구리 막대에서의 열전도 (10점)

실험 장치

이 실험에서는 길이 57.0 cm, 지름 1.20 cm인 구리 막대를 정사각형 플랜지로 지지된 금속 상자의 길이 방향으로 가로질러 놓았다(그림 1). 이 금속 상자는 상자 안의 공기 흐름을 차단하는 역할을 한다.



그림 1: 실험 장비의 전체 모습

그림 2와 같이 막대의 양쪽 끝에서 각각 7.0 cm 되는 부분은 스티로폼으로 단열되어 있다. 막대에는 7.0 cm 간격으로 일곱 개의 구멍이 뚫려 있고, 각 구멍의 깊이는 0.6 cm이며 그 안에 온도 센서(서미스터)가 들어 있다. 이 센서들은 왼쪽에서 오른쪽으로 1번부터 7번까지 번호가 매겨져 있다. 같은 종류의 센서 8번은 상자 안의 주변 온도(θ_b)를 감시하기 위해 상자 안에 놓여 있다.

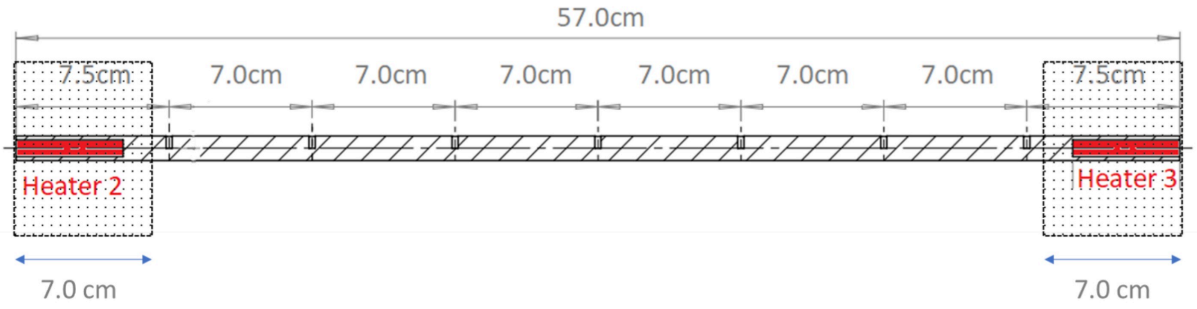


그림 2: 구리 막대와 뚫린 구멍들

막대의 단열된 양쪽 끝에는 길이 방향으로 뚫린 5.2 cm 길이의 구멍 안에 출력이 서로 다른 두 개의 전기 히터가 설치되어 있다. 왼쪽과 오른쪽 히터를 각각 히터 2번과 3번이라고 한다. 금속 상자 위쪽의 팬 네 개가 상자 안과 막대 주위의 공기 흐름을 조절한다. 이 팬들과 구리 막대는 그림 3과 같이 아래에서 볼 수 있다.



그림 3: 아래에서 본 모습

앞면에는 AVA-T403이라고 부르는 제어판이 설치되어 있다. 팬, 히터, 타이머 등 실험의 여러 부품을 켜는 스위치가 모두 이 제어판에 있으며, 센서로 측정한 값은 모두 제어판의 화면에 표시된다. 모든 장비를 작동시키는 데 필요한 전력은 콘센트에 연결된 24 V 전원 공급 장치가 제공하며, 이 장치는 상자 옆에 놓여 있다.

제어판 오른쪽에는 12.0 cm의 더 짧은 구리 막대가 설치되어 있으며, 이 역시 스티로폼으로 덮여 있다. 스티로폼 아래에는 그림 4와 같이 오른쪽의 길이 방향 구멍 안에 출력이 $1.95 \pm 0.06\ \mathrm{W}$ 인 히터 1번이 들어 있다. 반대쪽 끝에는 또 다른 길이 방향 구멍이 뚫려 있고, 그 안에 PT100(백금 저항 온도계 100)과 (다른 서미스터와 같은 종류의) 서미스터 R_9 가 함께 묶여 들어 있다. 이 두 센서와 히터는 AVA에 연결되어 있으며, AVA는 이들의 저항값(단위 Ω)을 표시한다.

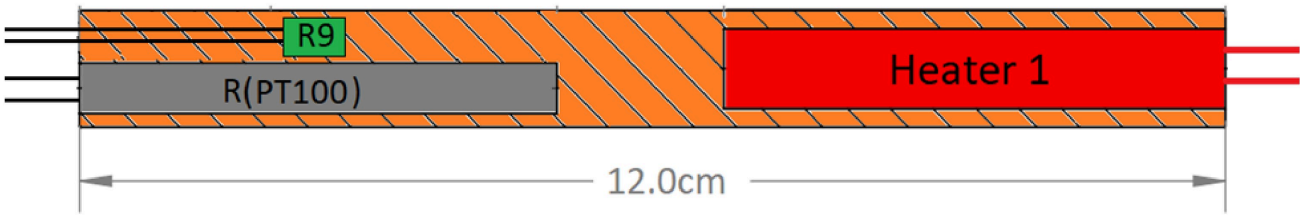


그림 4: 더 짧은 구리 막대

다음 사항을 지켜 주기 바란다.

1. 지시가 있기 전에는 장비의 버튼을 만지거나 작동시키지 마라.
2. 장치에 대해 따로 할 일은 없다. 장치를 건드리지 않도록, 그리고 전선을 뽑지 않도록 주의하라.
3. 실험 중에 장치를 옮기지 마라.
4. 화면에 "Turn off Heater1"이라는 메시지가 뜨면 즉시 히터 1번을 꺼라.
5. 히터를 켜면 온도가 올라가므로 계가 정상 상태에 도달하는 데 시간이 더 걸린다. 불필요하게 히터를 켜지 않도록 하라.

6. 답안지에 $\pm$ 기호가 있는 경우에는 오차를 계산하여 보고해야 한다.

7. 회귀(아래 식에서 reg로 표기하며 계산기에는 r로 표시된다)는 1과 −1 사이의 수로, 자료가 직선에 얼마나 잘 맞는지를 나타낸다. $|\mathrm{reg}| = 1$ 이면 자료가 완전히 한 직선 위에 있다는 뜻이다.

기울기 b 의 불확도를 계산하는 데 다음 식을 쓸 수 있다.

$$\Delta b = b\sqrt{\frac{1}{(n-2)}\left(\frac{1}{\mathrm{reg}^2} - 1\right)}$$

여기서 n 은 자료점의 개수이다.

장비

1. 일반적으로 전기 저항은 온도 변화에 대해 서로 다른 거동을 보인다. 널리 쓰이는 저항 중 하나가 PT100인데, 이는 상당히 넓은 온도 범위에서 선형 거동을 보인다. 즉

$$R = R_0(1 + \alpha\theta) \tag{1}$$

   여기서 R_0 는 $0\,^\circ\mathrm{C}$ 에서의 저항값, α 는 (이 문제의 온도 범위 안에서) 상수 계수, θ 는 섭씨 온도이다. 이 문제에서 사용하는 저항의 α 값은 $0.0039083\,^\circ\mathrm{C}^{-1}$ 이다. PT100의 경우 $R_0 = 100.00\,\Omega$ 이다.

2. 서미스터 1번부터 9번까지는 온도 변화에 대해 비선형 거동을 보이며, 보통 작은 온도 변화를 측정하는 데 쓰인다. 이 서미스터들의 저항은 온도에 따라 다음과 같이 변한다.

$$R' = R'_0\, e^{\frac{E_g}{2k_B T}} \tag{2}$$

   여기서 R'_0 는 상수, $k_B = 8.61733 \times 10^{-5}\ \mathrm{eV/K}$ 는 볼츠만 상수, T 는 켈빈 단위의 온도, E_g 는 서미스터 반도체 물질의 에너지 간격이다. $T = (\theta + 273.15)\ \mathrm{K}$ 임을 기억하라.

3. 디지털 장치 AVA는 이 실험을 위해 이란 기술자들이 특별히 설계한 것이다. AVA는 서미스터 1번부터 7번까지, PT100, 그리고 θ_b 또는 R_9 의 순간 저항을 2초마다 측정한다. 그런 다음 식 (2)에 근거하여 이 센서들의 온도를 알려 준다. 다만 9번 센서의 경우에는 저항값만 표시된다. AVA 화면 왼쪽에는 1번부터 7번 센서의 온도가 한 열에 표시된다. 그러나 마지막 행에는 매 순간 8번 센서의 온도 또는 9번 센서의 저항 (R_9) 중 하나만 표시된다. 그림 5에 표시된 $\theta_b - R_9$ 버튼을 눌러 이 두 값을 번갈아 볼 수 있다.

   AVA에는 타이머도 있는데, 시중의 일반적인 타이머와 매우 비슷하게 작동한다. Start/Stop 버튼을 누르면 타이머가 경과 시간을 재기 시작하고, Start/Stop 버튼을 다시 누르면 멈춘다. 타이머가 작동하는 동안 Lap 버튼을 누르면 표시 가능한 모든 값이 저장된다. 타이머가 작동하지 않을 때 같은 버튼을 누르면 타이머가 초기화되지만 저장된 자료는 지워지지 않는다. 자료를 지우려면 Lap/Reset 버튼을 5초 동안 누르고 있어야 한다.

   저장된 자료는 Next/Prev 버튼을 반복해서 눌러 볼 수 있다. Prev를 누르면 더 오래된 자료가, Next를 누르면 더 새로운 자료가 표시된다. 장치를 껐다 켜면 저장된 자료는 모두 지워진다. 장치는 자동으로 꺼지지 않는다.

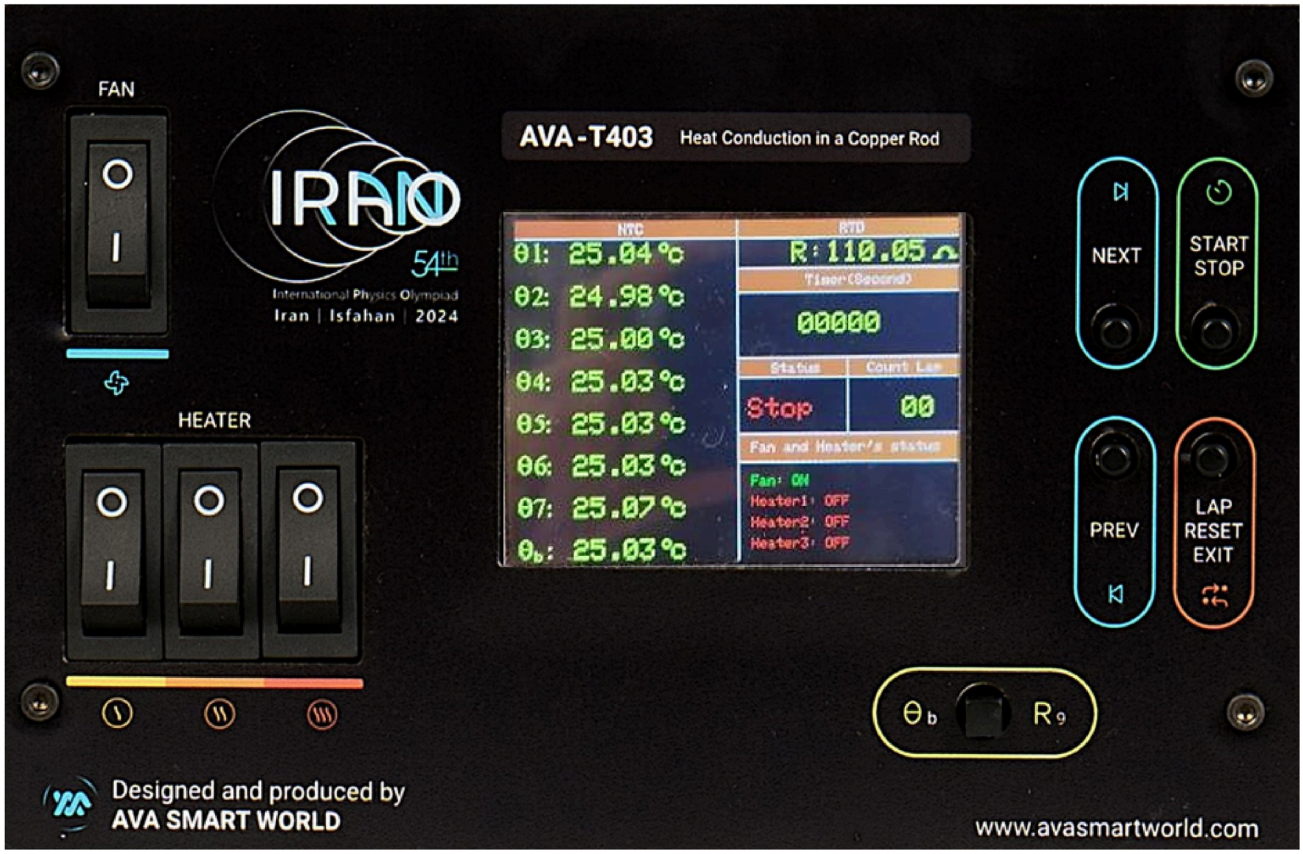


그림 5: Start/Stop 및 Lap 버튼. (키 기능의 자세한 내용은 4쪽의 3번 항목 참조.)

4. 그림 5와 같이 팬을 켜고 끄는 스위치가 하나 ( ) 있고, 히터를 켜는 스위치가 세 개 ( ) 있다. 각 스위치의 기호는 그 아래에 찍혀 있다. 첫 번째 히터는 1.95 W 히터이고, 두 번째 히터의 출력은 그림 6과 같이 장치에 적혀 있으며, 세 번째 히터의 출력은 알려져 있지 않다.

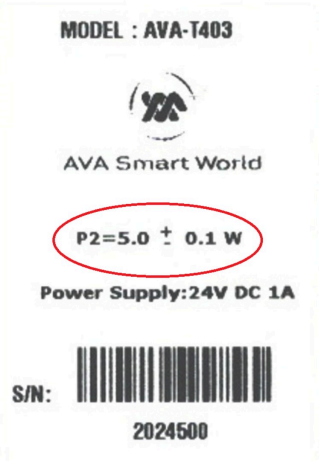


그림 6: 두 번째 히터의 출력

이론

이 문제에서 열은 막대 안에서는 전도로 전달되고, 막대에서 주위 공기로는 자연 대류 또는 강제 대류로 전달된다. 또한 막대의 열용량 때문에 막대에 주입된 열의 일부는 막대의 온도를 올리는 데 쓰인다.

(a) **열전도**: 옆면에서 열손실이 없는 막대 모양의 열전도체에서, 정상 상태에서 미소 요소(그림 7)를 지나는 열전달률 dQ/dt 는 다음과 같다.

$$\frac{dQ}{dt} = -kA\frac{d\theta}{dx} \tag{3}$$

여기서 $d\theta$ 는 미소 요소 양쪽 끝 사이의 온도차, A 는 단면의 넓이, dx 는 미소 요소의 길이, k 는 막대를 이루는 물질의 종류에 따라 정해지는 열전달 계수(열전도도)이다.

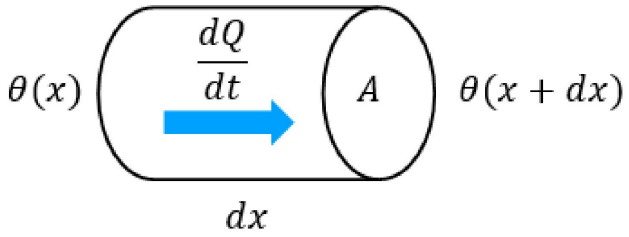


그림 7: 미소 열전도 요소. (대류가 없을 때의 열전도)

(b) **대류**: 옆면을 통해 공기와 열을 주고받는 물체에 대해서는 다음 관계가 성립한다.

$$\frac{dQ}{dt} = -hS\Delta\theta \tag{4}$$

여기서 S 는 옆면의 넓이, $\Delta\theta$ 는 물체와 주위 공기 사이의 온도차, h 는 물체의 모양과 물체 옆면을 통한 열 흐름의 성질에 따라 정해지는 대류 열전달 계수이다.

실험

시간을 아끼기 위해, 파트 B에서 필요한 히터 2번과 팬을 미리 켜 둘 것을 권한다. 다른 히터는 켜지 않도록 하라.

파트 A: 짧은 구리 막대 (3.9점)

A-0	표에 0부터 9까지의 수를 써 넣어라.	0 pt

히터 1번을 켜기 전에 작은 막대는 주위와 같은 온도에 있다. 문항 A-1부터 A-3까지는 가열 과정에, A-4부터 A-7까지는 막대의 냉각 과정에 해당한다.

A-1	주위 온도에 있을 때 저항 R_{env}(PT100의 저항)의 처음 값을 기록하라. 식 (1)을 이용해 이 온도를 구하라.	0.2 pt

막대와 히터, 센서를 합한 전체 열용량을 C_S 라 하자. C_S 를 구하려면 히터 1번을 켜고 최소 150초 동안 저항값의 변화를 측정해야 한다. 센서의 가열과 냉각에는 시간 지연이 있음에 유의하라.

A-2	약 10초 간격으로 R 값을 기록하라. 이를 최소 15회 하라.	0.5 pt

A-3	파트 A-2에 대한 그래프를 그리고, 자료에 직선을 맞추어 기울기를 구하라. 그 기울기를 이용해 C_S 를 구하라.	0.8 pt

R 값이 $120\ \Omega$ 에 도달할 때까지 기다린 뒤 히터 1번을 꺼라. 몇 초 뒤부터 막대의 온도와 저항 R 이 천천히 감소하기 시작한다. PT100이 식을 때 저항은 다음과 같이 주어진다.

$$R - R_{env} = Ae^{-\gamma t} \tag{5}$$

여기서 A 와 γ 는 상수이다.

A-4	서로 다른 여러 시각에 $R - R_{env}$ 의 값을 측정하라.	0.5 pt

A-5	파트 A-4의 자료를 반로그 그래프로 그려라. 그런 다음 γ 를 구하라.	0.7 pt

막대 주위의 단열재는 저항이 더 빨리 열평형에 도달하게 하고, 막대의 온도 분포를 더 균일하게 만든다.

A-6	서미스터 9번의 저항 R_9 를 R 에 대해 측정하여 기록하라. 되도록 $114 - 120\ \Omega$ 범위에서 서로 다른 R 값을 최소 일곱 개 측정하라.	0.5 pt

A-7	주어진 반로그 그래프 용지에 저항 R_9 를 $1/T$ 에 대해 그리고, 에너지 간격 E_g 의 크기를 eV 단위로 구하라.	0.7 pt

파트 B: 긴 구리 막대 (4.1점)

막대가 정상 상태에 도달할 때까지, 즉 모든 지점에서 측정한 온도가 일정하게 유지될 때까지 기다린 뒤 다음 문항에 답하라. 서미스터 1~7번의 온도를 각각 θ_1 부터 θ_7 까지로 나타낸다. 서미스터 1번의 위치를 $x = 0$ 으로 잡는다.

B-1	막대가 정상 상태에 도달하면 θ_b 와 막대 위 일곱 지점의 θ_x 를 측정하여 기록하라.	0.4 pt

시간을 아끼기 위해 파트 C를 먼저 살펴본 뒤 파트 B를 계속하라.

B-2	반로그 용지에, 막대의 길이 방향을 따라 상자의 온도와 점 x 에서의 온도의 차 $(\theta_x - \theta_b)$ 에 대한 그래프를 그려라.	0.4 pt

히터 2번으로부터 막대 길이 방향의 거리의 함수로서 온도가 다음 관계를 따름을 보일 수 있다.

$$\theta_x = \theta_b + Ae^{-\lambda x} + Be^{\lambda x} \tag{6}$$

여기서 θ_b 는 상자의 주변 온도, A 와 B 는 상수이며 $\lambda = \sqrt{\dfrac{2h}{kr}}$ 이고 r 은 막대의 반지름이다. 첫 단계로 x 가 큰 값에 해당하는 자료를 무시하고 B 를 0으로 놓을 수 있다. 이 경우 λ 와 A 의 1차 근삿값을 구할 수 있으며, 이를 $\lambda^{(0)}$ 와 $A^{(0)}$ 라 하자.

B-3	온도 θ_1 부터 θ_5 까지를 사용하고 파트 B-2의 그래프를 이용하여 $\lambda^{(0)}$ 와 $A^{(0)}$ 를 구하라.	0.6 pt

히터에서 가장 먼 막대 끝의 온도는 x 에 따라 변하지 않는다. 이런 일이 대략 거리 $x = d$ 근처에서 일어난다고 하자. 이를 이용하여 B 를 λ, A, d 로 나타낼 수 있다.

B-4	B 를 λ, A, d 로 나타내고, $d = 44.0\ \mathrm{cm}$ 에 대해 파트 B-3의 결과를 이용하여 그 수치를 구하라. 이 양을 $B^{(1)}$ 이라 하자.	0.4 pt

이제 B 에 대해 얻은 값을 이용해 앞의 계산을 보정할 수 있다. 그러기 위해 다음과 같이 놓는다.

$$\theta'_x = \theta_x - B^{(1)} e^{\lambda^{(0)} x}$$

B-5	θ'_1 부터 θ'_7 까지를 구하고 표 B-1에 추가된 열을 채워라.	0.4 pt

B-6	새 그래프를 그려 λ 와 A 의 값을 구하라. 이들을 각각 $\lambda^{(1)}$ 과 $A^{(1)}$ 이라 하자.	1.0 pt

정확한 근삿값을 얻으려면 보정을 여러 번 반복해야 하지만, 결국 최종 답은 $\lambda = \dfrac{\lambda^{(0)} + \lambda^{(1)}}{2}$ 와 $A = \dfrac{A^{(0)} + A^{(1)}}{2}$ 에 가깝다는 것을 알게 된다.

B-7	구리 막대에 들어오는 일률과 나가는 일률의 균형을 이용하여 h 와 k 를 구하라.	0.9 pt

파트 C: 미지의 출력 측정 (2.0점)

팬이 켜진 상태에서 히터 2번과 3번을 켜고, 구리 막대의 모든 지점에서 온도가 평형에 도달할 때까지 기다려라. (약 15분이 걸린다.)

C-1	θ_1 부터 θ_7 까지를 측정하여 기록하라.	0.4 pt

이 경우 온도가 x 에 따라 다음과 같이 변함을 보일 수 있다.

$$\theta_x - \theta_b = A' \cosh(\lambda(x - x_0))$$

여기서 A' 은 상수이고 $\cosh(u)$ 는 다음과 같이 정의되는 u 의 쌍곡코사인 함수이다.

$$\cosh(u) = \frac{e^{u} + e^{-u}}{2}$$

C-2	온도를 거리에 대해 그린 그래프를 그리고 x_0 를 구하라.	0.6 pt

C-3	자신만의 방법을 사용하여 히터 3번의 유효 출력을 구하라. 결과에 이르는 데 사용한 수식을 명시적으로 적어 방법을 되도록 분명하게 설명하라.	1.0 pt