E2: 원통형 다이오드 — 풀이

식 1에 로그를 취하면

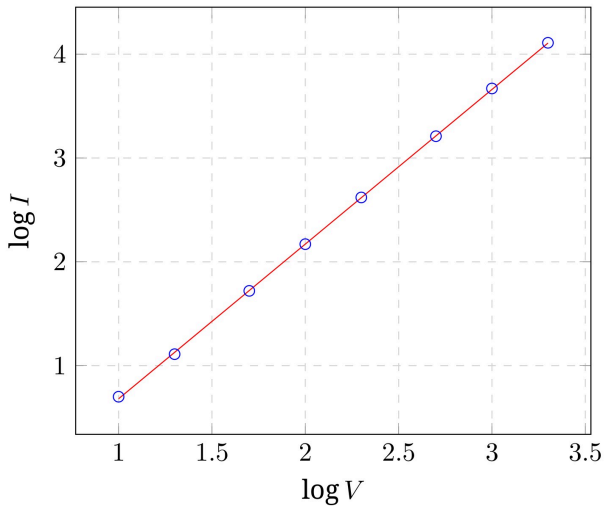
$$\log I_\infty = \log C + \alpha \log R_c + \beta \log L_e + \gamma \log V$$

A.1: V 를 바꾸어 가며 자료를 모은다. 오차를 최소로 하려면 고정하는 변수들을 모두 최댓값으로 잡는다. 즉 $L_e = 99\ \text{cm}$, $R_c = 10\ \text{cm}$, $R_e = 1.0\ \text{cm}$ 이다. 전압은 10에서 2000 사이에 로그 간격으로 분포시킨다.

V(V)	I(mA)	$\log V$	$\log I$
10	5	1.0	0.70
20	13	1.3	1.11
50	52	1.7	1.72
100	147	2.0	2.17
200	415	2.3	2.62
500	1620	2.7	3.21
1000	4630	3.0	3.67
2000	12900	3.3	4.11

이를 그래프로 그리면 최적 맞춤 직선은

$$\log I = 1.490 \log V - 0.8095$$



이므로 $\gamma = 1.49$ 이다.

기울기의 불확도를 통계적으로 분석하면 $\gamma = 1.490 \pm 0.005$ 를 얻는다.

점의 오차 막대를 지나는 직선을 눈으로 맞추어 기울기를 평가하려면, 로그 축에서의 오차 막대가 다음과 같이 주어짐을 고려해야 한다.

$$\delta(\log y) = \delta\left(\frac{\ln y}{\ln 10}\right) = \frac{1}{\ln 10}\frac{\delta y}{y}$$

상대 오차가 가장 큰 것은 값이 가장 작은 양이므로, $V = 10\ \text{V}$ 에서의 $\delta V/V$ 와 $I = 5\ \text{mA}$ 에서의 $\delta I/I$ 에 주목한다. 그 점에서 로그-로그 그래프의 오차 막대는

$$(1 \pm 0.02,\ 0.70 \pm 0.04)$$

이다. 나머지 오차 막대는 더 작다. 그 점 하나에만 주목하여 극단적인 두 직선을 맞추면

$$\gamma = 1.485 \pm 0.025$$

를 얻는다. 두 방법 모두 인정한다.

채점 기준:

자료	V 만 바꿈	0.05점
	$R_e \geq 1\ \text{cm}$	0.05점
	$R_c \geq 10 R_e\ \text{cm}$	0.05점
	$L_e \geq 90\ \text{cm}$	0.05점
	표에 단위가 있음	0.05점
	V 를 로그 간격으로 분포	0.05점
	$V_{\max} \geq 1000\ \text{V}$	0.05점
	$V_{\min} \geq 10\ \text{V}$	0.05점
	$V_{\min} \leq 50\ \text{V}$	0.05점
	계산이 옳음	0.05점
	측정점 7개 이상	0.30/0.30
	측정점 6개	0.25/0.30
	측정점 5개	0.20/0.30
	측정점 4개 이하	0.10/0.30
작도	영역의 50% 이상을 채움	0.10점
	축 이름	0.05점
	축 단위가 옳음	0.05점
	작도 실수 1개	−0.05/−0.10
	작도 실수 2개 이상	−0.10/−0.10
맞춤	그래프에 직선을 그림	0.10점
	기울기를 단위와 함께 옳게 계산	0.10점
	$1.45 < \gamma < 1.55$	0.10점
	기울기의 불확도를 계산	0.10점
	$\delta\gamma \leq 0.03$	0.10점
	합계	**1.5점**

측정 자료는 결과를 계산해 주는 스프레드시트에 입력해야 한다. 편차가 너무 크면 그 자료점은 인정하지 않는다.

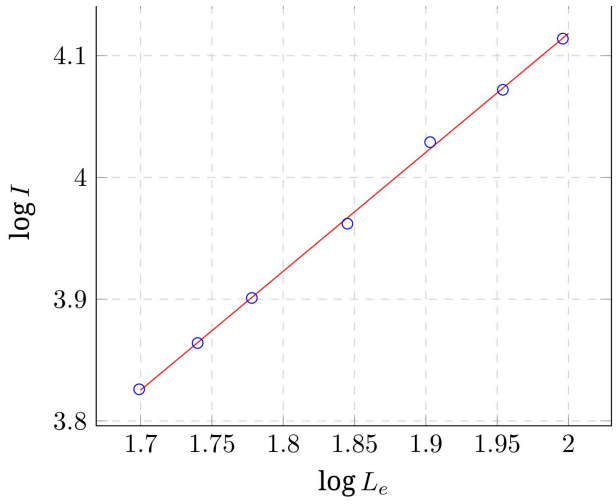
역산(reverse engineering)한 흔적이 있으면 해당 절 전체를 0점 처리한다.

A.2: L_e 를 바꾸어 가며 자료를 모은다. 오차를 최소로 하려면 고정하는 변수들을 모두 최댓값으로 잡는다. 즉 $V = 2000\ \text{V}$, $R_c = 10\ \text{cm}$, $R_e = 1\ \text{cm}$ 이다.

L_e(cm)	I(mA)	$\log L_e$	$\log I$
99	13000	1.996	4.144
90	11800	1.954	4.072
80	10700	1.903	4.029
70	9170	1.845	3.962
60	7960	1.778	3.901
55	7310	1.740	3.864
50	6700	1.699	3.826

이를 그래프로 그리면 최적 맞춤 직선은

$$\log I = 0.9767 \log L_e + 2.1649$$



이므로 $\beta = 0.9767$ 이다.

기울기의 불확도를 통계적으로 분석하면 $\beta = 0.98 \pm 0.02$ 를 얻는다.

가장 가파른 직선과 가장 완만한 직선을 그림으로 맞추면 $\beta = 0.97 \pm 0.02$ 를 얻는다.

채점 기준:

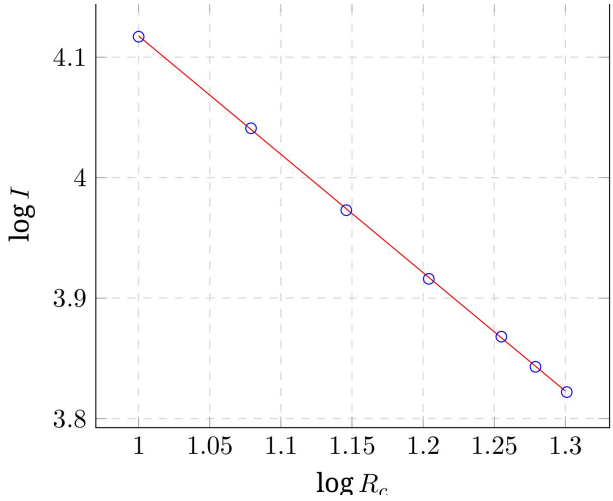
자료	L_e 만 바꿈	0.05점
	$R_e \geq 1\,\text{cm}$	0.05점
	$R_c \geq 10R_e\,\text{cm}$	0.05점
	$V \geq 100\,\text{V}$	0.05점
	표에 단위가 있음	0.05점
	L_e 를 고르게 분포	0.05점
	$L_{e,\text{max}} \geq 90\,\text{cm}$	0.05점
	$L_{e,\text{min}} \geq 3R_c$	0.05점
	$L_{e,\text{min}} \leq 50\,\text{cm}$	0.05점
	유도량의 계산이 옳음	0.05점
	측정점 7개 이상	0.30/0.30
	측정점 6개	0.25/0.30
	측정점 5개	0.20/0.30
	측정점 4개 이하	0.10/0.30
작도	영역의 50% 이상을 채움	0.10점
	축 이름	0.05점
	축 단위가 옳음	0.05점
	작도 실수 1개	−0.05/−0.10
	작도 실수 2개 이상	−0.10/−0.10
맞춤	그래프에 직선을 그림	0.10점
	기울기를 단위와 함께 옳게 계산	0.10점
	$0.97 < \beta < 1.03$	0.10점
	기울기의 불확도를 계산	0.10점
	$\delta\beta \leq 0.03$	0.10점
	합계	**1.5점**

A.3: R_c 를 바꾸어 가며 자료를 모은다. 오차를 최소로 하려면 고정하는 변수들을 모두 최댓값으로 잡는다. 즉 $V = 2000\,\text{V}$, $L_e = 99\,\text{cm}$, $R_e = R_c/10\,\text{cm}$ 이다.

R_c(cm)	I(mA)	$\log R_c$	$\log I$
20	6640	1.301	3.822
19	6970	1.279	3.843
18	7380	1.255	3.868
16	8240	1.204	3.916
14	9390	1.146	3.973
12	11000	1.079	4.041
10	13100	1.000	4.117

이를 그래프로 그리면 최적 맞춤 직선은

$$\log I = -0.9816 \log R_c + 5.1000$$



이므로 $\alpha = -0.9824$ 이다.

기울기의 불확도를 통계적으로 분석하면 $\beta = -0.98 \pm 0.01$ 를 얻는다.

가장 가파른 직선과 가장 완만한 직선을 그림으로 맞추면 $\beta = 0.97 \pm 0.02$ 를 얻는다.

채점 기준:

자료	R_c 만 바꿈	0.05점
	$R_e \geq 1\,\text{cm}$	0.05점
	$R_c \geq 10R_e\,\text{cm}$	0.05점
	$V \geq 100\,\text{V}$	0.05점
	표에 단위가 있음	0.05점
	R_c 를 고르게 분포	0.05점
	$R_{c,\text{max}} \geq 15\,\text{cm}$	0.05점
	$R_{c,\text{min}} \geq 10R_e$	0.05점
	$R_{c,\text{min}} \leq 10\,\text{cm}$	0.05점
	유도량의 계산이 옳음	0.05점
	측정점 7개 이상	0.30/0.30
	측정점 6개	0.25/0.30
	측정점 5개	0.20/0.30
	측정점 4개 이하	0.10/0.30
작도	영역의 50% 이상을 채움	0.10점
	축 이름	0.05점
	축 단위가 옳음	0.05점
	작도 실수 1개	−0.05/−0.10
	작도 실수 2개 이상	−0.10/−0.10
맞춤	그래프에 직선을 그림	0.10점
	기울기를 단위와 함께 옳게 계산	0.10점
	$-1.03 < \alpha < -0.97$	0.10점
	기울기의 불확도를 계산	0.10점
	$\delta\alpha \leq 0.03$	0.10점

	합계	**1.5점**

B.1: 세 자료 묶음과 그 셋에서 얻은 지수를 모두 이용한 뒤 결과를 평균한다.

$$\log C = \log I - 1.495 \log V - 0.9854 \log L_e + 0.9781 \log R_c$$

이로부터

$$C = (0.0165 \pm 0.0003)\ \mathrm{mA/V^{3/2}}$$

를 얻는다. 이론값은 대략 다음과 같다.

$$\frac{8\pi\epsilon_0}{9}\sqrt{\frac{2e}{m}} \approx 1.47 \times 10^{-5}\ \mathrm{A/V^{3/2}}.$$

다만 (교재에서 흔히 β 라 부르는, 우리의 지수 β 와는 다른) 성가신 보정이 있으며 우리는 이를 코드에 넣어 두었다. 참가자가 이를 알아내리라 기대하지는 않는다. 이 보정 때문에 이론값이 그대로 성립하리라 기대하지 않는다. 이론적으로 문제를 풀려는 참가자는 애를 먹을 것이다.

지면 관계상 아래에서는 C 의 수치를 단위를 명시하지 않고 $\mu\mathrm{A/V^{3/2}}$ 단위로 쓴다. 즉

$$C = 16.5\ \mu\mathrm{A/V^{3/2}}$$

이다. 참가자는 반드시 단위를 명확히 써야 한다!

채점 기준:

이론	명확한 서술	0.20점
맞춤	$R_c = 10R_e$ 를 씀	0.10점
	C 를 계산	0.10점
	자료점 9개 초과	0.20/0.20
	자료점 8개 또는 9개	0.15/0.20
	자료점 7개 또는 8개	0.10/0.20
	자료점 5개 또는 6개	0.05/0.20
	C 의 단위가 옳음	0.10점
	$16.2 \le C \le 16.8$	0.10/0.10
	$15.9 \le C \le 17.1$	0.05/0.10
	불확도를 계산	0.10점
	$0.1 < \delta C \le 0.03$	0.10점
	$0 < \delta C \le 0.05$	0.05/0.10
	합계	**1.0점**

"이론의 명확한 서술"이란 어딘가에 자신이 모으고 사용하는 자료에 대한 정당화가 있다는 뜻이다. 로그 식의 형태여도 되며 말로 쓸 필요는 없다. 자료를 다시 이용해도 된다.

C.1: 먼저 L_e 가 중요하다고 가정하고 R_c 근처의 값들을 살펴본다. 다른 변수에 대해서도 되풀이한다. C 는 R_c/R_e 비에 의존하므로 이 둘을 함께 바꾸어야 함을 잊지 말라!

가장 가까운 반정수를 쓰면 첫 식은 다음과 같다.

$$I_\infty = C\frac{L_e}{R_c}V^{3/2}$$

그러면

$$F = \frac{I_\mathrm{measured}}{C\frac{L_e}{R_c}V^{3/2}}$$

R_c	R_e	L_e	V	I	I_∞	F
cm	cm	cm	V	mA	mA	
10	1	10	1000	535	500	1.071
12	1.2	10	1000	470	416	1.129
8	0.8	10	1000	647	624	1.036
10	1	12	1000	630	599	1.051
10	1	8	1000	451	400	1.129
12	1.2	12	1000	537	500	1.075
8	0.8	8	1000	537	500	1.075
10	1	10	1100	617	576	1.071
10	1	10	900	457	426	1.072

이로부터 $R_c\uparrow$ 이면 $F\uparrow$, $L_e\uparrow$ 이면 $F\downarrow$, $V\uparrow$ 이면 F 는 변하지 않는다는 결론을 얻는다.

또한 비 R_c/L_e 가 중요한 양으로 보인다는 것도 알 수 있다.

채점 기준:

자료	자료를 분명하게 모음	0.10점
자료	$R_c\uparrow \Longrightarrow F\uparrow$	0.10점
	$L_e\uparrow \Longrightarrow F\downarrow$	0.10점
	$V_c\uparrow$: F 에 뚜렷한 변화 없음	0.10점
	$R_e\uparrow$: F 에 뚜렷한 변화 없음	0.10점
	합계	**0.5점**

C.2: 우리는 다음을 제안한다.

$$F = A + B\frac{R_c}{L_e}$$

여기서 $x = R_c/L_e$ 이다.

채점 기준:

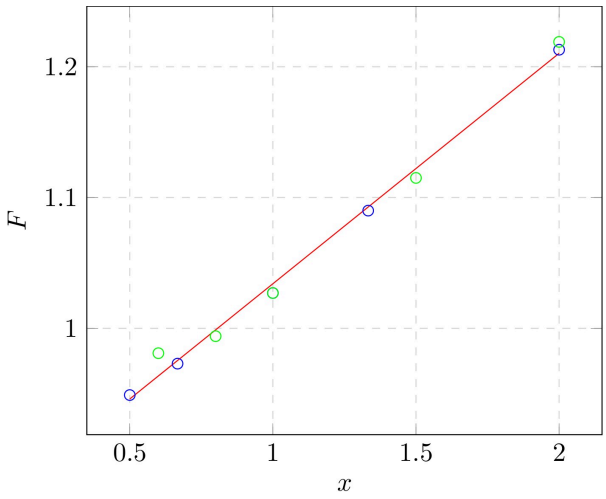
이론	명확한 서술	0.20점
정의	$x = R_c/L_e$	0.30/0.30
	$x = L_e/R_c$	0.15/0.30
	합계	**0.5점**

R_c/L_e 의 상수배도 모두 인정한다.

C.3: 우리의 가설에 치우침이 생기지 않도록 R_c 와 L_e 를 독립적으로 바꾸는 자료를 모으는 것이 중요하다. 또한 파트 B의 상수와 관련된 다른 효과를 피하기 위해 $R_c/R_e = 10$ 의 비를 유지한다.

R_c(cm)	L_e(cm)	I(mA)	I_∞	x	F
20	10	898	740	2.000	1.213
20	15	1210	1110	1.333	1.090
20	20	1520	1480	1.000	1.027
20	30	2160	2221	0.667	0.973
20	40	2810	2961	0.500	0.949
6	10	2420	2467	0.600	0.981
8	10	1840	1850	0.800	0.994
10	10	1520	1480	1.000	1.027
15	10	1100	987	1.500	1.115
20	10	902	740	2.000	1.219

결과를 아래에 그렸다. 파란색은 R_e 를 고정한 값, 초록색은 L_e 를 고정한 값이다.



결과는

$$F(x) = 0.8579 + 0.1762x$$

이며, $x = 1$ 에서 약 3%의 오차가 있다.

이차 함수로 맞추는 편이 더 낫겠다고 생각했다면 그 생각이 옳다. 그러나 이 실험에서 그렇게 할 시간은 정말로 없다.

채점 기준:

자료	L_e 를 바꿈	0.10점
	R_c 를 바꿈	0.10점
	$R_e \geq 0.5\,\mathrm{cm}$	0.05점
	$R_c = 10R_e\,\mathrm{cm}$	0.05점
	$V \geq 500\,\mathrm{V}$	0.05점
	표에 단위가 있음	0.05점
	$L_e \geq 10\,\mathrm{cm}$	0.05점
	$L_{e,\max} \leq 40\,\mathrm{cm}$	0.05점
	L_e 가 잘 분포됨	0.05점
	R_c	0.05점
	유도량의 계산이 옳음	0.10점
	측정점 10개 이상	0.30/0.30
	측정점 9개	0.25/0.30
	측정점 8개	0.20/0.30
	측정점 6개 또는 7개	0.10/0.30
	측정점 5개 이하	0.05/0.30
작도	영역의 50% 이상을 채움	0.10점
	축 이름	0.05점
	축 단위가 옳음	0.05점
	작도 실수 1개	−0.05/−0.10
	작도 실수 2개 이상	−0.10/−0.10
맞춤	그래프에 직선을 그림	0.10점
	기울기를 단위와 함께 옳게 계산	0.10점
	$0.17 < B < 0.18$	0.10점
	합계	**1.5점**