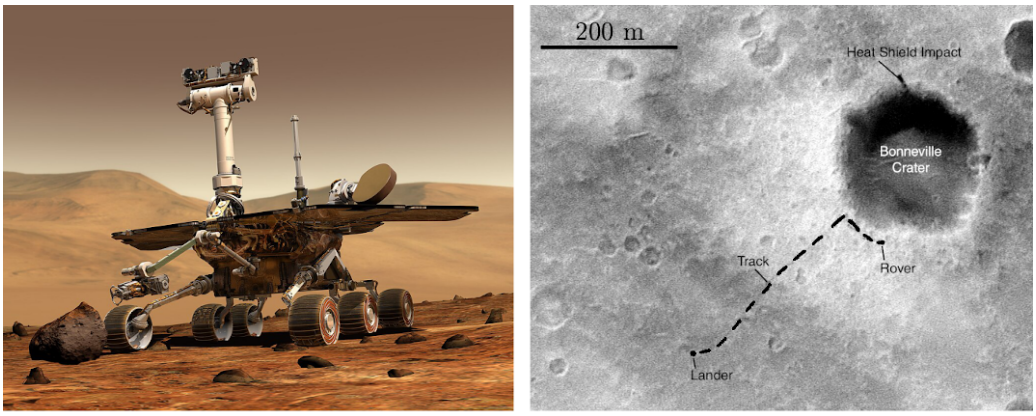
모래 분화구와 모래 언덕 (10.0점)

NASA의 탐사선**(그림 1.**(a))이 화성의 지질과 물의 존재 가능성을 연구하기 위해 2004년에 화성에 착륙했다. 착륙 지점**(그림 1.**(b))은 다양한 크기의 분화구와 모래 언덕으로 둘러싸여 있었다. 탐사선은 화성의 모래 언덕에 갇히지 않도록 주의해야 한다.



(a) (b)

그림 1. (a) 탐사선의 상상도. (b) 화성에 착륙한 탐사선의 착륙 지점. 눈금 막대는 200 m 을 나타낸다.

이 문제는 두 개의 독립적인 문제, A(분화구 형성)와 B(모래에 갇힘 현상)으로 구성되어 있으며, 문제를 푸는 순서는 중요하지 않다. 장비 목록은 아래에 제시되어 있고, 그림 2에 설명되어 있다.

- (a) 플라스틱 상자는 비워야 한다. 비워진 상자 안에서 실험을 하여 실험 중에 넘치는 모래를 모을 것이다.
- (b) 그릇.
- (c) 모래가 담겨있는 플라스틱 통.
- (d) 용기에 담긴 6개의 강철 공. 공의 지름은 4가지이며, 가장 작은 공 3개는 서로 동일함.
- (e) 줄자.
- (f) 고무 받침대가 있는 나무 트레이(f1), 수직 막대(f4), 클램핑 나사(f2), 수평 막대(f3)로 구성된 고정 장치. 이 부품들은 사진(f)에 표시된 대로 조립해야 한다.
- (g) 체. 작은 공을 모래 속에서 잃어버렸을 때 찾는 데 사용한다.
- (h) 알루미늄 레일, 1 m 길이.
- (i) 브러시: 필요한 경우 레일과 공에서 모래를 제거하는데 사용함.
- (j) 나무 트랙.
- (k) 스톱워치 (정밀 시계)
- (l) 접착력 있는 점토.
- (m) 깔때기: 마지막에 모래를 상자에 다시 넣는 데 도움이 됨.
- (n) 스푼.
- (o) 눈금자.

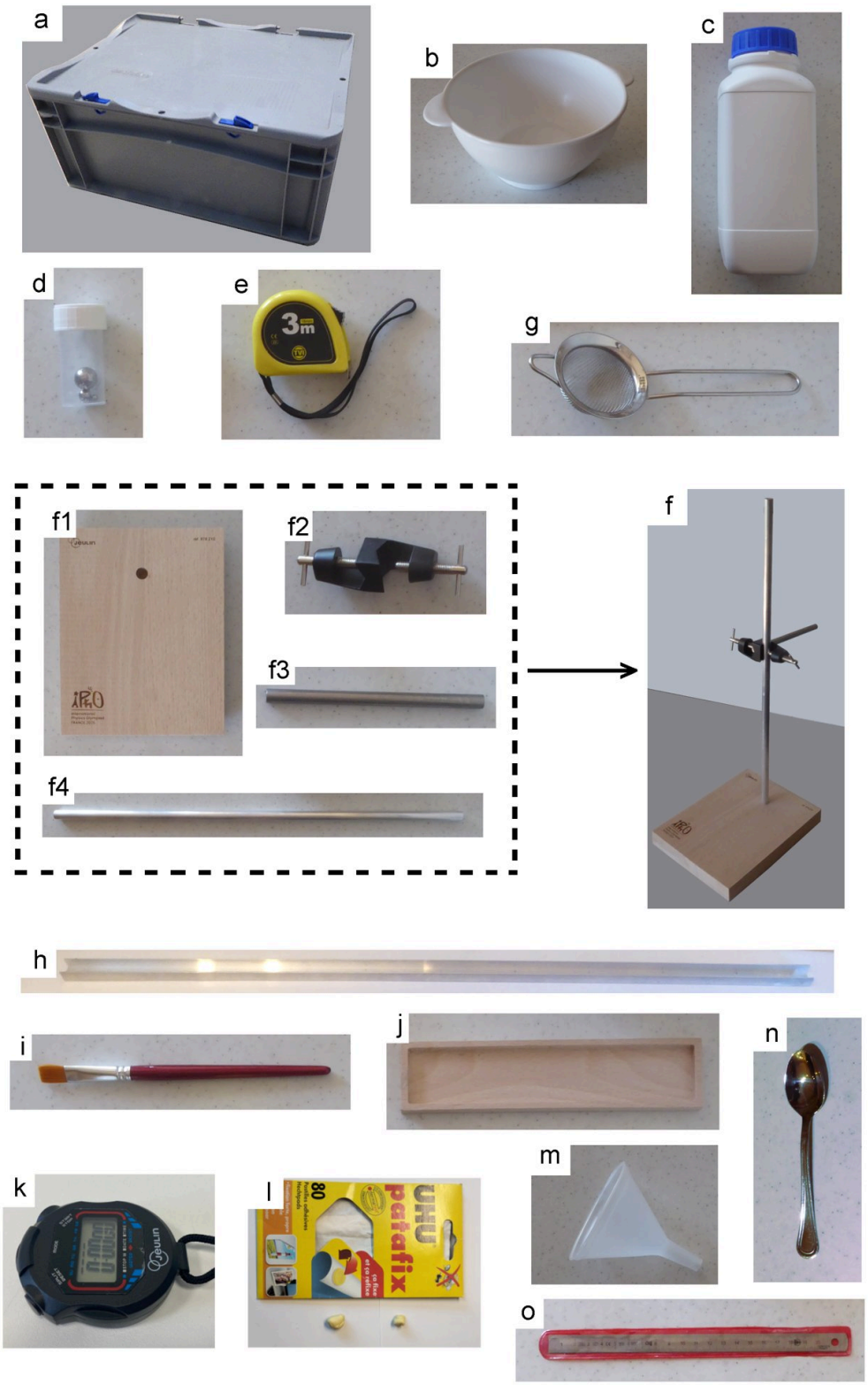


그림 2. 모든 장비의 사진.

A. 충격 분화구

화성의 분화구는 운석 충돌에 의해 형성되며, 그 직경 D가 약 $10\,\mathrm{m}$ 에서 수백 킬로미터까지 다양하다. D는 충돌 물체의 직경 d와 에너지 E **(그림 3)**의 함수이며, 그 구체적인 함수 형태는 사용하는 물리 모델에 따라 달라진다.

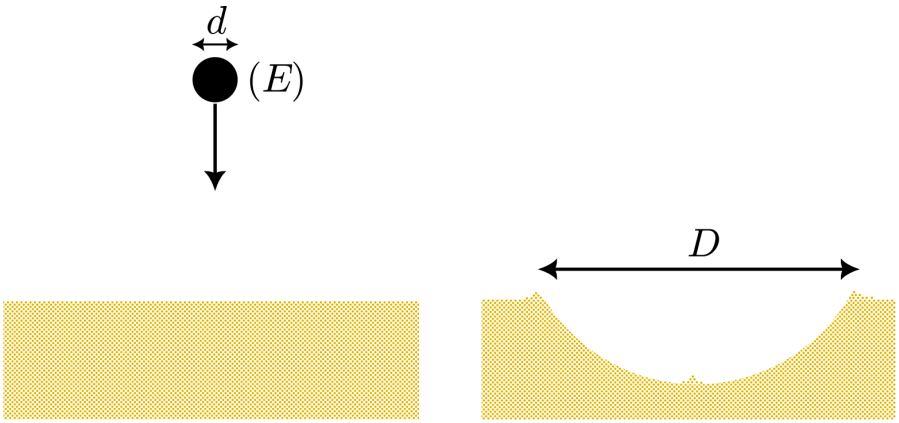


그림 3. 분화구 형성.

모델 1: D 는 공의 지름 d에만 의존한다.

$$D = c_1 d, \tag{1}$$

여기서 c_1 은 E 및 d 와 무관하며 차원이 없는 숫자이다.

모델 2: 운석 에너지 E 는 충돌하는 동안 체적 과정을 통해 변환된다. 이 모델은 D 가 $E^{1/3}$에 비례한다고 예측한다.

$$D = c_2 E^{1/3} \tag{2}$$

여기서 c_2 은 E 및 d 과 무관한 매개 변수이다.

모델 3: E 는 분화구 밖으로 물질을 배출하는 데 사용된다. 이 가정 하에서 다음의 관계가 주어진다.

$$D = c_3 E^{1/4} \tag{3}$$

여기서 c_3 은 E 및 d 과 무관한 매개 변수이다.

여기서는 세 가지 모델을 비교하기 위해 분화구 형성에 대한 실험을 수행한다. 밀도 $\rho_a = 7.8 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ 의 네 가지 다른 직경 d 및 질량 m 의 강철 공(장비 목록의 항목**(d)**)이 운석으로 작용한다.

공 #1	$d_1 = 2.0\,\mathrm{mm}$	$m_1 = 0.033\,\mathrm{g}$
공 #2	$d_2 = 5.0\,\mathrm{mm}$	$m_2 = 0.51\,\mathrm{g}$
공 #3	$d_3 = 9.0\,\mathrm{mm}$	$m_3 = 3.0\,\mathrm{g}$
공 #4	$d_4 = 16.0\,\mathrm{mm}$	$m_4 = 17\,\mathrm{g}$

모래**(c)**로 채운 그릇**(b)**을 플라스틱 상자**(a)** 안에 넣어 실험을 하면 넘치는 모래를 수집하는 데 도움이 된다. 그릇은 모래로 가득 채운 후, 표면을 자**(o)**의 날을 이용하여 조심스럽게 평탄하게 정리한다. 모래가 뭉쳐서 딱딱해진 부분이 없도록 반드시 주의한다! 모래가 채워진 그릇 위로 공을 떨어뜨리기 위해, 막대와 클램프 나사**(f)**가 부착된 스탠드를 사용할 수 있다. 이 막대는 공을 그릇 바로 위에 정확히 위치시킬 수 있도록 가이드 역할을 하며, 줄자**(e)**는 강철공의 낙하 높이(h)를 측정하는 데 사용된다.

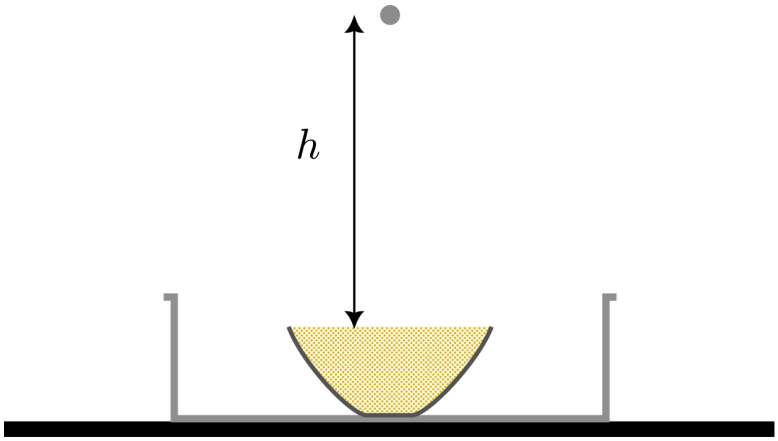


그림 4. 분화구 형성 실험 셋업.

공 #3을 $h = 50\,\mathrm{cm}$ 높이에서 떨어뜨리고 형성된 분화구의 지름 D 를 측정한다. 실험을 5회 반복한다. 각 충격 후 숟가락**(n)**으로 모래를 섞어 단단하게 뭉친 부분이 없게 하고 자의 날로 조심스럽게 모래면을 평탄하게 만든다. 필요한 경우, 체**(g)**를 사용하여 모래에 묻힌 공을 찾아 꺼낸다.

A.1	측정 결과를 표로 제시하고 에러와 함께 D 의 값을 제시하라.	0.6pt

강철 공이 떨어지는 동안 공기 마찰은 다음과 같다.

$$F = \frac{1}{8}\pi d^2 \rho_0 C_x v^2 \tag{4}$$

여기서 v은 공의 속도, $\rho_0 \simeq 1.2\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$은 공기 밀도, C_x는 차원이 없는 계수이다.

공이 최대 낙하 높이($h_{\max}$, 낙하하는 동안 공기 저항력이 무게의 10% 미만으로 유지되는 높이로 정의)보다 낮은 높이에서 낙하하는 경우 공기 저항력은 무시할 수 있는 수준이다.

A.2	최대 낙하 높이 $h_{\max}$에 대한 이론적 표현식을 결정하라. 사용 가능한 4개의 공에 대해 $h_{\max}$ 을 수치적으로 계산하라.	0.5pt

서론에 제시된 세 가지 멱 법칙 모델을 비교하기 위해 D 와 E 의 관계를 실험적으로 조사한다. 실험한 에너지의 범위에 따라 지수가 변하는지 확인한다. 이를 위해 다양한 높이에서 공을 떨어뜨려서 일련의 측정을 수행한다. 반드시 넓은 범위의 에너지에 대해 실험을 수행해야 한다. **A.2에서** 설정한 조건을 준수하면서 높은 E 값에 도달하기 위해 최대 $h = 2\,\mathrm{m}$ 의 높이에서부터 공을 떨어뜨릴 수 있다. 이 측정에서는 각 경우에 대해 실험을 두 번만 수행하여 D의 평균값을 구한다.

A.3	공의 질량 m, 낙하 높이 h, 충격 에너지 E, 분화구 지름 D 를 표로 표시하라.	1.7pt

A.4	주어진 로그 용지와 선형 용지 중 하나를 선택하여 측정 결과를 그래프로 그려라. 그래프 위에 모델 1, 2, 3에 해당하는 세 개의 선을 그려라. 세 가지 이론 모델 중 어떤 것이 실험과 가장 일치하는가?	1.2pt

B. 모래에서 구르다 멈춤

탐사선은 착륙 5년 후 화성의 모래언덕에서 완전히 빠져 움직일 수 없게 되었다. 모래 위에서의 구름은 특히 까다로운데, 이는 모래 입자의 움직임이 많은 에너지를 소산시키기 때문이다. 본 실험에서는 모래 위를 구르는 공의 제동 현상을 연구한다. 정지 상태에 있던 공은 먼저 기울기 θ의 레일에서 가속된 뒤, 모래층 위에서 감속된다.

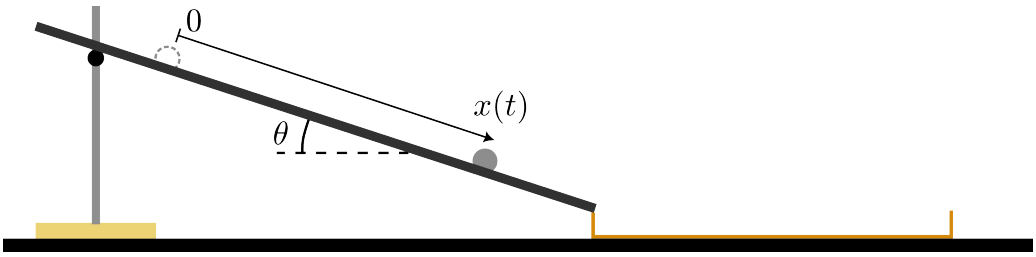


그림 5. 나무 트랙**(J)**과 결합된 경사 레일**(H)**.

레일 위에서 강철공의 움직임

공 #4는 x-축의 원점으로 선택된 레일**(h)**의 임의의 지점으로부터 초기 속도 없이 가속된다.($x = 0$)**(그림 5)**. $x(t)$ 은 레일 상에서 공의 위치를 나타낸다. 공의 질량은 m 이고 지름은 d 이다. 이 공의 중심을 통과하는 축에 대한 공의 관성 모멘트는 $J = md^2/10$ 이다. 각속도 ω 로 회전하면서 v 의 속력으로 병진 운동하는 공의 운동 에너지 K 는 다음과 같다.

$$K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2. \tag{5}$$

공이 미끄러지지 않고 레일 위에서 굴러간다고 가정하며 에너지 소모는 무시한다.

B.1	공의 위치 $x(t)$를 시간 t, 각도 θ 및 중력 가속도g의 함수로 표현하라.	0.4pt

레일**(h)**의 한쪽 끝은 나무 트랙**(j)**의 끝에 놓여 있으며, 이 때에는 모래를 트랙에 채우지 않는다. 레일의 다른 쪽 끝은 스탠드**(F)**에 의해 지지되는데, 이 때 레일의 경사각이 수평면과 $\theta = 5°$ 도가 되도록 조정한다. 이 각도 조정은 주어진 경사각, $\theta = 5°$도 가 되도록 아주 신중하게 수행해야 한다. 접착력 있는 점토**(L)**를 사용하여 레일을 양쪽에서 고정한다.

스탑워치**(k)**를 사용하여 공이 레일을 따라 $l = 50\,\mathrm{cm}$ 거리를 이동하는 데 걸린 시간(t_{50})을 측정하라.

B.2	5회의 측정을 수행하고 그 결과를 에러와 함께 제시하라.	0.7pt

추가로 적어도 8개의 서로 다른 ℓ 값에 대한 t 을 에러와 함께 측정하라.

B.3	결과를 표로 제시하라.	0.8pt

B.4	문제 **B.1에서** 유도한 식을 확인하기 위해 측정 결과에 대한 그래프를 그려라. 이로부터 상수 g 의 추정치를 에러와 함께 구하라.	1pt

모래 속 공의 움직임

공이 레일 위에서 이동한 거리는 ℓ 이고 모래 위에서 이동한 거리는 L 이다.L은 그림 6에서와 같이 측정된다.

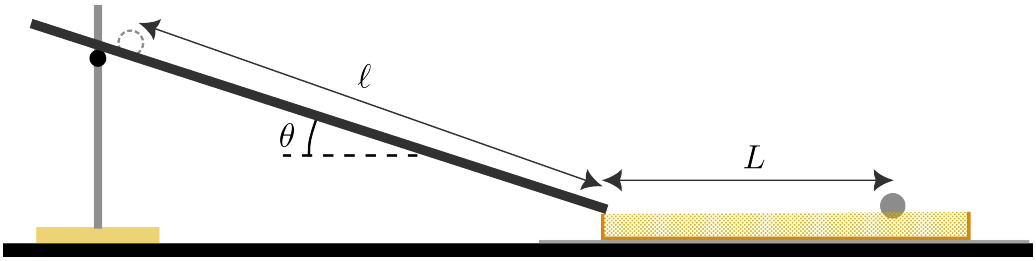


그림 6. 거리 ℓ 동안 가속한 후 거리에 L 이후 정지.

마찰력(T)에 의해 속도가 느려진다. 마찰력은 두 가지 가능한 원인이 있을 수 있다:

- **모델 #1(고체 마찰):** 상대 운동 중인 두 고체 사이에서 모래는 공에 일정한 마찰력 $T = -\mu_{\text{eff}} mg$을 가한다. 여기서 μ_{eff} 은 공-모래 접촉의 유효 마찰 계수이고 m 은 공의 질량이다.
- **모델 #2(유체 마찰):** 마찰력은 공의 속도에 선형적으로 의존하며, $T = -kv$ 여기서 k 는 상수이고 v 은 속력이다.

여기서 목표는 관찰된 제동 현상을 가장 잘 설명하는 모델을 결정하는 것이다.

공이 모래에서 움직일 때, 공을 점 질량으로 가정한다. 이 때, 레일의 경사각은 아주 작으므로 모래로 진입할 때의 공의 에너지 손실은 무시한다. 두 모델의 상황(고체 마찰 또는 유체 마찰) 에서 L 과 ℓ 의 관계를 결정하는 이론적 법칙을 각각 제시하라. 위의 두 모델은 $L \sim \ell^{\alpha}$ 형식의 법칙으로 표현되며 서로 다른 지수 값 α 를 갖는다.

B.5	모델 1과 모델 2의 경우 각각 L 와 ℓ 의 관계와 α 의 값은 무엇인가?	0.6pt

나무 트랙**(J)**을 종이 위에 놓는다. 트랙에 모래를 채우고 자로 표면을 조심스럽게 다듬어 뭉치지 않은 균일한 모래층을 준비한다. 모래가 뭉친 부분이 없도록 주의하라! 레일의 각도를 다시 조심스럽게 $\theta = 5°$ 도로 조정하라. 경사 레일에서 볼 #4($d_4 = 16.0\,\text{mm}$)를 놓아 레일에서 이동한 거리가 $l = 50\,\text{cm}$ 이 되도록 한다.

매번 공을 놓기 전에 나무 트랙에 있는 모래를 잘 섞고 다시 채운 후, 모래층을 다시 평탄하게 그리고 부드럽게 한다. 브러시(**i**)를 사용하여 레일과 공의 표면에 모래가 없도록 청소한다. 실험이 끝나면 종이를 깔때기처럼 사용하여 남은 모래를 병에 다시 넣는다.

B.6	공이 멈출 때까지 모래에서 공이 이동한 거리 L_{50} 를 측정하라. 여러 번(최소 5회) 측정하여 단위 및 에러와 함께 L_{50} 을 결정하라.	0.8pt

B.7	추가로 적어도 8개의 서로 다른 ℓ 에 대해서 L 을 에러 바와 함께 측정한 후($\theta = 5°$ 도 유지 중요), L 을 ℓ 의 함수로 그래프로 그리고 어떤 모델이 마찰력 T를 가장 잘 설명하는지 결정하라.	1.5pt

B.8	선택한 모델의 마찰력 T를 특징 짓는 계수 μ_{eff} 또는 k 의 값을 구하라.	0.2pt