풀이

A1. $\vec{M}$의 길이의 제곱은 다음과 같다.

$$M^2 = \vec{M} \cdot \vec{M},$$

따라서 그 시간 미분은 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial t} M^2 = 2\vec{M} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}.$$

임의의 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$에 대해 벡터곱 $\vec{a} \times \vec{b}$는 두 벡터 모두에 수직이다. 특히 벡터 $\vec{M} \times \vec{B}_{\text{eff}}$와 $\vec{M} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}$는 $\vec{M}$에 수직이므로, LLG 방정식에 따라 $\vec{M}$과 $\frac{\partial \vec{M}}{\partial t}$는 서로 수직이다. 따라서

$$\vec{M} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t} M^2 = 0,$$

이고, $\vec{M}$의 크기는 일정하다.

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} M^2 = 2\vec{M} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = 0}$$

A2. 방정식의 z성분을 생각하자.

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = -\frac{\gamma}{1+\alpha^2} \vec{m} \times \vec{B}_{\text{eff}} - \frac{\alpha\gamma}{1+\alpha^2} \Big((\vec{m} \cdot \vec{B}_{\text{eff}}) \vec{m} - \vec{B}_{\text{eff}} \Big).$$

벡터곱 $(\vec{m} \times \vec{B}_{\text{eff}})$는 z축에 수직이므로, 둘째 항만 이 방정식에 기여한다. $\vec{m} \cdot \vec{B}_{\text{eff}} = m_z B_0$임을 고려하면 다음을 얻는다.

$$\dot{m}_z = \frac{\alpha\gamma}{1+\alpha^2} B_0 (1 - m_z^2).$$

변수를 분리하면

$$\frac{dm_z}{1 - m_z^2} = \frac{\alpha\gamma}{1+\alpha^2} B_0 \, dt$$

이고, 얻은 식을 0부터 t까지 적분하면 다음을 얻는다.

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+m_z(t)}{1-m_z(t)} \right) \Bigg|_0^t = \frac{\alpha\gamma}{1+\alpha^2} B_0 t.$$

초기 조건 $m_z(0) = 0$을 대입하면

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+m_z(t)}{1-m_z(t)} \right) = \frac{\alpha\gamma}{1+\alpha^2} B_0 t,$$

이고, 답은 다음과 같다.

$$\boxed{m_z(t) = \frac{\exp\left(\frac{\alpha\gamma B_0 t}{1+\alpha^2}\right) - \exp\left(-\frac{\alpha\gamma B_0 t}{1+\alpha^2}\right)}{\exp\left(\frac{\alpha\gamma B_0 t}{1+\alpha^2}\right) + \exp\left(-\frac{\alpha\gamma B_0 t}{1+\alpha^2}\right)} = \tanh\left(\frac{\alpha\gamma B_0 t}{1+\alpha^2}\right)}$$

A3. 첫 번째 풀이

벡터 $\vec{m}$을 xy평면에 사영한 것을 $\vec{m}_{xy}$로 나타내자. 벡터 $\vec{B}_{\text{eff}}$는 z축 방향이므로 그 xy평면 사영은 0이다. 또한 $\vec{m}\cdot\vec{B}_{\text{eff}} = m_z B_0$이고

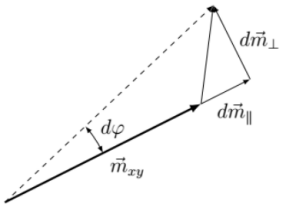
$$\vec{m}\times\vec{B}_{\text{eff}} = (\vec{m}_{xy}+m_z\vec{e}_z)\times\vec{B}_{\text{eff}} = \vec{m}_{xy}\times\vec{B}_{\text{eff}}, \qquad (\vec{e}_z\times\vec{B}_{\text{eff}}=0),$$

이므로, LLG 방정식의 xy평면 사영은 다음 꼴이 된다.

$$\frac{d\vec{m}_{xy}}{dt} = -\frac{\gamma}{1+\alpha^2}\vec{m}_{xy}\times\vec{B}_{\text{eff}} - \frac{\alpha\gamma}{1+\alpha^2}m_z B_0\vec{m}_{xy}.$$

여기서 첫째 항(크기 $\gamma B_0 m_{xy}/(1+\alpha^2)$)은 $\vec{m}_{xy}$에 수직이므로 $\vec{m}_{xy}$의 회전을 일으킨다. 둘째 항은 $\vec{m}_{xy}$에 평행하며 길이의 변화를 일으킨다.

시간 dt 동안 수직 방향의 변화 성분은



$$dm_\perp = \frac{\gamma B_0 m_{xy}}{1+\alpha^2}dt,$$

이므로, 회전각은 $d\varphi = dm_\perp/m_{xy}$이고 각속도는 다음과 같다.

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\gamma B_0}{1+\alpha^2}.$$

Ω를 얻는 또 다른 방법은, 어떤 벡터가 각속도 $\vec{\Omega}$로 회전하면 그 시간 미분이

$$\frac{d\vec{m}_{xy}}{dt} = \vec{\Omega}\times\vec{m}_{xy}$$

임을 이용하는 것이다. LLG 방정식의 첫째 항과 비교하면 곧바로 다음을 얻는다.

$$\vec{\Omega} = \frac{\gamma\vec{B}_{\text{eff}}}{1+\alpha^2} = \frac{\gamma B_0}{1+\alpha^2}\vec{e}_z.$$

따라서 답은

$$\boxed{\Omega = \frac{\gamma B_0}{1+\alpha^2}}$$

A3. 두 번째 풀이

LLG 방정식을 x축과 y축에 사영하자.

$$\begin{cases} \dot{m}_x = -\dfrac{\gamma B_0}{1+\alpha^2}m_y - \dfrac{\alpha\gamma B_0 m_z}{1+\alpha^2}m_x, \\ \dot{m}_y = \dfrac{\gamma B_0}{1+\alpha^2}m_x - \dfrac{\alpha\gamma B_0 m_z}{1+\alpha^2}m_y. \end{cases}$$

새로운 복소 변수 $\hat{m} = m_x + i m_y$를 도입하고, 둘째 식에 먼저 i를 곱한 뒤 두 식을 더하자.

$$\frac{d}{dt}(m_x+im_y) = \frac{\gamma B_0}{1+\alpha^2}(-m_y+im_x) - \frac{\alpha\gamma m_z B_0}{1+\alpha^2}(m_x+im_y).$$

얻은 식은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\frac{d\hat{m}}{dt} = i\frac{\gamma B_0}{1+\alpha^2}\hat{m} - \frac{\alpha\gamma B_0 m_z}{1+\alpha^2}\hat{m}.$$

변수를 분리하면

$$\int\frac{d\hat{m}}{\hat{m}} = \int dt\left(\frac{i\gamma B_0}{1+\alpha^2} - \frac{\alpha\gamma B_0}{1+\alpha^2}m_z\right).$$

초기 조건 $\hat{m}(0) = m_x(0)+im_y(0) = 1$에 의해

$$\ln \hat{m} = \frac{i\gamma B_0 t}{1+\alpha^2} - \frac{\alpha\gamma B_0}{1+\alpha^2}\int_0^t dt\, m_z(t), \qquad \hat{m} = A(t)e^{i\varphi(t)},$$

여기서 식

$$A(t) = \exp\left(-\frac{\alpha\gamma B_0}{1+\alpha^2}\int_0^t m_z(t)\,dt\right)$$

는 $\vec{m}_{xy}$의 크기이고, 식

$$\varphi = \frac{\gamma B_0 t}{1+\alpha^2}$$

은 $\vec{m}_{xy}$의 회전각에 해당한다. 왜냐하면

$$m_x(t) = A(t)\cos\varphi(t), \qquad m_y(t) = A(t)\sin\varphi(t)$$

이기 때문이다. 각 φ는 t의 일차 함수이므로 각속도는 일정하며, 그 값은 앞에서 얻은 것과 같다. $m_z(t)$의 명시적인 식을 이용하면 크기 $A(t)$를 구할 수 있다. 실제로

$$\ln A(t) = -\frac{\alpha\gamma B_0}{1+\alpha^2}\int_0^t m_z(t)\,dt = -\int_0^t \frac{\alpha\gamma B_0\,dt}{1+\alpha^2}\tanh\frac{\alpha\gamma B_0 t}{1+\alpha^2} = -\ln\cosh\frac{\alpha\gamma B_0 t}{1+\alpha^2},$$

이므로

$$A(t) = \frac{1}{\cosh\dfrac{\alpha\gamma B_0 t}{1+\alpha^2}},$$

이고, 따라서 $m_z^2 + m_{xy}^2 = 1$, 즉 $\vec{m}$의 크기는 일정하며 1이다. 여기서 다음 공식

$$\int \tanh x\,dx = \int \frac{\sinh x}{\cosh x}dx = \int \frac{d(\cosh x)}{\cosh x} = \ln\cosh x + C,$$

과 관계식

$$\tanh^2 x + \frac{1}{\cosh^2 x} = 1$$

을 사용하였다.

복소수를 쓰지 않고 다음 꼴의 해를 구할 수도 있다.

$$m_x = A(t)\cos\varphi(t), \qquad m_y(t) = A(t)\sin\varphi(t).$$

이 식들을 $\dot{m}_x, \dot{m}_y$에 대한 방정식에 대입하면 다음을 얻는다.

$$\frac{dA}{dt}\cos\varphi - A\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\gamma B_0}{1+\alpha^2}A\sin\varphi - \frac{\alpha\gamma B_0 m_z}{1+\alpha^2}A\cos\varphi;$$
$$\frac{dA}{dt}\sin\varphi + A\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\gamma B_0}{1+\alpha^2}A\cos\varphi - \frac{\alpha\gamma B_0 m_z}{1+\alpha^2}A\sin\varphi.$$

이 방정식들로부터 크기와 각의 시간 미분을 얻을 수 있다.

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\gamma B_0}{1+\alpha^2}, \qquad \frac{dA}{dt} = -\frac{\alpha\gamma B_0 m_z}{1+\alpha^2}A.$$

이 관계식들은 처음 연립방정식에서 $\cos\varphi$와 $\sin\varphi$의 계수가 같다는 등식에 지나지 않는다. 첫째 식은 앞에서 얻은 각속도의 식을, 둘째 식은 크기의 도함수를 준다.

$$\boxed{\Omega = \frac{\gamma B_0}{1+\alpha^2}}$$

B1. 정의에 의해

$$\vec{B}_{\text{eff},i} = -\frac{1}{a^3}\frac{\partial W(\vec{M}_i)}{\partial \vec{M}_i},$$

여기서 W는 계의 에너지이다. 이 에너지는 문제에 주어진 기여들로 이루어진다.

$$W = \sum_i a^3\left(-\frac{KM_{i,z}^2}{2M_0^2} + \frac{K_1 M_{i,y}^2}{2M_0^2}\right) - \sum_i A\vec{M}_i\vec{M}_{i+1}\frac{a}{M_0^2} - \sum_i a^3\vec{B}_0\vec{M}_i.$$

여기서 첫째 항은 비등방성 에너지를 나타내며, 각 칸의 자화에 의존하는 항은 그중 하나뿐이므로 대응하는 자기장은 다음 꼴이다.

$$\vec{B}_{\text{an},i} = \frac{\partial}{\partial M_{z,i}}\frac{KM_{i,z}^2}{2M_0^2}\vec{e}_z - \frac{\partial}{\partial M_{y,i}}\frac{K_1 M_{i,y}^2}{2M_0^2}\vec{e}_y = \frac{KM_{i,z}}{M_0^2}\vec{e}_z - \frac{k_1 K M_{i,y}}{M_0^2}\vec{e}_y = \frac{K}{M_0}\left(m_{i,z}\vec{e}_z - k_1 m_{i,y}\vec{e}_y\right).$$

문제의 식과 비교하면 다음을 얻는다.

$$B_{\text{an}} = \frac{K}{M_0}.$$

W의 둘째 항은 교환 에너지를 나타내며, 그중 두 항이 $\vec{M}_i$에 의존한다.

$$-\frac{Aa}{M_0^2}\vec{M}_i(\vec{M}_{i-1} + \vec{M}_{i+1}),$$

따라서 유효 자기장은

$$\vec{B}_{\text{ex}} = -\frac{1}{a^3}\frac{\partial}{\partial \vec{M}_i}\left(-\frac{Aa}{M_0^2}\vec{M}_i(\vec{M}_{i-1} + \vec{M}_{i+1})\right) = \frac{A}{a^2 M_0^2}(\vec{M}_{i-1} + \vec{M}_{i+1}) = \frac{A}{a^2 M_0}(\vec{m}_{i-1} + \vec{m}_{i+1}).$$

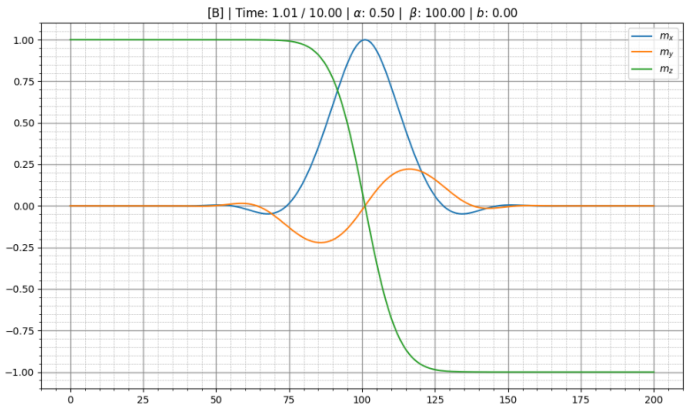
그러므로

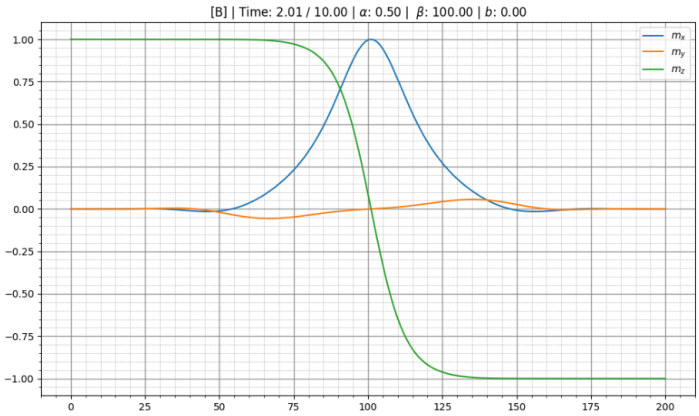
$$B_{\text{ex}} = \frac{A}{a^2 M_0}.$$

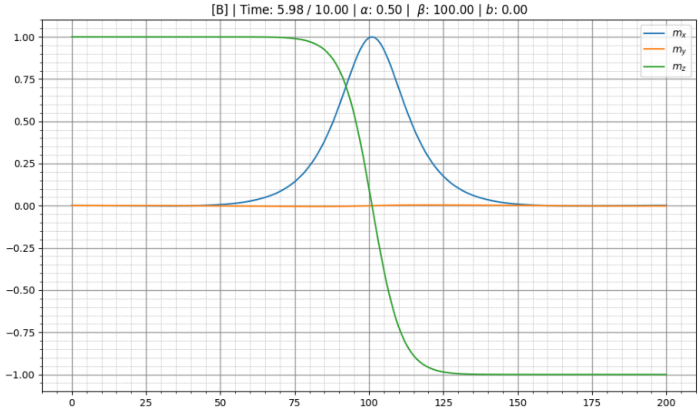
마지막 항을 미분하면, 문제에 주어진 대로 외부 자기장 $\vec{B}_0$에 의한 유효 자기장의 기여를 얻는다.

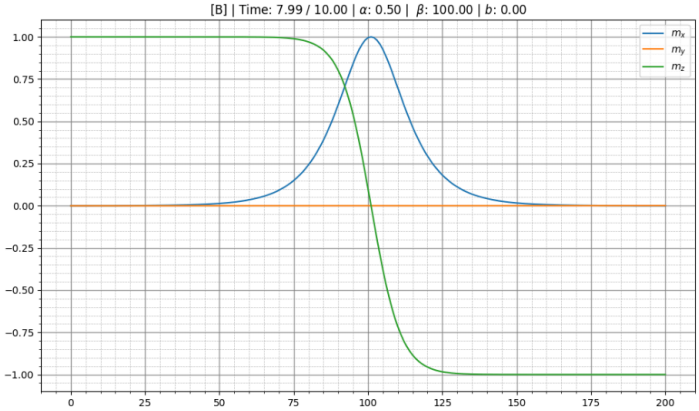
$$\boxed{B_{\text{an}} = \frac{K}{M_0} \approx 0.83\ \text{T}; \qquad B_{\text{ex}} = \frac{A}{M_0 a^2} \approx 83.33\ \text{T}; \qquad \omega \approx 1.47 \cdot 10^{11}\ \text{s}^{-1}.}$$

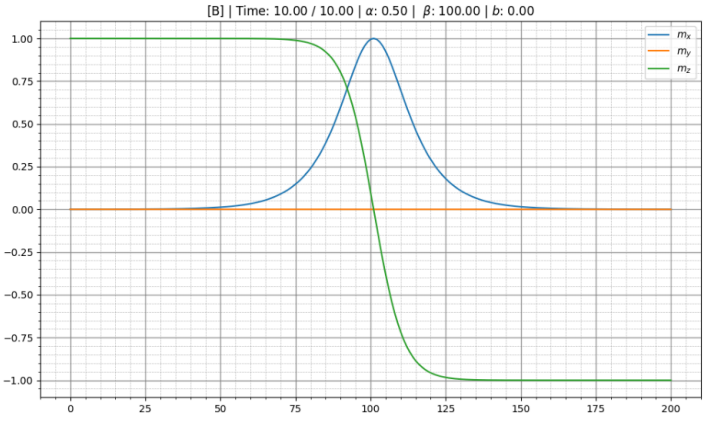
B2. $\alpha = 0.5, \beta = 100, b = 0, T = 10$으로 프로그램을 실행하자. 그림은 구간 $[0, 10]$의 여러 t에 대한 m_x, m_y, m_z의 그래프이다. 마지막 두 그림의 자화 분포가 거의 같으므로 이를 정상 상태로 볼 수 있다. 특히 정상 상태의 특징 중 하나는 모든 x에서 $m_y(x) = 0$이라는 것이다.



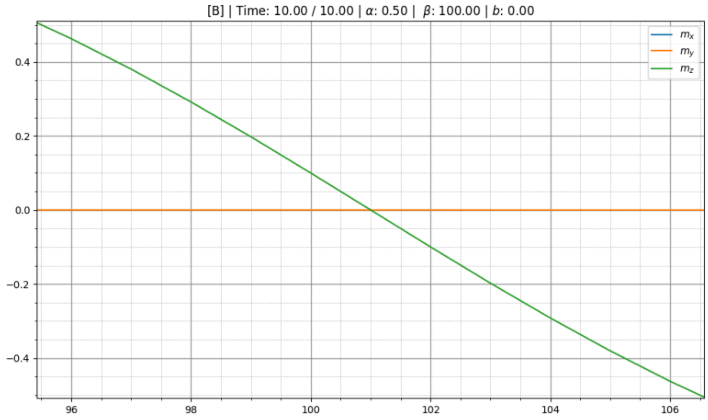








d의 측정 정확도를 높이기 위해, $t = 10$에서 그래프 $m_z(x)$의 일부를 양 끝 점이 $m_z = \pm 0.5$에 대응하도록 확대하자. $m_z = 0.5$와 $m_z = -0.5$인 점의 x좌표는 각각 $x_{\text{left}} = 95.5$와 $x_{\text{right}} = 106.5$이므로 $d = x_{\text{right}} - x_{\text{left}} = 11.0$이다.



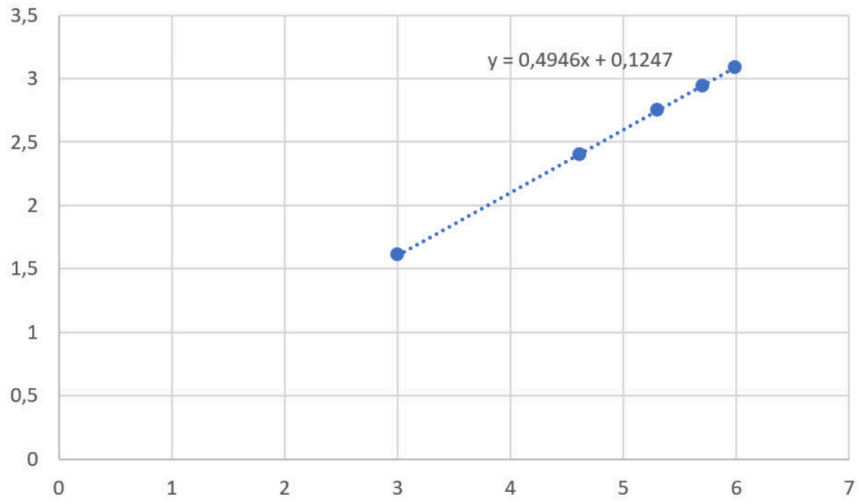
$$\boxed{d = 11.0}$$

B3. B2에서 $\alpha = 0.5, \beta = 100, b = 0, T = 10$일 때 결국 정상 상태가 됨을 보았다. 따라서 이번에는 매개변수 α와 T는 같은 값을 쓰고 $\beta \in [20, 400]$을 바꾼다. 폭 d는 B2의 풀이에서 설명한 방법으로 $t = 10$에서 구한다. 계가 실제로 정상 상태에 있는지 확인하기 위해, $t = 10$의 그래프에서 $m_y \equiv 0$인지 확인한다. 자구벽의 왼쪽(오른쪽) 경계의 좌표를 $x_{\text{left}}(x_{\text{right}})$로 나타내자. 벽의 폭은 식 $d = x_{\text{right}} - x_{\text{left}}$로 계산할 수 있다.

β	x_{left}	x_{right}	d
20	98.5	103.5	5.0
100	95.5	106.5	11.0
200	93.2	108.8	15.6
300	91.5	110.5	19.0
400	90.0	112.0	22.0

B4. $d(\beta) = \gamma\beta^c$라 하자. 여기서 γ는 상수 계수이다. 그러면 $\ln d(\beta) = \ln\gamma + c\ln\beta$이므로 의존성 $\ln d(\ln\beta)$는 선형이고 그 기울기는 c이다. B3에서 얻은 점들에 대해 $\ln d$와 $\ln\beta$를 계산하고, 얻은 데이터로 Excel에서 그래프를 그린다.

$\ln\beta$	$\ln d$
3.00	1.61
4.61	2.40
5.30	2.75
5.70	2.94
5.99	3.09



그래프 $\ln d\,(\ln\beta)$.

$$\boxed{c = 0.495}$$

C1. $b \neq 0$인 값을 하나 정하고 프로그램을 실행하자. 자구벽이 오른쪽으로 움직이는 것을 볼 수 있다.

$$\boxed{\text{오른쪽으로.}}$$

C2. 프로그램을 시작하면 과도 과정이 시작된다. b가 충분히 작으면 계는 등속 운동에 이르고, 자기장의 회전각 φ는 더 이상 변하지 않는다. 운동이 등속이 될 만큼 진화 시간이 충분히 길어야 한다. 길이 L은 진화 시간 동안 자구벽이 오른쪽 끝에 닿지 않을 만큼이어야 한다. 한편 T와 L이 커지면 실행 시간도 늘어나므로, 최적의 매개변수를 찾아야 한다.

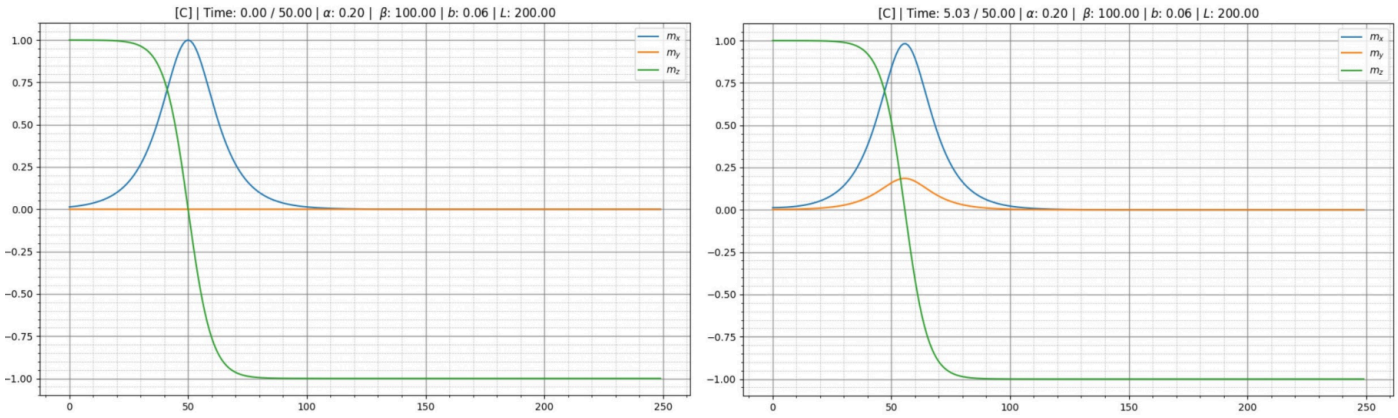
프로그램을 시작한 직후에는 아직 등속 운동이 확립되지 않았으므로, 속도를 식 $v = \frac{x - x_0}{t}$로 계산할 수 없다. 여기서 x_0은 자구벽 중심의 처음 위치이다. 측정은 정상 상태에서 해야 하므로 과도 과정의 지속 시간을 알아야 한다. 이를 위해 어떤 b에 대해 의존성 $x(t)$를 측정하여 전형적인 과도 시간을 추정하면 된다. 올바른 측정을 하는 또 다른 방법은 m_y의 모양이 시간에 따라 더 이상 변하지 않을 때에만 측정하는 것이다(m_y의

변화는 그래프를 확대해야만 보인다). 정상 상태에서는 측정 정확도가 높으므로, 벽 중심의 속도를 식 $v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$, 즉 두 점만으로 계산해도 충분하다.

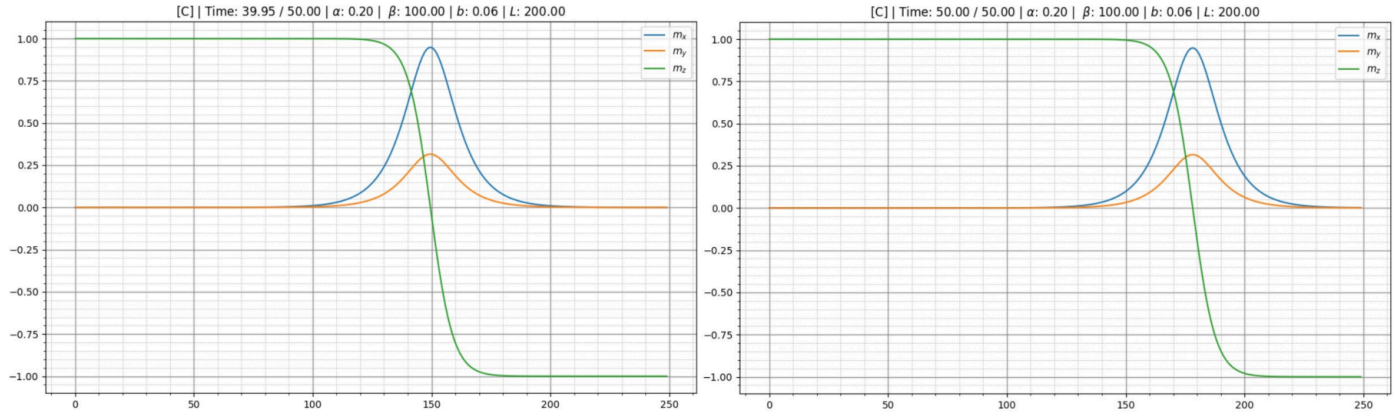
자구벽의 중심에서는 $m_z = 0$이고, $m_x = m_{x0}$, $m_y = m_{y0}$이 모두 최대이다(그래프에서 m_x와 m_y의 최댓값의 좌표와 $m_z(x) = 0$인 좌표 x가 거의 일치함을 볼 수 있다). 따라서 등속 운동이 확립된 뒤에만, 동등한 관계식 $m_{x0} = \cos\varphi, m_{y0} = \sin\varphi$ 중 어느 것으로든 각 φ를 구할 수 있다. 즉

$$\varphi = \arcsin m_{y0} = \arccos m_{x0} = \arctan \frac{m_{y0}}{m_{x0}}.$$

m_y/m_x의 그래프를 그려 보면, φ가 실제로 좌표에 의존하지 않음을 알 수 있다(참가자가 이를 확인할 필요는 없다).



과도 과정: m_y가 증가한다.



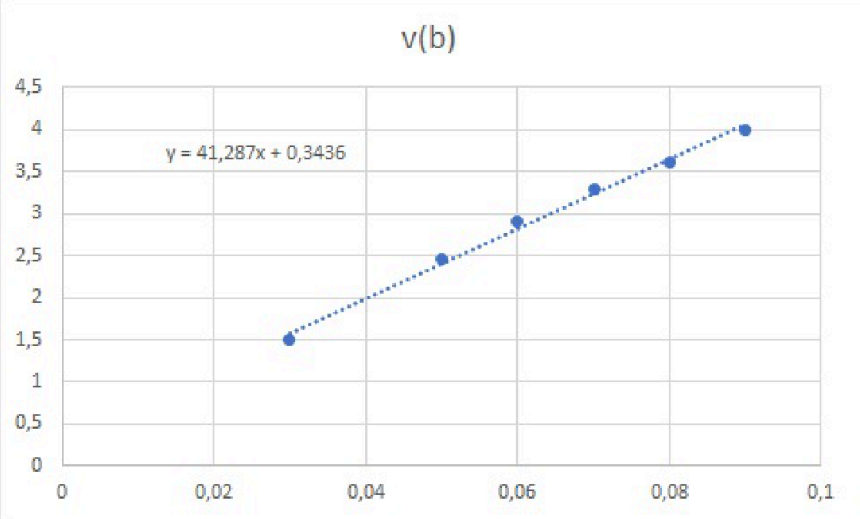
정상 상태: m_y의 모양이 일정하다.

$b > 0.1$이면 자구벽의 거동이 달라진다. 자화의 각 φ가 증가하고, 자기 모멘트가 z축 둘레로 회전한다. 자구벽의 운동에 그 중심의 진동이 동반된다. $b < 0.1$인 경우와 달리 m_y가 때때로 m_x보다 크다(주황색과 파란색 그래프가 서로 바뀐다). 따라서 $b_{\mathrm{cr}} \approx 0.1$이다.

$b < 0.1$에 대해 $v(b)$와 $\varphi(b)$를 측정하자.

b	m_y	t_1	x_1	t_2	x_2	v	φ
0.03	0.152	40	101,5	50	116,5	1,50	0,152
0.05	0.258	40	134,0	50	158,5	2,45	0,261
0.06	0.316	40	149,0	50	178,0	2,90	0,322
0.07	0.378	40	164,0	50	197,0	3,30	0,387
0.08	0.446	35	159,0	45	195,0	3,60	0,462
0.09	0.525	37	176,0	43	200,0	4,00	0,893

C3. 그래프 $v(b)$를 그리자.

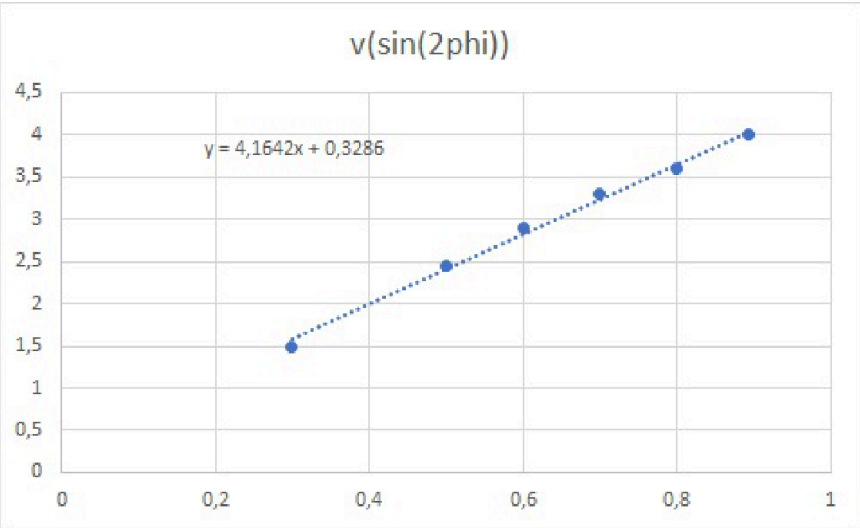


그 기울기는

$$\boxed{\frac{dv}{db} = 42}$$

C4. 그래프 $v(\sin 2\varphi)$를 그리자. 그 기울기는 $v_c = 4.2$이다. $b = b_{\text{cr}}$에서 자구벽의 속도가 임계값이 되므로

$$b_{\text{cr}} = \frac{v_c}{dv/db} = 0.10.$$



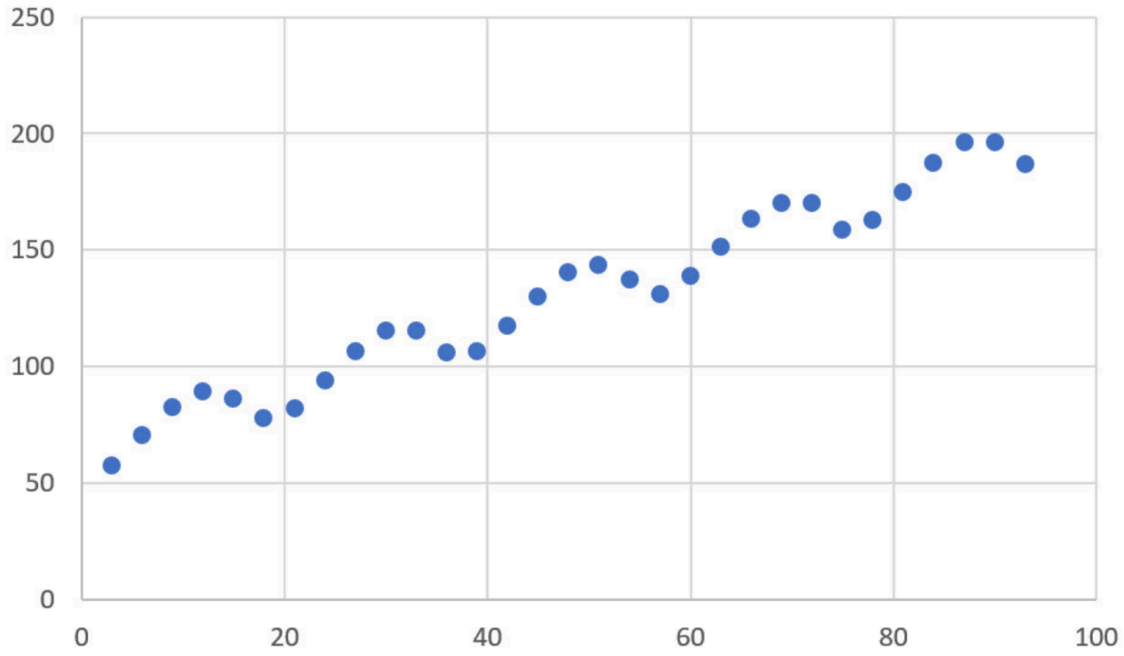
$$\boxed{v_c = 4.2, \qquad b_{\text{cr}} = 0.10}$$

C5. 답

$$\boxed{v_c = 4.2\,a\omega = 1850\ \mathrm{m/s}; \qquad B_{\mathrm{cr}} = b_{\mathrm{cr}} B_{\mathrm{an}} = 0.083\ \mathrm{T}.}$$

C6. $\alpha = 0.2$, $\beta = 100$, $b = 0.2$, $T = 100$, $L = 200$으로 프로그램을 실행하자. $t = 3, 6, 9, 12, \ldots, 90$에 대해 $m_z(x)$를 그리고, 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표로 x_{center}를 구한다.

t	x_{center}	t	x_{center}	t	x_{center}
3	57.4	33	115.2	63	151.4
6	70.1	36	105.9	66	163.3
9	82.0	39	106.2	69	170.2
12	89.2	42	117.1	72	170.0
15	86.1	45	129.9	75	158.3
18	77.3	48	140.2	78	162.8
21	81.5	51	143.6	81	174.9
24	93.6	54	137.2	84	187.4
27	106.1	57	131.0	87	196.2
30	115.0	60	138.7	90	196.1



그래프 $x_{\mathrm{center}}(t)$.