\right)(\Delta_i + \varepsilon_i) = n \sin 30^\circ + n \cos 30^\circ \cdot \varepsilon_i$

60° 프리즘에 대해 성립하는 식으로부터 $\cos\left(\frac{\delta_0}{2} + 30^\circ\right)(\Delta_i + \varepsilon_i) = n \cos 30^\circ \cdot \varepsilon_i$ 를 얻는다.

세 각 모두에 대해 평균하면 $\langle \Delta_i \rangle = 0$ 을 얻고, 따라서 $n = 2 \sin\left(\frac{\langle \delta_{\min} \rangle}{2} + 30^\circ\right)$

C.2: 거리를 최대한 크게 하기 위해 책상의 전체 길이를 쓴다. 개략도에 설명한 대로, 프리즘이 없을 때 레이저 빔이 스크린(방의 벽)에 수직으로 부딪히도록 장치를 만든다. 접착 테이프로 프리즘 홀더 받침을 책상에 붙인다. 그 위에 프리즘 홀더와 프리즘 자체를 놓는다. 프리즘을 돌려 최소 편향각 δ_{min} 을 찾는다. 그런 다음 프리즘의 각 모서리에 대해 δ_{min} 측정을 반복한다.



측정값은 표에 나와 있다:

모서리 번호	L	h	$\delta_{\min}$
1	141.6 ± 0.2 cm	175.2 ± 0.3 cm	$51.05^\circ \pm 0.1^\circ$
2	141.0 ± 0.2cm	167.1 ± 0.3cm	$49.84^\circ \pm 0.1^\circ$
3	140.7 ± 0.2cm	171.4 ± 0.3cm	$50.62^\circ \pm 0.1^\circ$

$\delta_{\min}$ 의 오차 계산:

$$\tan\delta_{\min} = \frac{h}{L} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\delta_{\min}}\Delta\delta_{\min} = \sqrt{\left(\frac{\Delta h}{L}\right)^2 + \left(\frac{h\Delta L}{L^2}\right)^2}$$

따라서, $\Delta\delta_{\min} = \cos^2\delta_{\min}\sqrt{\left(\frac{\Delta h}{L}\right)^2 + \left(\frac{h\Delta L}{L^2}\right)^2}$

측정값을 대입하면

$$\Delta\delta_{\min} = \cos^2 51.05^\circ \sqrt{\left(\frac{0.3}{141.6}\right)^2 + \left(\frac{175.2\cdot 0.2}{141.6^2}\right)^2} = 0.0017\,rad = 0.1^\circ$$

두 각의 평균값의 오차는

$$\Delta\langle\delta_{\min}\rangle = \frac{0.1^\circ}{\sqrt{3}} = 0.06^\circ = 1\cdot 10^{-3}\,rad$$

표로부터 $\delta_{\min}$ 의 평균값이 $\langle\delta_{\min}\rangle = 50.50^\circ$ 임을 얻는다

따라서 프리즘의 굴절률은

$$n = 2\sin\left(\frac{\langle\delta_{\min}\rangle}{2} + 30^\circ\right) = 2\sin\left(\frac{50.50^\circ}{2} + 30^\circ\right) = 2\sin 55.25^\circ = 1.6433$$

그리고 n 의 오차는: $\Delta n = 2\cos 55.25^\circ \cdot 0.5\Delta\langle\delta_{\min}\rangle = \cos 55.25^\circ \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 6 \cdot 10^{-4}$

따라서: $\quad n = 1.6433 \pm 0.0006$

레이저마다 파장이 표준편차 $\pm 10\,\mathrm{nm}$ 까지 다를 수 있으므로, 문헌에서 찾은 값은
$n(\lambda \pm \Delta\lambda) = 1.6425 \pm 0.0007$ 이다.