지구 자기장 측정(10점)

문제의 개요

이 문제는 지구 자기장의 수평 성분을 측정하는 것을 목표로 한다. 자석의 특성을 구이 저울(Gouy balance)이라고 불리는 힘센서를 이용하여 파악한 후, 이를 통해 지구 자기장을 측정한다.

본 문제 전체에서 에러의 계산은 개별 실험 데이터 포인트가 아니라 오직 피팅(fitting)에 대해서만 고려한다.

장비 목록

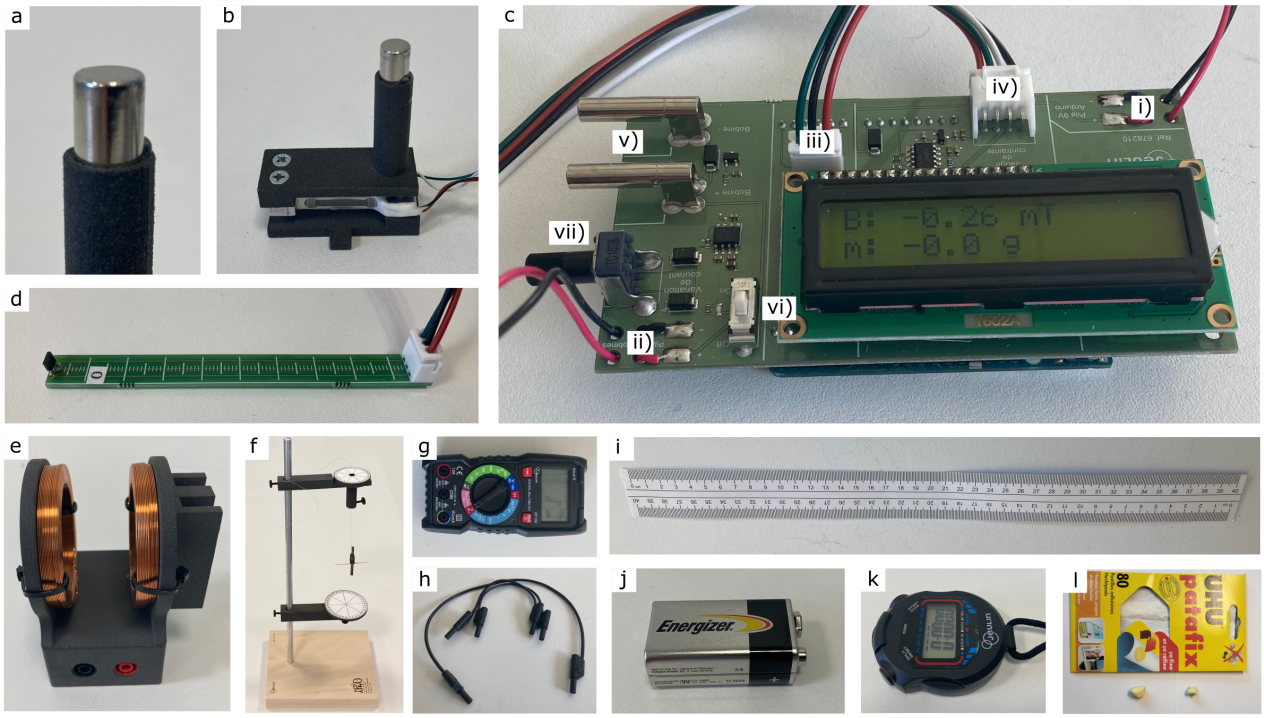


그림 1. 모든 장비의 사진.

그림1의 실험 장비 목록은 아래에 있다. 장비의 수량이 1개보다 많을 경우에는 괄호 [] 안에 표시하였다. 실험 장치가 제대로 작동하지 않는다고 생각되면, 학생들은 도움을 요청해야 한다.

- **(a)** 자석 [3]. 자석 하나는 힘 센서(b)에 부착되어 있으며 제거해서는 안 된다. 다른 자석은 흔들추(f)에 삽입되어 있으며 별도의 지시가 있을 때까지 제거해서는 안 된다. 마지막 자석은 A.5에서 사용될 것이다. 모든 자석은 동일한 것으로 간주한다.
- **(b)** 힘 센서. 전기회로(Arduino)(c)에 연결된 이 센서는 원통의 축방향 힘을 측정한다. 그램-힘(”g”) 단위로 표시되고, 문제에서 그 값을 m_{f}로 나타낸다. 여기서 그램힘은 지구 표면에서 1그램의 질량이 중력장 ($g_0 = 9.81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$)에서 받는 힘을 의미한다. 이 센서에는 자석(a) 중 한 개가 부착되어 있다. 센서의 전원을 껐다 켤 때마다 디스플레이 값은 상황에 관계없이 0으로 초기화된다. 이 센서에는 200 g 이상의 힘이 가해져서는 안 된다. 포장 개봉 시 주의하시오.
- **(c)** 디지털 디스플레이가 장착된 전기회로(Arduino). 이 장치는 코일(e)에 전원을 공급하고, 힘과 자기장을 측정한다. 각각 그램-힘(”g”) 및 밀리테슬라(mT) 단위로 직접 표시된다. 전기회로의 전원을 공급하는 배터리(j)는 슬롯(i)에, 코일(e)의 전원을 공급하는 배터리(j)는 슬롯(ii)에 연결해야 한다(연결 시 극성에 주의할 것). 힘 센서(b)와 자기장 센서(d)는 각각 슬롯(iii) 및 (iv)에 연결하고, 코일 전원 케이블은 슬롯(v)에 연결해야 한다. 스위치(vi)는 코일 전원 회로를 열고 닫는다(LED로 상태가 표시됨). 코일 회로의 전류는 (vii)를 통해 조절할 수 있다.

- **(d)** 눈금자가 부착된 자기장 센서. 이 장치는 전기회로(Arduino)(c)에 연결되어 있으며, 자의 방향($\vec{e_z}$)을 따라 자기장(B_z)을 mT 단위로 측정한다.
- **(e)** 안티-헬름홀츠(anti-Helmholtz) 형태의 코일(두 코일이 서로 반대 방향으로 감겨 있음). 자기장을 생성하기 위해, 이 코일은 전류계(g)와 직렬로 연결한 뒤 전기회로(c)에 연결해야 한다.
- **(f)** 나무 받침 위에 설치된 금속 스탠드. 각도 눈금이 표시되어 있으며, 자석(a)이 설치된 곳에 매달린 흔들추(pod)가 부착됨. 이 장치의 상세한 조립 방법은 아래에서 설명함.
- **(g)** 멀티미터. 전류계로만 사용되며 $10\,\mathrm{A}$의 범위를 가지고 있다. 일정시간 사용하지 않으면 멀티미터는 자동으로 꺼지며, 다시 켤 때는 반드시 스위치를 ”OFF” 위치로 돌렸다가 켜야 한다. 멀티미터 케이스에 제공된 두 개의 케이블은 사용하지 않는다.
- **(h)** 전선 [3].
- **(i)** $40\,\mathrm{cm}$ 눈금자.
- **(j)** $9\,\mathrm{V}$ 배터리 [3]. 배터리 한 개의 용량은 대략 $300\,\mathrm{mA\cdot h}$ 정도이다.
- **(k)** 스탑워치 (chronometer).
- **(l)** 접착력있는 점토. 본 문제 전체에서 사용가능함.

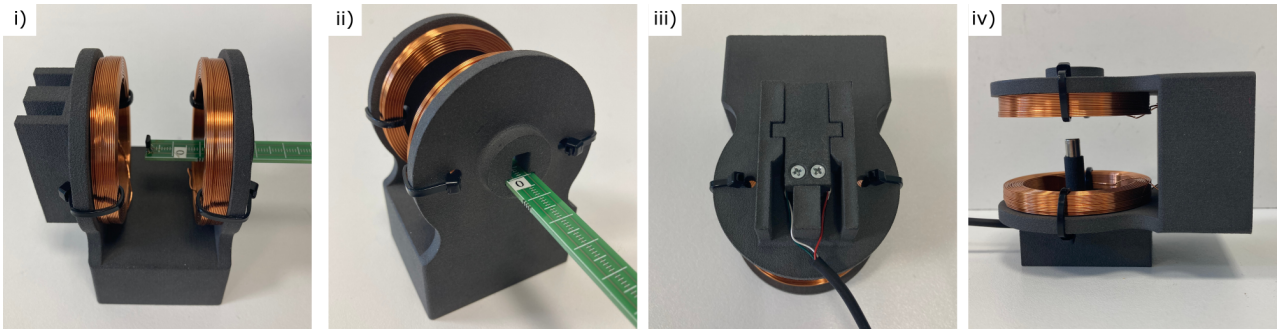


그림 2. 안티-헬름홀츠 코일 내부에서 센서의 사용 방법.

전기회로(Arduino) 인터페이스 센서 사용(그림 2)

자기장 센서(d)는 (i)에서 나타난 것처럼 코일(e) 내부를 따라 움직이며, 코일 축을 따라 자기장을 측정할 수 있다. 센서의 $z = 0$ 위치는 (ii)에 표시되어 있으며, 코일 내부로 들어갈수록 z 값이 증가한다.

힘 센서(b)는 (iii)에 나타난 방식으로 코일 내부에 삽입한 뒤, (iv)와 같이 코일을 돌려 힘센서가 수직으로 향하게 한다. 이때 전선이 제공된 홈을 따라 정리되도록 주의한다.

장치 (f)의 설치 방법 (그림 3). 이 장치는 파트 B를 시작하기 직전에 설치한다. $34\,\mathrm{cm}$ 길이의 와이어를 이용한다.

- 금속 막대(f0a)를 플라스틱 받침이 부착된 나무판(f0b)에 삽입하여 지지대(f0)를 조립한다.
- 부품(f1)은 하단에 위치하며 흔들추(pod)의 수평 회전각도를 측정하는 눈금을 제공한다. 나사를(f4) 이용하여 팔(f1b)을 금속 막대에 고정한다. 그 후 또 다른 나사(f4)를 사용하여 부품(f1a)을 팔 위에 고정한다.
- 부품(f2)는 상단에 위치하며, 흔들추(pod)를 지지하는 와이어를 고정한다. 나사(f4)를 사용해 팔(f2b)을 금속 막대에 고정한 다음, 부품(f2a)를 그 위에 삽입한다.
- 흔들추(pod) (f3)를 조립하기 위해서, 먼저 자석(a)이 이미 삽입된 부품(f3a)에 관성 막대(f3b)와 이쑤시개(f3c)를 끼운다. 그다음, 흔들추를 지지하는 와이어를 부품(f2a)에 삽입하고 나사(f4)로 고정한다. 부품(f2a)를 돌려 와이어가 부착된 각도를 조정할 수 있다. 이쑤시개는 흔들추(pot)의 수평 회전각도를 정확히 측정할 수 있도록 돕는다.

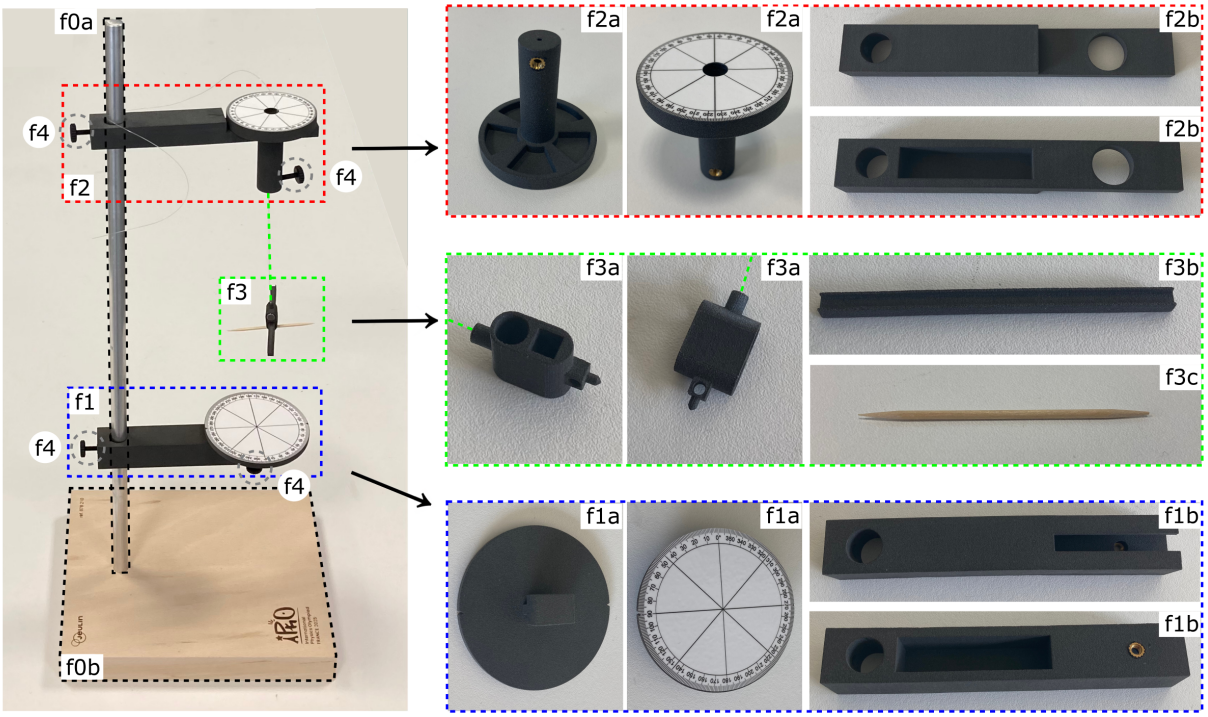


그림 3. 금속 지지대에 흔들추(pod)를 설치하는 모습. 부품(f1a), (f1b), (f2a), (f2b), 그리고 (f3a)를 두 가지 다른 각도에서 보여준다. 플라스틱 나사(f4)는 총 네 개이며 모두 동일하다.

파트 A. 구이 저울(Gouy balance)과 자기 모멘트

모델링

자석을 자기 쌍극자로 취급할 수 있다고 가정하며 $\vec{m}_{\mathrm{m}}$ 로 나타낸다. 자기장 $\vec{B} = B(z)\vec{e_z}$ 가 존재할 때, 자기 쌍극자의 모멘트 $\vec{m}_{\mathrm{m}} = m_{\mathrm{m}}\vec{e_z}$ 가 느끼는 힘은 다음과 같다.

$$\vec{F}(z) = m_{\mathrm{m}}\frac{dB(z)}{dz}\vec{e_z}\,. \tag{1}$$

전류 i 가 안티-헬름홀츠 코일을 통해 흐를 때, 코일 축 $(\vec{e_z})$ 방향의 자기장 $\vec{B}$ 은 다음과 같다.

$$\vec{B}(z) = \alpha i(z - z_0)\vec{e_z}\,. \tag{2}$$

이 방정식은 $z = z_0$ 로 표시된 코일의 중앙 주변에서만 유효하다.

코일의 자기장

A.1	전류가 약 $2\,\mathrm{A}$ 인 경우에 대하여, 실험에서 사용되는 배터리의 일반적인 작동 시간 τ 를 수치적으로 추정하시오.	0.2pt

이 결과는 이후 실험 절차를 설계할 때 고려해야 하며, 코일은 오직 파트 A에서만 사용된다는 점에 유의하시오. 필요할 경우 여분의 배터리가 준비되어 있다.

그림 2에 나타난 바와 같이, 자기장 센서를 코일 내부에 삽입하시오. 코일 내부에서의 센서의 위치를 확인할 때에도 이 그림을 참조하시오.

A.2	전류를 $i_0 \simeq 1.0\,\mathrm{A}$ 로 고정한 상태에서, 코일 축을 따라 센서의 위치 z 에 따른 자기장 B_z 을 측정하고 그래프를 그리시오. 실험값을 바탕으로, 자기장이 위치에 대해 선형적으로 변하는 구간의 최대 영역 $[z_{\mathrm{min}}, z_{\mathrm{max}}]$ 을 찾으시오.	0.8pt

A.3	자기장이 위치에 대해 선형으로 변하는 구간 내부의 두 위치 (z_1, z_2) 에서 각각 식 (2)에 따른 자기장 $\vec{B}$ 의 강도의 변화를 검증하는 그래프를 그리시오. 실험적 불확실도를 포함하여 α 의 값을 결정하시오.	0.9pt

구이 저울(Gouy balance)

자기장 센서를 코일에서 제거한 후, 그림 2에 설명된 방식에 따라 힘 센서를 조심스럽게 코일 내부에 배치하시오. 이때 전선이 홈 안에 잘 정리되어 있는지 특별히 주의하시오.

A.4	전류 i 의 함수로 그램-힘 m_{f} 를 실험 측정하시오. 자석의 자기 모멘트 m_{m} 의 값을 추정하기 위한 그래프를 그리고 그 추정의 에러를 같이 나타내시오.	0.8pt

자기 모멘트를 측정하는 또 다른 방법

쌍극자 근사를 사용할 경우, 자석의 중심축인 z축 상에서 자석 자기 모멘트 m_{m}에 의한 자기장은 다음과 같다.

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 m_{\mathrm{m}}}{2\pi (z - z_{\mathrm{a}})^3}, \tag{3}$$

여기서 z_{a} 는 자석의 중심일 필요는 없다. $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}\,\mathrm{H\cdot m^{-1}}$ 으로 주어진다.

A.5	여분의 자석을 이용하여, 자석의 중심축을 따라, 거리 z에 따른 자기장 B_z 를 측정하라. 식 (3)에 주어진 모델을 검증하기 위해 실험값과 비교하는 그래프를 그리고, 모델에서 벗어나는 부분을 확인하라. 이 그래프를 통해 에러를 포함하여 자기 모멘트 m_{m} 의 값을 새롭게 추정하시오.	1.3pt

A.6	A.4와 A.5에서 얻은 두 값을 통해, 에러를 포함하여 최종 실험 값 m_{m} 을 추정하시오.	0.2pt

파트 B. 지구 자기장의 측정

모델링

지구 자기장의 수평 성분 B_{e} 을 추정하기 위해, 수평면에서의 자석의 비틀림 진동 운동을 분석한다(그림 3 및 그림 3 위의 조립 지침 참조). 자석이 장착된 흔들추(pod, f3)는 수직축을 중심으로 다음의 두 가지 토크를 받는다.

- 와이어에 의한 토크는 $\Gamma_{\mathrm{f}} = -\frac{C_{\mathrm{f}}}{L}(\theta - \theta_0)$로 모델링 된다. 여기서 C_{f} 은 상수이고 L 는 와이어의 두 부착물 사이의 총 길이이다. θ_0 은 와이어가 비틀리지 않은 상태에 해당하는 각도이다.
- 지구 자기장에 의한 토크는 다음과 같이 주어진다: $\Gamma_{\mathrm{e}} = -m_{\mathrm{m}} B_{\mathrm{e}} \sin(\theta - \theta_{\mathrm{e}})$. 여기서 θ_{e}는 지구 자기장의 방향이 수평면에서 향하는 방향의 각도이다.

흔들추(pod)와 자석으로 이루어진 장치의 수직축에 대한 회전 관성모멘트를 미지의 값 J로 나타낼 때, 각운동량 정리에 의해 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \Gamma_f + \Gamma_e = -\frac{C_{\mathrm{f}}}{L}(\theta - \theta_0) - m_{\mathrm{m}} B_{\mathrm{e}} \sin(\theta - \theta_{\mathrm{e}}). \tag{4}$$

다음과 같이 $\sin(\theta-\theta_e)\simeq\theta-\theta_e$로 근사가능할 때, 주기 T를 가지는 사인파 진동이 발생한다.

이 단계에서는 접착력 있는 점토(I)를 원하는 모양과 크기로 만들어 장치에 부착하여 장치구성을 바꿀 수 있다.

주의: 외부 자기장의 방해를 받지 않으려면 자석을 금속 물체나 자기장 소스(다른 자석을 포함)로부터 최소 $20\,\mathrm{cm}$ 이상 떨어진 곳에 배치해야 한다.

실험 셋업 및 첫 번째 측정방법

문제 B.1부터 B.5까지는 와이어의 길이를 $L=34\,\mathrm{cm}$ 로 설정하고, 와이어가 꼬이지 않았는지 주의한다. 그리고, 와이어가 만들어내는 토크가 지구 자기장에 의한 토크에 비해 무시할 수 있을 정도로 작다고 일단 가정하고 실험을 진행한다. 이 가정은 추후 다시 검토될 것이다.

각도 θ_0 와 θ_e 를 정렬 시키기 위해, 부품 (f2a)를 사용하여 θ_0 을 조정하며 자석을 제거하더라도 흔들추(f3)가 수평면에서 회전하지 않도록 한다. 이후 자석을 다시 흔들추에 삽입하고, 문제 B.5까지는 θ_0 을 변경하지 않는다.

B.1 B_e 을 결정하기 위한 실험방법을 제안하라. 측정할 물리량들을 설명하고 (각 물리량의 단위를 함께), 실험구성의 도식도(schematic)을 그려 이 물리량들을 명확히 표시하라. 실험 지침서에 주어진 물리량들과 측정될 물리량들 사이의 관계를 방정식으로 나타내라. 각 물리량에 대해 실험과정에서 고정(Fixed, F)된 값인지, 변화(Varies, V)하는 값인지 명시하라. 0.3pt

B.2 위에서 설명한 방법을 사용하여, B_e 의 값을 추정하기 위한 그래프를 그리고 그 값을 에러와 함께 나타내시오. 1.1pt

와이어에 의한 토크의 측정

B.3 와이어 길이를 $L=34\,\mathrm{cm}$ 로 유지한 상태에서, 자석을 제거한 흔들추(pod)의 수평면에서의 비틀림 진동을 관찰하라. 두 가지 다른 장치구성에 대해 각각 주기 측정을 수행하여 측정에러를 포함한 C_f 의 값을 결정하시오. 측정된 물리량들과 C_f사이의 관계를 나타내는 방정식을 명시하라. 0.7pt

B.4 이미 측정한 값들을 이용하여, 두 토크 Γ_f 와 Γ_e의 진폭 인자인 C_f/L 와 m_mB_e 가 서로 같아지는 임계 길이 L_c에 대한 표현식을 제시하고 수치로 나타내시오. 문제 B.2에서의 비율 $x=(C_f/L)/(m_mB_e)$ 을 구하고, 다음 구간 중에 어디에 속하는지 명시하시오: $0\%\le x<1\%, 1\%\le x<5\%, 5\%\le x<20\%, 20\%\le x<50\%, 50\%\le x<\infty$ 0.3pt

정적상태(static) 측정방법

이제, 지구 자기장을 정적상태로 측정하는 방법을 제안하고자 한다. 자석을 다시 흔들추(pod)에 삽입하고, 그림 3의 부품(f2a)을 사용하여 와이어가 비틀리도록 각도 (θ_0)를 조절하시오.

B.5 와이어 길이를 $L=34\,\mathrm{cm}$ 로 고정한채, 자석의 평형 각도 θ_{eq} 가 와이어의 설정각도 θ_0 에 따라 어떻게 달라지는지 알아보기위한 적절한 그래프를 그리시오. 그 후 에러를 포함해 두 번째 추정값 B_e 을 구하시오. 1.1pt

B.6 길이 L 을 변화시켜가며 앞서 수행한 실험을 다른 두 개의 길이 L 에 대해 반복하여, 와이어의 토크가 가지는 길이 의존성을 검증하시오. 지금까지 측정한 길이 의존성을 요약한 최종 그래프를 이용해 지구 자기장의 수평 성분 B_e의 새로운 값을 에러와 함께 구하시오. 2.3pt