Q2-1

모래 분화구와 모래 언덕 (10.0점)

NASA의 탐사선 Spirit(그림 1.(a))이 화성의 지질과 물의 존재 가능성을 연구하기 위해 2004년에 화성에 착륙했다. 착륙 지점(그림 1.(b))은 다양한 크기의 분화구와 모래 언덕으로 둘러싸여 있었다. 탐사선은 화성의 모래 언덕에 갇히지 않도록 주의해야 한다.

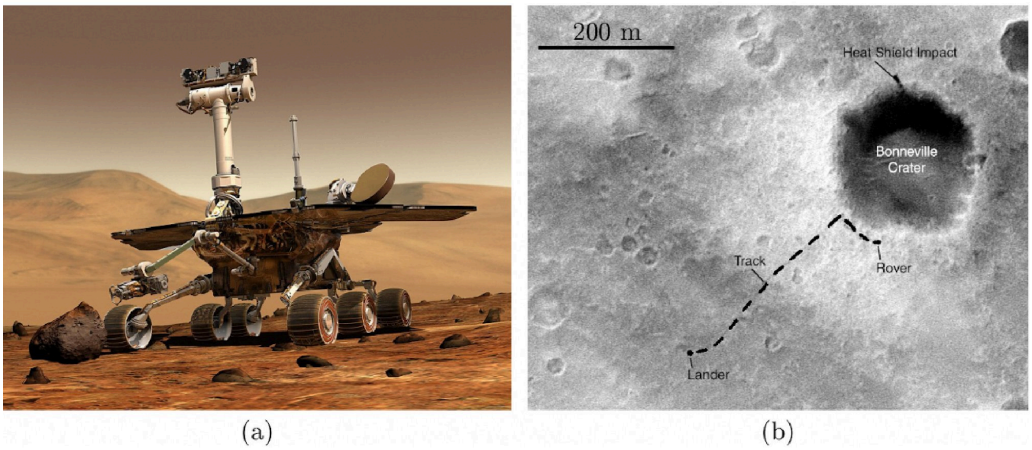


그림 1. (a) 탐사선의 상상도. (b) 화성에 착륙한 탐사선의 착륙 지점. 눈금 막대는 200 m를 나타낸다.

이 문제는 두 개의 독립적인 문제, A(분화구 형성)와 B(모래에 갇힘 현상)으로 구성되어 있으며, 문제를 푸는 순서는 중요하지 않다. 장비 목록은 아래에 제시되어 있고 그림 2에 설명되어 있다.

- (a) 플라스틱 상자. 비워야 한다. 비워진 상자 안에서 실험을 하여 실험 중에 넘치는 모래를 모을 것이다.
- (b) 그릇.
- (c) 모래가 담겨 있는 플라스틱 통.
- (d) 용기에 담긴 6개의 강철 공. 공의 지름은 4가지이며, 가장 작은 공 3개는 서로 동일하다.
- (e) 줄자.
- (f) 고무 받침대가 있는 나무 트레이 (f1), 수직 막대 (f4), 클램핑 나사 (f2), 수평 막대 (f3)로 구성된 고정 장치. 이 부품들은 사진 (f)에 표시된 대로 조립해야 한다.
- (g) 체. 작은 공을 모래 속에서 잃어버렸을 때 찾는 데 사용한다.
- (h) 알루미늄 레일, 1 m 길이.
- (i) 브러시. 필요한 경우 레일과 공에서 모래를 제거하는 데 사용한다.
- (j) 나무 트랙.
- (k) 스톱워치.
- (l) 접착력 있는 점토.
- (m) 깔때기. 마지막에 모래를 통에 다시 넣는 데 도움이 된다.
- (n) 스푼.
- (o) 눈금자.

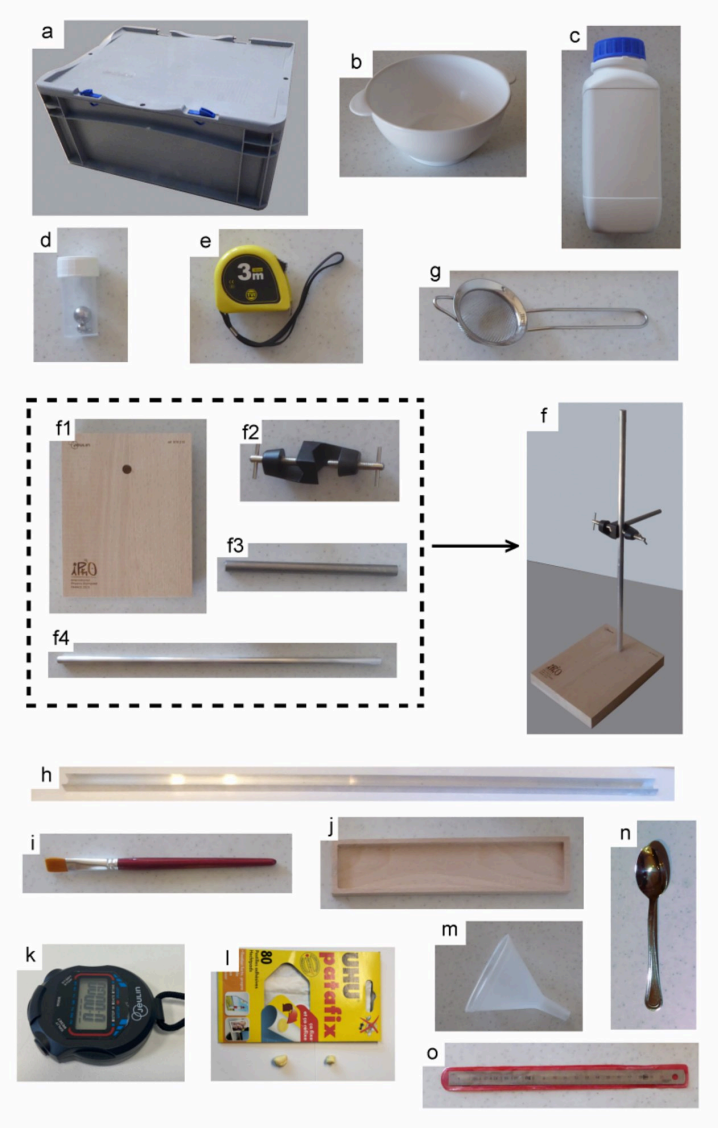


그림 2. 모든 장비의 사진.

A. 충격 분화구

화성의 분화구는 운석 충돌에 의해 형성되며, 그 직경 D 는 약 10 m에서 수백 km까지 다양하다. D 가 충돌 물체의 직경 d 와 에너지 E (그림 3)에 어떻게 의존하는지는 사용하는 모델에 따라 달라진다.

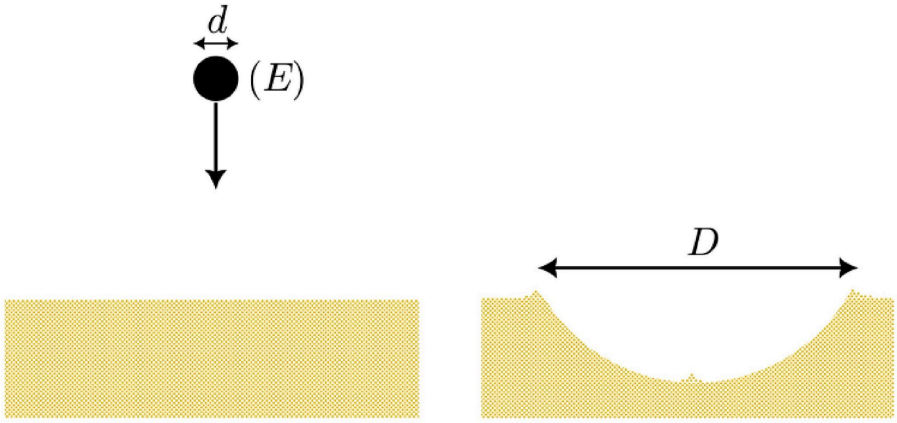


그림 3. 분화구 형성.

모델 1: D 는 충돌 물체의 지름 d 에만 의존한다.

$$D = c_1 d, \qquad (1)$$

여기서 c_1 은 E 및 d 와 무관하며 차원이 없는 숫자이다.

모델 2: 운석 에너지 E 는 충돌하는 동안 체적 과정을 통해 변환된다. 이 모델은 D 가 $E^{1/3}$ 에 비례한다고 예측한다.

$$D = c_2 E^{1/3} \qquad (2)$$

여기서 c_2 는 E 및 d 와 무관한 매개변수이다.

모델 3: E 는 분화구 밖으로 물질을 배출하는 데 사용된다. 이 가정 하에서

$$D = c_3 E^{1/4} \qquad (3)$$

여기서 c_3 는 E 및 d 와 무관한 매개변수이다.

여기서는 세 가지 모델을 비교하기 위해 센티미터 규모에서 분화구 형성 실험을 수행한다. 밀도 $\rho_a = 7.8 \times 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ 의 서로 다른 지름 d 와 질량 m 을 가진 강철 공(장비 목록의 항목 (d))이 운석 역할을 한다.

공 #1	$d_1 = 2.0\ \mathrm{mm}$	$m_1 = 0.033\ \mathrm{g}$
공 #2	$d_2 = 5.0\ \mathrm{mm}$	$m_2 = 0.51\ \mathrm{g}$
공 #3	$d_3 = 9.0\ \mathrm{mm}$	$m_3 = 3.0\ \mathrm{g}$
공 #4	$d_4 = 16.0\ \mathrm{mm}$	$m_4 = 17\ \mathrm{g}$

모래 (c)로 채운 그릇 (b)을 비워진 플라스틱 상자 (a) 안에 넣어 넘치는 모래를 모은다. 그릇은 모래로 가득 채운 뒤 자 (o)의 날로 표면을 조심스럽게 평탄하게 정리한다. 모래를 다지지 않도록 주의하라! 그릇 위에서 공을 놓기 위해 막대와 나비나사가 달린 스탠드 (f)를 사용할 수 있다. 이 막대는 공을 그릇 바로 위에서 놓을 수 있게 안내하는 역할을 하며, 표면 위의 낙하 높이 h 를 줄자 (e)로 측정하는 데에도 쓰인다.

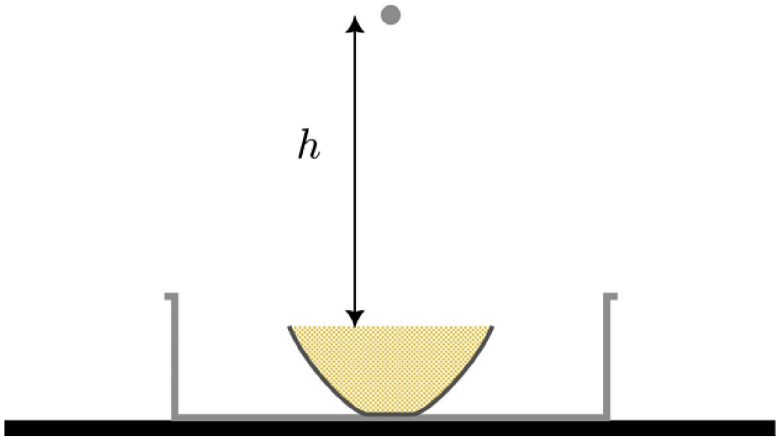


그림 4. 분화구 형성 실험 장치.

공 #3을 높이 $h = 50\ \mathrm{cm}$ 에서 떨어뜨리고 형성된 분화구의 지름 D 를 측정한다. 실험을 5회 반복한다. 각 충격 후 스푼 (n)으로 모래를 섞고 자 (o)의 날로 조심스럽게 평탄하게 만든다. 모래를 다지지 않도록 주의하라! 필요하면 체 (g)로 모래에 묻힌 공을 찾는다.

A.1	측정 결과를 표로 제시하고 D 를 불확도와 함께 제시하라.	0.6pt

풀이:

D (mm)	23	24	22	25	25

$D = (23.8 \pm 1.2)\ \mathrm{mm}$

A1(1) : D 를 22 mm와 26 mm 사이로 2회 측정	0.2pt
A1(2) : D 를 22 mm와 26 mm 사이로 3회 더 측정	0.2pt
A1(3) : D 의 평균값이 23 mm와 25 mm 사이	0.1pt
A1(4) : D 의 불확도가 0.5 mm와 2 mm 사이	0.1pt

낙하하는 동안 공기 저항력은 다음과 같다.

$$F = \frac{1}{8}\pi d^2 \rho_0 C_x v^2 \qquad (4)$$

여기서 v 는 공의 속도, $\rho_0 \simeq 1.2\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ 은 공기 밀도, C_x 는 1 정도 크기의 차원 없는 계수이다.

공이 최대 낙하 높이 $h_{\max}$ (낙하하는 동안 공기 저항력이 무게의 10 % 미만으로 유지되는 높이로 정의)보다 낮은 높이에서 낙하하면 공기 저항력은 무시할 수 있다.

A.2	최대 낙하 높이 $h_{\max}$ 에 대한 이론적 표현식을 결정하라. 사용 가능한 4개의 공에 대해 $h_{\max}$ 를 수치로 계산하라.	0.5pt

풀이:

Q2-5

공기 마찰을 무시하면 최대 속력은 $v_{\max} = \sqrt{2gh}$ 이고, 이에 대응하는 공기 마찰력은 $F = \frac{1}{8}\pi d^2 \rho_0 C_x (2gh)$ 이다. $F < \frac{mg}{10}$ 을 요구하면 $m = \rho_a \frac{\pi d^3}{6}$ 를 사용하여

$$h < h_{\max} = 0.1 \times \frac{2}{3} \frac{\rho_a}{\rho_0} \frac{d}{C_x}$$

를 얻는다.

A2(1) : $h_{\max} = 0.1 \times \frac{2}{3} \frac{\rho_a}{\rho_0} \frac{d}{C_x}$ 또는 다른 변수를 포함한 동등한 식	0.4pt
A2(2) : $h_{\max}$ 의 네 값 = (0.9 m ; 2 m ; 4 m ; 7 m)	0.1pt

서론에 제시된 세 가지 거듭제곱 법칙을 비교하기 위해 D 와 E 의 관계를 실험적으로 조사하라. 시험한 에너지 범위에서 지수가 변하는지 확인하라. 이를 위해 공을 여러 높이에서 떨어뜨려 일련의 측정을 수행한다. 넓은 범위의 에너지를 다루어야 한다. A.2에서 정한 조건을 지키면서 높은 E 값에 도달하기 위해 최대 $h = 2$ m 에서 공을 떨어뜨릴 수 있다. 각 매개변수 조합에 대해 실험은 두 번만 반복하고 평균값 D 를 계산한다.

A.3	결과를 표로 제시하라: 공의 질량 m, 낙하 높이 h, 충격 에너지 E, 분화구 지름 D.	1.7pt

풀이:

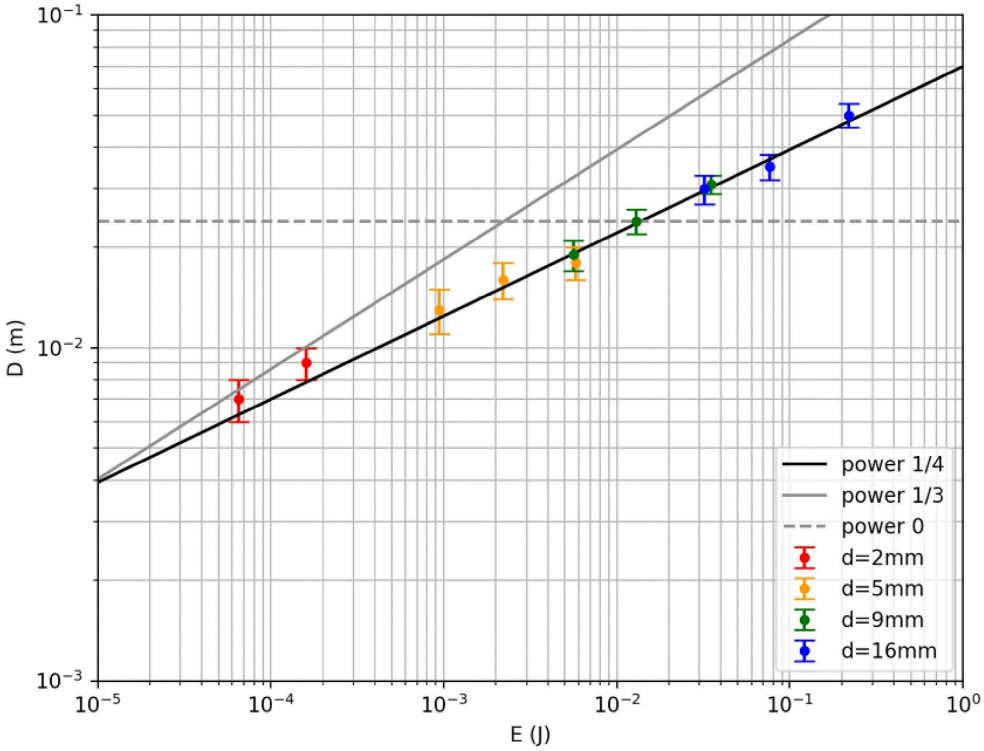
넓은 범위의 충격 에너지를 다루기 위해 작은 공은 낮은 높이($h = 10$ cm)에서, 큰 공은 최대 2 m 높이에서 떨어뜨린다(작은 공을 높은 곳에서 떨어뜨릴 필요는 없다). 핵심은 매 충격 후 모래를 다시 고르게 만드는 것이다. 그렇지 않으면 모래가 단단해져 분화구가 작아진다. 에너지 $E = mgh$ 는 3×10^{-5} J (공 #1, $h = 10$ cm)에서 0.4 J (공 #4, $h = 2$ m)까지 변한다.

IPhO 사전 실험으로 확립된 기댓값은 $D = 6.89\,(mh)^{0.24}$ 를 따른다. 여기서 D 는 mm, m 은 g, h 는 cm 단위이다.

A3(1) : D 의 옳은 값 $N > 5.5$ 개 ($\lvert D - D_{ref} \rvert < 0.15 D_{ref}$)	0.3pt
A3(2) : D 의 옳은 값 $N > 8.5$ 개	0.3pt
A3(3) : D 의 옳은 값 $N > 11.5$ 개	0.3pt
A3(4) : $E = mgh$ 의 옳은 계산 ($\lvert E - E_{th} \rvert < 0.1 E_{th}$)	0.2pt
A3(5) : E 가 2 decade 범위 (decade당 2점)	0.2pt
A3(6) : E 가 3 decade 범위 (decade당 2점)	0.2pt
A3(7) : E 가 3.5 decade 초과	0.2pt

A.4	선택한 그래프 용지(로그 또는 선형)에 결과를 그려라. 그래프 위에 모델 1, 2, 3에 해당하는 선을 추가하라. 세 이론 모델 중 어느 것이 실험 데이터와 가장 잘 맞는지 밝혀라.	1.2pt

풀이:



A4(1) : 이름표와 단위가 있는 축	0.1pt
A4(2) : 기울기 1/3과 1/4의 이론 직선 (위치 무관)	0.2pt
A4(3) : 이론적 수평선 (지수 0)	0.1pt
A4(4) : 그래프 위에 4점 초과	0.2pt
A4(5) : 그래프의 두 점이 A.3의 값과 일치	0.2pt
A4(6) : 점들이 직선을 이룸	0.2pt
A4(7) : 기울기를 측정하고 1/4로 결론	0.2pt

B. 모래에서 구르다 멈춤

착륙 5년 뒤 탐사선 Spirit은 화성 모래 언덕에서 완전히 빠져 움직일 수 없게 되었다. 모래 위에서 구르는 것은 모래 입자의 움직임이 많은 에너지를 소산시키기 때문에 특히 까다롭다. 여기서는 모래 위를 구르는 공의 제동을 연구한다. 정지 상태의 공을 먼저 기울기 θ 의 레일에서 가속시킨 뒤 모래층 위에서 감속시킨다.

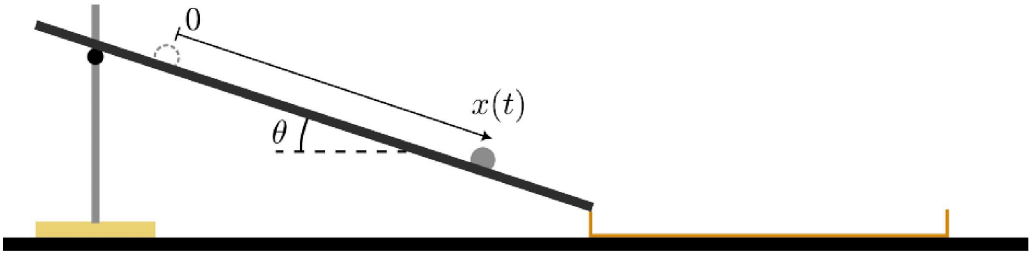


그림 5. 나무 트랙 (j)과 결합된 경사 레일 (h).

레일 위에서 공의 움직임

공 #4를 레일 (h) 위의 임의의 지점(이를 x 축의 원점 $x = 0$ 으로 잡는다)에서 초기 속력 없이 놓는다 (그림 5). $x(t)$ 는 레일 위 공의 위치를 나타낸다. 질량 m, 지름 d 인 공의 중심을 지나는 축에 대한 관성 모멘트는 $J = md^2/10$ 이다. 각속력 ω 로 회전하면서 속력 v 로 움직이는 공의 운동 에너지 K 는

$$K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2, \qquad (5)$$

공이 레일 위에서 미끄러지지 않고 굴러간다고 가정하며 에너지 소산은 무시한다.

B.1	공의 위치 x 를 시간 t, 각도 θ, 중력가속도 g 의 함수로 표현하라.	0.4pt

풀이:

에너지 정리(소산 없음)와 굴림 조건 $v = \omega R$ 을 함께 쓰면 빠르게 답을 얻는다. $K/x = mg\sin\theta$ 로부터

$$x(t) = \frac{1}{1+\frac{2}{5}} \cdot \frac{1}{2}g\sin\theta\, t^2 = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{2}g\sin\theta\, t^2$$

굴림 때문에 공은 가상의 질점보다 5/7배 느리다.

B1(1) : $x(t) = \frac{1}{1+2/5}\frac{1}{2}g\sin\theta\, t^2 = \frac{5}{7}\frac{1}{2}g\sin\theta\, t^2$	0.4pt

레일 (h)의 한쪽 끝은 이 시점에 모래가 없는 나무 트랙 (j)의 가장자리에 놓인다. 반대쪽 끝은 스탠드 (f)로 받쳐 수평면과 $\theta = 5^\circ$ 의 경사각을 이루게 한다. 이 조정을 신중하게 수행해야 한다. 레일은 접착 점토 (l)로 양쪽에서 고정한다.

스톱워치 (k)로 공이 레일을 따라 $\ell = 50\ \text{cm}$ 를 이동하는 데 걸린 시간 t_{50} 을 측정한다.

B.2	5회 측정하고 그 결과를 통계적 불확도의 크기와 함께 제시하라.	0.7pt

풀이:

t_{50} (s)	1.28	1.35	1.39	1.32	1.33

$$t_{50} = (1.33 \pm 0.04)\ \text{s}$$

B2(1) : t_{50} 을 1.2 s와 1.4 s 사이로 1회 측정	0.2pt
B2(2) : t_{50} 을 1.2 s와 1.4 s 사이로 4회 더 측정	0.2pt
B2(3) : t_{50} 의 평균값이 1.25 s와 1.35 s 사이	0.2pt
B2(4) : t_{50} 의 불확도가 0.02 s와 0.30 s 사이	0.1pt

적어도 8개의 서로 다른 ℓ 값에 대해 t 를 통계적 불확도의 크기와 함께 측정하라.

B.3	결과를 표로 제시하라.	0.8pt

풀이:

공이 레일 아래쪽에 도달하는 순간을 예측할 수 있으므로 측정은 상당히 재현성이 좋다.

ℓ (cm)	10	20	30	40	50
t (s)	0.54±0.03	0.87±0.05	1.04±0.05	1.16±0.06	1.33±0.04

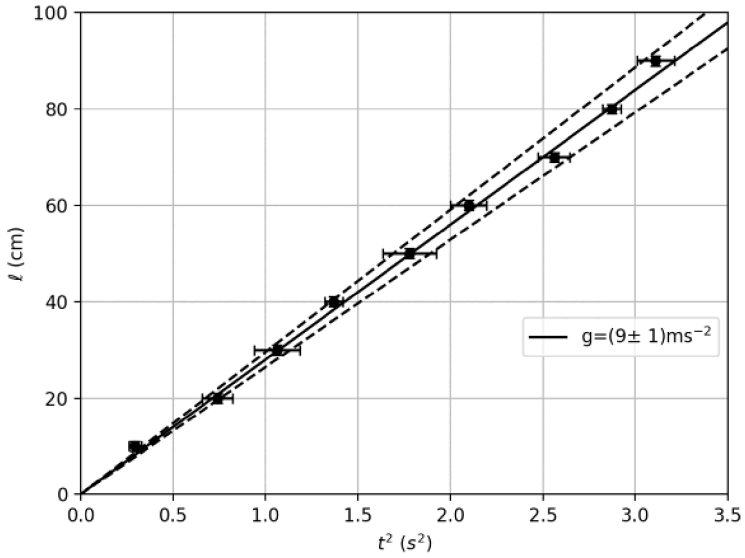
ℓ (cm)	60	70	80	90	100
t (s)	1.45±0.04	1.60±0.07	1.71±0.06	1.78±0.05	1.83±0.06

B3(1) : 4개의 서로 다른 ℓ 에 대해 불확도와 함께 t 측정 ($\lvert t - t_{ref} \rvert < 0.1\, t_{ref}$)	0.3pt
B3(2) : t 를 4회 더 측정	0.3pt
B3(3) : ℓ 이 10 cm에서 90 cm까지 변함	0.2pt

B.4	B.1에서 세운 법칙을 확인하기 위해 오차 막대를 포함한 그래프를 그려라. 이로부터 상수 g 의 실험적 추정값을 불확도와 함께 구하라.	1pt

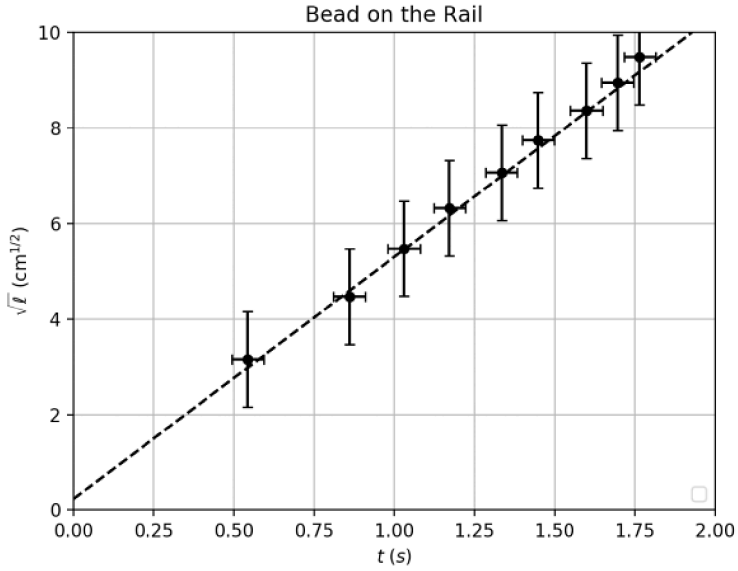
풀이:

ℓ 을 t^2 의 함수로(또는 그 반대로) 그리면 직선을 얻는다.



기울기는 $\frac{5}{14}g\sin\theta$ 이다. $\boxed{g = (9 \pm 1)\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}}$ 를 얻는다. 이 값은 레일 경사각의 오차에 매우 민감하다. (5°에 대해) 1°의 오차는 g 값에 $2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ 의 오차를 준다.

$\sqrt{\ell}$ 을 t 의 함수로 그려 t 의 계통 오차(offset)를 확인할 수도 있다.



B4(1) : 축의 현명한 선택 (ℓ, t^2) 또는 직선이 되는 임의의 선택	0.2pt
B4(2) : t 에 대한 오차 막대의 존재	0.2pt
B4(3) : 직선으로 피팅	0.2pt
B4(4) : g 값이 6과 14 m·s^{-2} 사이	0.2pt
B4(5) : g 값이 8과 12 m·s^{-2} 사이	0.1pt
B4(6) : g 의 불확도가 1 m·s^{-2} 정도	0.1pt

모래 속 공의 움직임

공이 레일 위에서 이동한 거리를 ℓ 이라 한다. 모래 위에서 공은 그림 6에 정의된 거리 L 만큼 이동한 뒤 멈춘다.

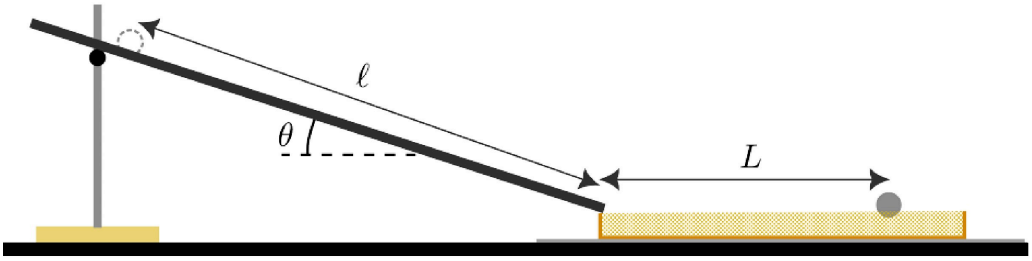


그림 6. 거리 ℓ 동안 가속한 뒤 거리 L 동안 정지.

공은 마찰력 T 에 의해 감속되며, 이 힘에는 두 가지 가능한 원인이 있다.

- **모델 #1 (고체 마찰):** 상대 운동하는 두 고체 사이처럼, 모래가 공에 일정한 마찰력 $T = -\mu_{\text{eff}}\, mg$ 를 가한다. 여기서 μ_{eff} 는 공-모래 접촉의 유효 마찰계수이고 m 은 공의 질량이다.
- **모델 #2 (유체 마찰):** 마찰력이 공의 속도에 선형으로 의존한다. $T = -kv$, 여기서 k 는 상수이고 v 는 속력이다.

여기서 목표는 관찰된 제동 현상을 가장 잘 설명하는 모델을 결정하는 것이다.

모래 속에서 움직일 때 공은 점질량으로 모형화한다. 레일의 경사가 작으므로 레일에서 모래 트랙으로 넘어갈 때의 에너지 손실은 무시한다. 두 상황(고체 마찰 또는 유체 마찰) 각각에 대해 L 과 ℓ 을 연결하는 이론적 법칙을 세워라. 두 제안 모두 $L \propto \ell^{\alpha}$ 형태의 거듭제곱 법칙을 주며 지수 α 는 서로 다른 두 값을 갖는다.

B.5	모델 1과 모델 2에 대해 L 과 ℓ 의 관계 및 α 의 값을 제시하라.	0.6pt

풀이:

모델 #1은 에너지 관점에서 바로 얻어진다. $\frac{1}{2}mv_0^2 = \mu_{\text{eff}}\, mgL$ 이고 $v_0^2 = \frac{10}{7}g\ell\sin\theta$ 이므로

$$\boxed{L = \frac{5}{7}\frac{\sin\theta}{\mu_{\text{eff}}}\ell, \qquad \alpha = 1}$$

여기서 v_0 는 모래에 진입할 때의 초기 속력이다.

모델 #2에는 약간의 계산이 더 필요하다. $v(t)$ 에 대한 미분방정식을 풀면 $v(t) = v_0 e^{-t/\tau}$ 이고 $\tau = m/k$, $v_0 = \sqrt{\frac{5}{7}}\sqrt{2g\ell\sin\theta}$ 이다. 적분하면 $x(t) = v_0\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ 이므로

$$L = \frac{m}{k}\sqrt{\frac{5}{7}}\sqrt{2g\sin\theta}\sqrt{\ell}, \qquad \alpha = 1/2$$

B5(1) : 모델 #1: $L = \frac{5}{7}\frac{\sin\theta}{\mu_{\text{eff}}}\ell$. $L = \frac{\sin\theta}{\mu_{\text{eff}}}\ell$ 도 인정	0.1pt
B5(2) : 모델 #1: $\alpha = 1$	0.1pt
B5(3) : 모델 #2: $L = \frac{m}{k}\sqrt{\frac{5}{7}}\sqrt{2g\sin\theta}\sqrt{\ell}$. $L = \frac{m}{k}\sqrt{2g\sin\theta}\sqrt{\ell}$ 도 인정	0.3pt
B5(4) : 모델 #2: $\alpha = 1/2$	0.1pt

나무 트랙 (j)을 종이 위에 놓는다. 트랙을 모래로 채우고 자로 표면을 조심스럽게 긁어 균일한 층을 만든다. 모래를 다지지 않도록 주의하라! 레일의 각도를 다시 조심스럽게 $\theta = 5^\circ$ 로 맞춘다. 공 #4 ($d_4 = 16.0\ \text{mm}$)를 경사 레일에서 놓아 레일 위 이동 거리가 $\ell = 50\ \text{cm}$ 가 되게 한다.

매 시행 전에 모래를 섞고 트랙을 다시 채운 뒤 표면을 다시 고르게 한다. 브러시 (i)로 레일과 공의 모래를 청소한다. 실험이 끝나면 종이를 깔때기처럼 사용하여 남은 모래를 통에 다시 넣는다.

B.6	공이 멈출 때까지 모래에서 이동한 거리 L_{50} 을 측정하라. 여러 번(최소 5회) 측정하여 L_{50} 을 단위 및 불확도와 함께 결정하라.	0.8pt

풀이:

매 시행 후 모래층을 조심스럽게 다시 만들지 않으면 모래가 단단해져 공이 트랙 밖으로 나가게 된다.

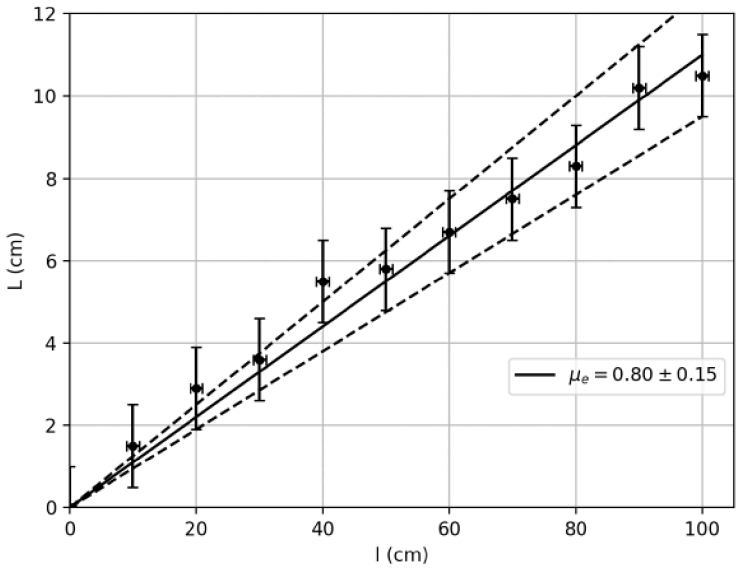
L_{50} (cm)	7.0	6.7	5.8	6.7	6.1

$$L_{50} = (6.4 \pm 0.5)\ \text{cm}$$

B6(1) : L_{50} 을 5.5 cm와 7.5 cm 사이로 3회 측정	0.4pt
B6(2) : 5.5 cm와 7.5 cm 사이로 2회 더 측정	0.2pt
B6(3) : L_{50} 의 평균값이 5.8 cm와 7.2 cm 사이	0.1pt
B6(4) : L_{50} 의 불확도가 0.2 cm와 1.0 cm 사이	0.1pt

B.7	적어도 8개의 ℓ 값에 대해($\theta = 5^\circ$ 유지) 여러 번 측정한 뒤, L 을 오차 막대와 함께 ℓ 의 함수로 그리고 마찰력 T 를 가장 잘 설명하는 모델이 무엇인지 결론지어라.	1.5pt

풀이:



측정점들은 직선, 즉 "고체 마찰" 모델(제안 #1)과 잘 맞는다.

B7(1) : 서로 다른 ℓ 에 대해 L 을 4회 측정	0.3pt
B7(2) : L 을 4회 더 측정	0.2pt
B7(3) : ℓ 이 (최소한) 10 cm에서 90 cm까지 변함	0.1pt
B7(4) : L 대 ℓ 또는 $\log L$ 대 $\log \ell$ 그래프, 축·값·단위	0.1pt
B7(5) : 그래프 위에 2.5점 초과	0.1pt
B7(6) : 그래프 위에 5.5점 초과	0.2pt
B7(7) : L 에 대해 ±0.5 cm ~ ±1 cm의 오차 막대	0.1pt
B7(8) : 선형 법칙을 그렸고 측정점과 잘 맞음	0.2pt
B7(9) : $\alpha = 1$ 이며 모래에서 "고체 마찰"이라는 결론	0.2pt

B.8	선택한 모델에 따라, 힘 T 를 특징짓는 계수 μ_{eff} 또는 k 의 값을 제시하라.	0.2pt

풀이:

관계식은 $L = \dfrac{5}{7}\dfrac{\sin\theta}{\mu_{\text{eff}}}\ell$ 이므로

$\mu_{\text{eff}} = 0.8 \pm 0.1$

B8(1) : μ_{eff} 가 0.6과 1.0 사이	0.2pt