실험 시험 문제 풀이
부피 속을 흐르는 전류

1부

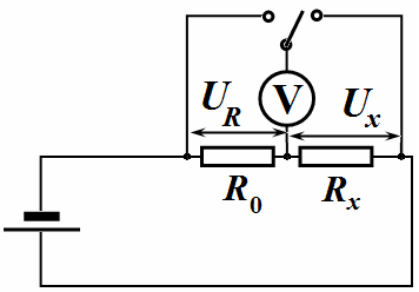
1.1 주어진 저항기의 저항은 $R_0 = 2{,}0 \pm 0{,}1\ \text{k}\Omega$이다.

1.2 두 저항기는 직렬로 연결되어 있으므로 두 저항기에는 같은 전류가 흐른다. 따라서 다음 관계가 성립한다.

$$\frac{U_R}{R_0} = \frac{U_x}{R_x}$$

이로부터 다음이 나온다.

$$R_x = R_0 \frac{U_x}{U_R}. \qquad (1)$$



따라서 미지의 저항을 측정하려면 미지의 저항과 주어진 저항기에 걸리는 전압 강하를 측정하는 것으로 충분하다.

전원 전압이 안정되어 있다면, 둘 중 하나에 걸리는 전압 강하만 측정해도 충분할 것이다.

2부

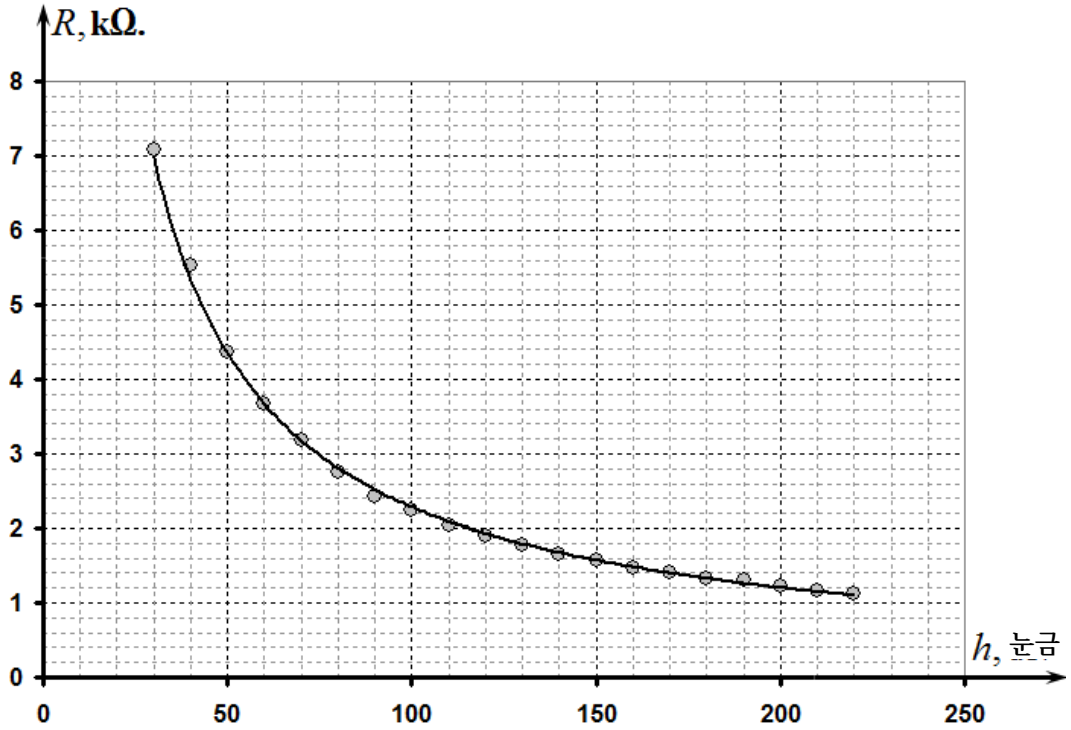
2.1 용기에 부은 물의 높이에 따른 전압 강하의 측정 결과를 표 1에 나타내었다. 이 표에는 계산으로 구한 두 전극(바퀴살) 사이 물의 저항도 나와 있다.

높이는 계량 용기의 눈금으로 측정하였음에 유의하여라.

표 1. 물의 높이에 따른 저항의 변화.

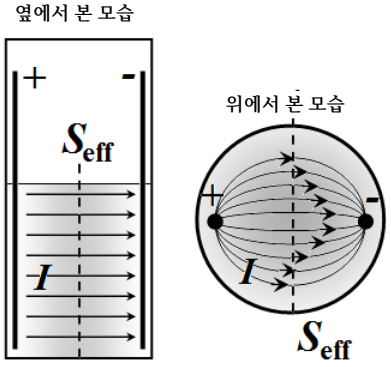
h, 눈금	$100/h$, 눈금$^{-1}$	U_x, V	U_R, V	R, kΩ	$1/R$, kΩ^{-1}
30	3,33	3,82	1,08	7,07	0,14
40	2,50	3,60	1,30	5,54	0,18
50	2,00	3,36	1,54	4,36	0,23
60	1,67	3,17	1,73	3,66	0,27
70	1,43	3,01	1,89	3,19	0,31
80	1,25	2,84	2,06	2,76	0,36
90	1,11	2,69	2,21	2,43	0,41
100	1,00	2,59	2,31	2,24	0,45
110	0,91	2,48	2,42	2,05	0,49
120	0,83	2,38	2,52	1,89	0,53
130	0,77	2,30	2,60	1,77	0,57
140	0,71	2,22	2,68	1,66	0,60
150	0,67	2,16	2,74	1,58	0,63
160	0,63	2,08	2,82	1,48	0,68
170	0,59	2,03	2,87	1,41	0,71
180	0,56	1,96	2,94	1,33	0,75
190	0,53	1,93	2,97	1,30	0,77
200	0,50	1,86	3,04	1,22	0,82
210	0,48	1,80	3,10	1,16	0,86
220	0,45	1,76	3,14	1,12	0,89

얻은 관계의 그래프는 아래 그림과 같다.



간단히 측정해 보면 부피 $V_0 = 200\ \text{mL}$가 높이 $h_0 = 170\ \text{mm}$에 해당함을 쉽게 알 수 있다. 따라서 부은 물의 높이는 식 $h = V\dfrac{h_0}{V_0}$로 계산되며, 눈금 한 칸의 값은 $\delta = 0{,}85\ \text{mm/mL}$이다.

2.2 이 경우의 전류 분포를 오른쪽 그림에 개략적으로 나타내었다.



전류는 두 바퀴살의 옆면 사이로 흐르므로, 물의 높이가 유효 단면적을 정한다.

2.3 따라서 두 바퀴살 사이 물의 저항은 물의 높이에 반비례한다고 가정하는 것이 타당하다.

$$R_{x0} = \frac{A}{h}, \qquad (2)$$

여기서 A는 단위 높이의 물이 갖는 저항을 뜻하는 상수이다. 그러면 측정되는 저항은 다음 식으로 나타내어야 한다.

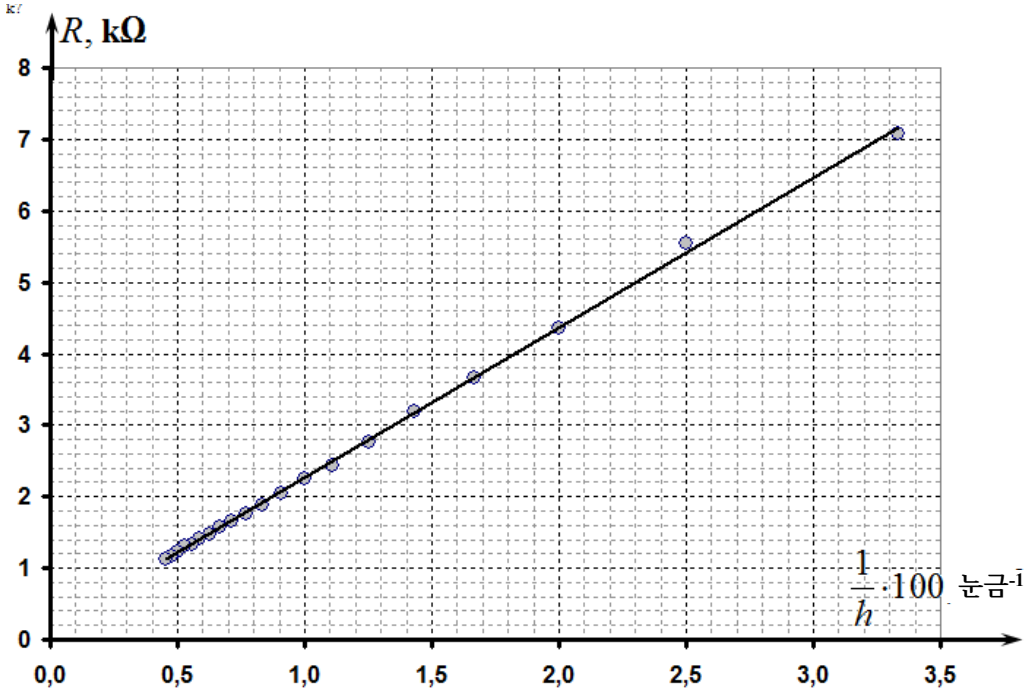
$$R_x = \frac{A}{h} + B, \qquad (3)$$

여기서 B는 추가 저항(접촉 저항, 바퀴살 표면의 산화막 등에 의한 저항)을 나타내는 상수이다.

2.4 식 (3)이 옳은지 확인하려면, 물기둥 높이의 역수 $1/h$에 대한 저항의 그래프를 그려 보면 충분하다. 즉, 다음 값들 사이에 선형 관계가 나타나야 한다.

$$y = R$$
$$x = \frac{1}{h} \cdot \qquad (4)$$

이 함수의 그래프는 아래 그림과 같다.



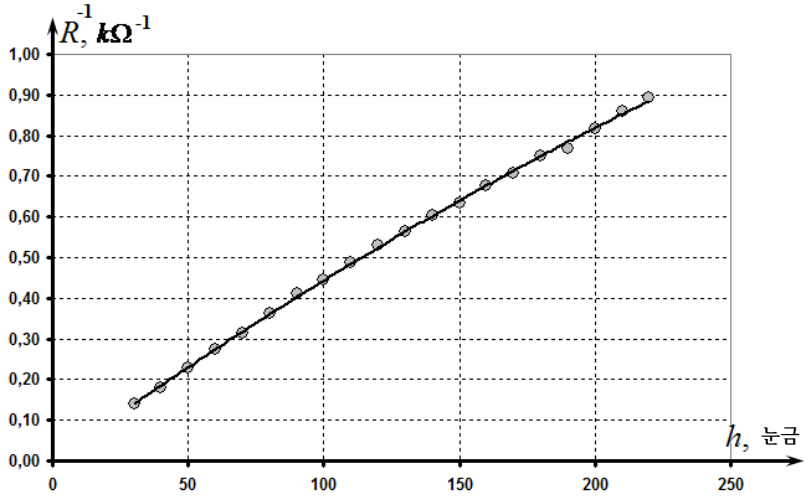
최소 제곱법으로 계산한 이 선형 관계의 매개변수는 다음과 같다.

$$a = (210 \pm 3)\ \text{kΩ} \cdot \text{눈금}$$
$$b = (0{,}17 \pm 0{,}03)\ \text{kΩ} \qquad (5)$$

식 (3)의 매개변수를 구하려면 (5)를 눈금 칸 단위에서 밀리미터 단위로 다시 계산해야 한다. 그러면 다음을 얻는다.

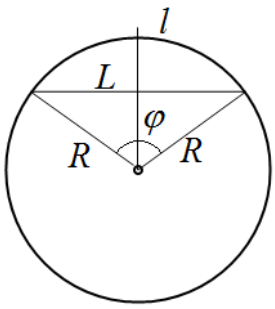
$$A = a \cdot \delta = (178 \pm 2)\, k\Omega \cdot mm$$
$$B = b = (0{,}17 \pm 0{,}03)\, k\Omega \qquad . \ (6)$$

참고. $\frac{1}{R} = \frac{h}{A}$ *꼴의 선형화를 쓸 수도 있지만, 이 방법은 회로의 추가 저항을 무시하므로 결과가 더 나쁘다.*



3부

3.1 두 바퀴살 사이의 거리를 측정하려면, 접착테이프 띠에 표시한 자국을 이용하여 두 바퀴살 사이의 호의 길이 l을 재는 것이 더 쉽다. 그러면 두 바퀴살 사이의 거리는 다음 기하학 공식으로 계산할 수 있다.



$$L = D\sin\frac{l}{D}, \qquad (7)$$

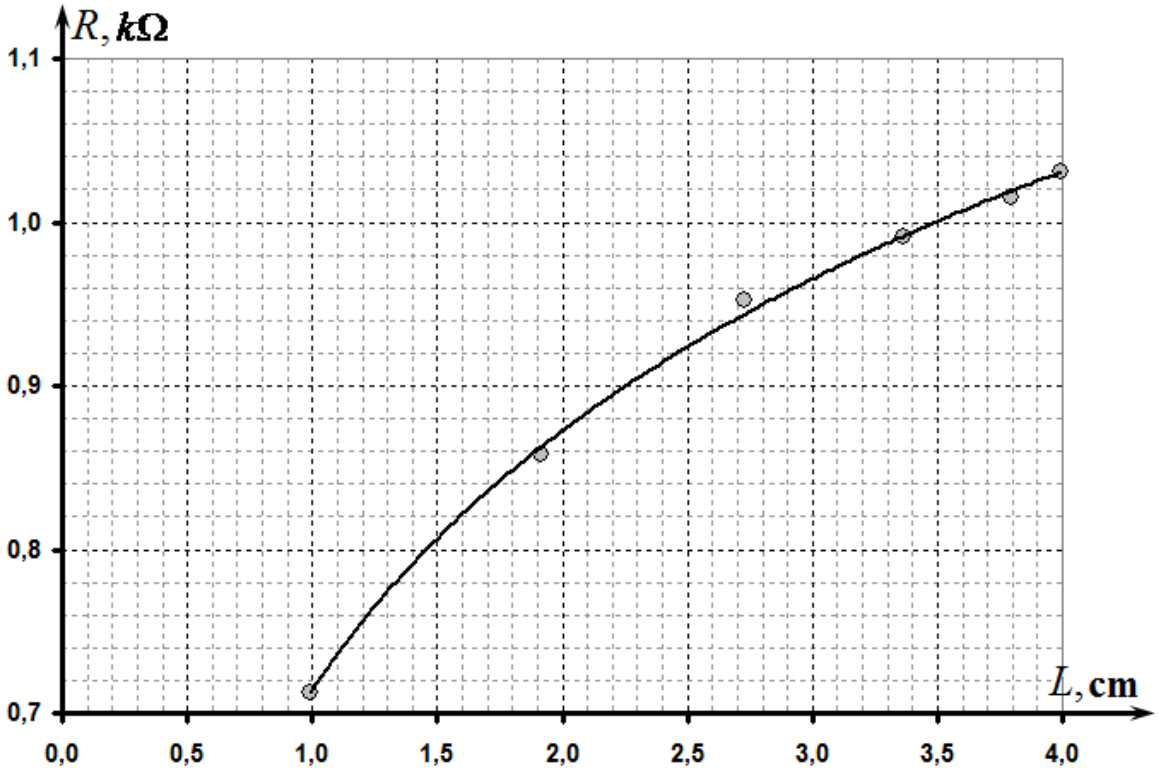
여기서 $D = 40$ mm는 계량 용기의 지름이다.

두 바퀴살 사이의 거리에 따른 물의 저항의 측정 결과를 표 2에 나타내었다.

표 2.

l, cm	L, cm	U_x, V	U_R, V	R, kΩ	$\ln L$
1	0,990	1,29	3,62	0,713	-0,010
2	1,918	1,45	3,38	0,858	0,651
3	2,727	1,59	3,34	0,952	1,003
4	3,366	1,62	3,27	0,991	1,214
5	3,796	1,64	3,23	1,015	1,334
6	3,990	1,65	3,2	1,031	1,384

얻은 관계의 그래프는 아래 그림과 같다.



3.2 무한한 매질 속에 있는 두 긴 평행 전극 사이의 매질의 저항은 이론적으로 다음과 같음을 보일 수 있다.

$$R = \frac{\rho}{\pi h}\ln\frac{L}{r_0}, \qquad (8)$$

여기서 h는 전극(바퀴살)의 길이, r_0은 전극의 반지름이다.

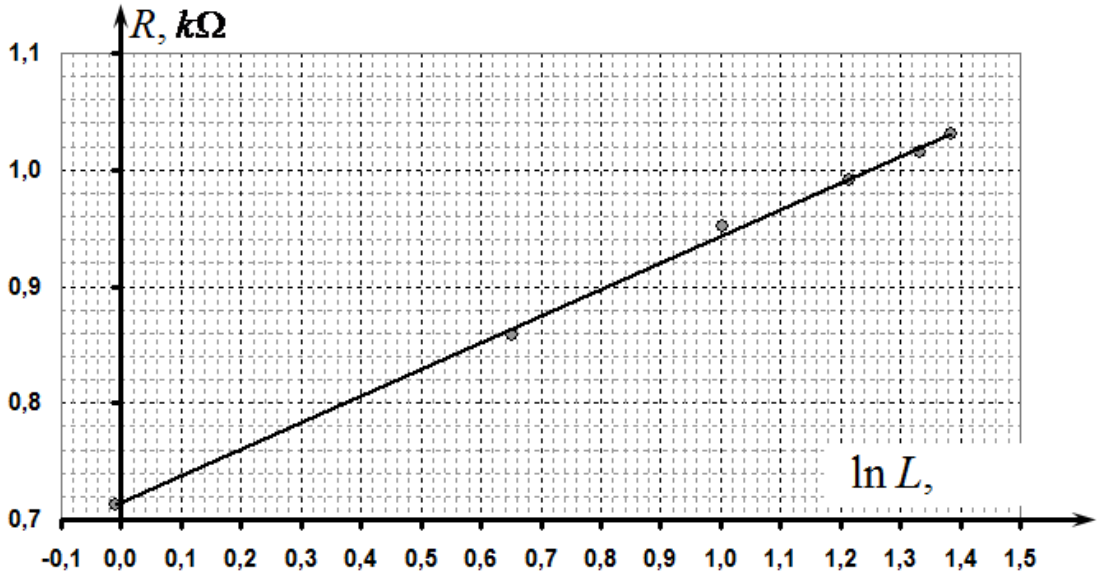
이 경우에는 두 전극 사이 물의 저항이 두 전극 사이 거리의 로그에 선형적으로 의존한다고 가정할 수 있다. 즉,

$$R(L) = A\ln L + B\,. \qquad (9)$$

3.3 (9)가 성립하는지 확인하려면, 거리의 로그 $\ln L$에 대한 저항의 그래프를 그려야 한다. 즉, 다음 값들 사이에 선형 관계가 나타나야 한다.

$$\begin{aligned} y &= R \\ x &= \ln L \end{aligned}\,. \qquad (10)$$

이 그래프는 아래 그림과 같으며, 가정 (9)가 옳음을 확인해 준다.



최소 제곱법으로 계산한 이 선형 관계의 매개변수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} a &= (0,23 \pm 0,01)\,k\Omega \\ b &= (0,71 \pm 0,01)\,k\Omega \end{aligned} \qquad (11)$$

매개변수 b의 값은 거리 L의 단위에 따라 달라짐이 분명하다. 이 경우 (11)의 값은 (9)의 매개변수에 해당한다.

4부

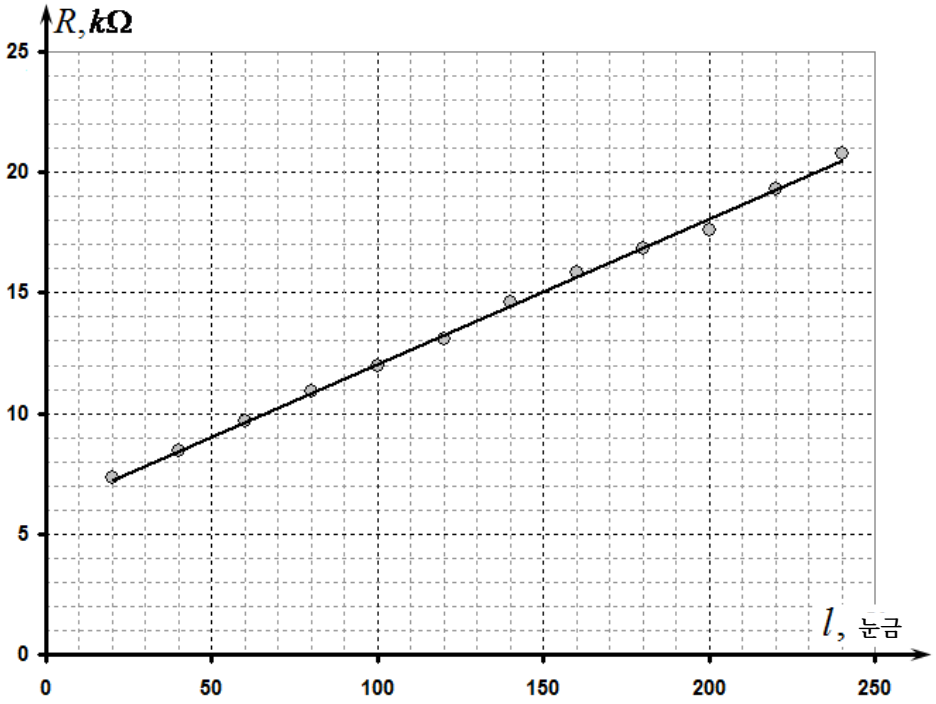
4.1 물속에 잠긴 두 번째 바퀴살 끝의 높이에 따른 저항의 측정 결과를 표 3에 나타내었다. 이 경우 높이를 재려면 계량 용기의 눈금을 사용해야 하므로, 단위는 밀리리터이다.

표 3

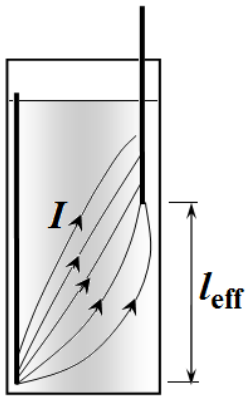
l,ml	U_x, V	U_R, V	R, kΩ
20	3,85	1,05	7,3
40	3,96	0,94	8,4
60	4,06	0,84	9,7
80	4,14	0,76	10,9
100	4,20	0,70	12,0
120	4,25	0,65	13,1
140	4,31	0,59	14,6

160	4,35	0,55	15,8
180	4,38	0,52	16,8
200	4,40	0,50	17,6
220	4,44	0,46	19,3
240	4,47	0,43	20,8

이 관계의 그래프는 아래 그림과 같다.



4.2 이 경우의 대략적인 전류 분포를 오른쪽 그림에 나타내었다.



4.3 이 경우에는 두 바퀴살 사이의 거리가 도체의 유효 길이 역할을 하므로, 두 바퀴살 사이 물의 저항은 l에 대략 선형적으로 의존하며, 이는 실험 데이터로 확인된다. 추가 저항은 바퀴살 끝 근처에서 전류가 제한되기 때문에 생길 수 있다.

따라서 이 관계는 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$R_x = al + b\,. \qquad (12)$$

4.4 얻은 실험 데이터에 따르면 모든 거리 l에서 선형 관계가 성립한다. l이 작거나 클 때에는 선형에서 벗어날 수 있다. 그러나 $l \in [50,\ 150]$ 범위에서는 관계가 분명히 선형이다.

최소 제곱법으로 계산한 (12)의 매개변수는 다음과 같다.

$$a' = (0{,}060 \pm 0{,}002)\ \text{kΩ/눈금}$$
$$b = (6{,}0 \pm 0{,}3)\ \text{kΩ} \qquad (13)$$

높이 h를 밀리미터 단위로 재면 계수 a의 값은 다음과 같다.

$$a = (0{,}071 \pm 0{,}002)\ \text{kΩ/mm}\,. \qquad (14)$$

5부

5.1 물의 비저항을 추정하려면 4부의 데이터를 사용하는 것이 좋다. 얻은 관계가 선형이라는 것은 가운데 부분에서 유선이 용기 벽에 거의 평행하다는 것을 보여 준다. 또한 이 영역에서는 전류가 용기의 단면 전체를 지나 흐른다고 가정할 수 있다. 따라서 이 문제에 제시된 저항 공식을 사용할 수 있다.

얻은 기울기 값 (14)는 물기둥 1밀리미터의 저항이므로, 이로부터 물의 비저항을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$a = \frac{\Delta R}{\Delta l} = \frac{\rho}{S} \quad \Rightarrow \quad \rho = aS = a\frac{V_0}{h_0}. \tag{7}$$

수치를 대입하면 다음을 얻는다.

$$\rho = a\frac{V_0}{h_0} = 0,071\frac{10^3\Omega}{10^{-3}\text{m}}\cdot\frac{200\cdot10^{-6}\text{m}^3}{170\cdot10^{-3}\text{m}} \approx 83\Omega\cdot\text{m} \tag{8}$$

실험 시험 채점 기준

멀티미터의 저항계(옴미터) 모드로 저항을 측정한 경우에는 측정 결과에 대한 점수를 절반으로 줄인다!

아래 표에서 기울임꼴은 다른 풀이에 대한 채점을 나타낸다.

번호	내용	합계	점수
1.1	저항 $R_0 = 2,0 \pm 0,1\ \text{k}\Omega$	0,2	0,2
1.2	식 (1)	0,3	0,3
2.1	실험 데이터의 측정과 그래프 작성 (저항값이 1~10 kΩ 범위에서 타당하게 얻어져야 한다. 그렇지 않으면 점수 없음)	2,5	
	측정 범위가 눈금 180칸(최댓값−최솟값)보다 넓은 경우; 눈금 150칸보다 넓은 범위인 경우; 눈금 100칸보다 넓은 범위인 경우; 눈금 100칸 미만인 경우;		0,75 (0,5) (0,25) (0)
	실험 측정점의 수: 10개 이상; 7~9개; 5~6개; 5개 미만		0,75 (0,5) (0,25) (0)
	측정한 각 점에 대해 저항값을 올바르게 계산함		0,25
	단조 감소하는 관계를 얻음; 저항이 5배 이상 변함; 저항이 5배 미만으로 변함;		0,25 (0)
	그래프 작성 - 그래프 크기가 용지의 1/4 이상; - 축에 단위를 표시하고 눈금 수치를 적음; - 표의 모든 데이터 점을 올바르게 그림; - 점들을 지나는 매끄러운 선을 그림;		 0,1 0,1 0,2 0,1
2.2	그림에 유선을 나타냄	0,5	
	바퀴살 평면에서: 바퀴살에 수직인 직선(용기 바닥과 윗부분 근처에서는 약간 휘어질 수		0,25

	있음);		
	수직 평면에서: 두 전극 사이에서 단면의 대부분을 채우는 볼록하고 대칭인 선;		0,25
2.3	관계의 꼴	0,8	
	- 반비례; (그렇지 않으면 점수 없음)		0,6
	- 저항에 상수 성분이 있음;		0,2
2.4	선형화와 매개변수 결정	1,2	
	관계의 종류: - $R(1/h)$ 관계; - $R^{-1}(h)$ 관계 또는 로그-로그 눈금; - 기타;		 0,2 (0,1) (0)
	선형화한 관계의 그래프 작성 - 모든 점을 그림; - 점들을 지나는 매끄러운 선을 그림		 0,2 0,2
	- 선형화한 관계의 매개변수를 올바르게 구함 ($(200 \pm 30\%)$ kΩ·눈금 간격, 또는 $(180 \pm 30\%)$ kΩ·mm - 편차가 30%~75%이면 점수는 절반; - 편차가 크면 점수 없음) - 최소 제곱법을 사용; - 그래프(또는 모든 점)를 사용; - 두 점을 사용;		 0,4 (0,2) (0,1)
	길이 단위(mm 또는 cm)로 나타낸 높이의 계산 - 눈금 한 칸의 값을 측정하고 계산함 (올바름) - 기울기의 계산 (앞의 모든 계산을 길이 단위로 한 경우)		 0,1 0,1 (0,1)
3.1	실험 데이터의 측정과 그래프 작성(저항값이 0.5~2 kΩ 범위에서 타당해야 한다. 그렇지 않으면 점수 없음)	1,5	
	두 바퀴살 사이 거리의 측정: - 원호를 재고 계산함; - 자로 직접 잼;		 0,2 (0,1)
	- 1~4 cm 범위에서 측정함 - (그렇지 않으면 점수 없음);		0,3
	- 측정점의 수 6개 이상; - 측정점의 수 4~5개; - 4개 미만		0,3 (0,2)
	증가하는 볼록한 관계를 얻음		0,2
	그래프 작성 - 그래프 크기가 용지의 1/4 이상; - 축에 단위를 표시하고 눈금 수치를 적음; - 표의 모든 데이터 점을 올바르게 그림; - 점들을 지나는 매끄러운 선을 그림;		 0,1 0,1 0,2 0,1
3.2	관계의 꼴	1	
	로그 관계 관계에 상수 기여가 있음;		0,7 0,3

	그 밖의 타당한 볼록 증가 관계		(0,3)
3.3	선형화와 매개변수 결정	1	
	- $R(\ln L)$ 관계; - 그 밖에 3.2의 식에 따른 타당한 선형화		0,4 (0,2)
	선형화한 관계의 그래프 작성 - 모든 점을 그림; - 매끄러운 선을 그림;		 0,1 0,1
	매개변수: (기울기가 $a = (0{,}2 \pm 30\%)$ kΩ 범위에 있음; - 편차가 30%~75%이면 점수는 절반; - 편차가 크면 점수 없음) - 최소 제곱법을 사용; - 그래프(또는 모든 점)를 사용; - 두 점을 사용;		 0,4 (0,2) (0,1)
4.1	실험 데이터의 측정과 그래프 작성 (저항값이 5~30 kΩ 범위에서 타당하게 얻어져야 한다. 그렇지 않으면 점수 없음)	2,4	
	측정 범위가 눈금 180칸(최댓값−최솟값)보다 넓은 경우; 눈금 150칸보다 넓은 범위인 경우; 눈금 100칸보다 넓은 범위인 경우; 눈금 100칸 미만인 경우;		0,75 (0,5) (0,25) (0)
	실험 측정점의 수: 10개 이상; 7~9개; 5~6개; 5개 미만		0,75 (0,5) (0,25) (0)
	측정한 각 점에 대해 저항값을 올바르게 계산함		0,2
	단조 증가하는 관계를 얻음; 그래프에 선형인 부분이 있음 그래프에 선형인 부분이 없음		0,3 (0,1)
	그래프 작성 - 축에 단위를 표시하고 눈금 수치를 적음; - 표의 모든 데이터 점을 올바르게 그림; - 점들을 지나는 매끄러운 선을 그림;		 0,1 0,2 0,1
4.2	유선의 개형	0,3	
	선이 - 바퀴살의 드러난 끝에서 시작함; - 곧장 위로 향함; - 두 번째 바퀴살의 길이를 따라 분포함;		0,1 0,1 0,1
4.3	관계의 꼴	0,4	
	- l에 비례하는 항이 있음; - 상수 성분이 있음; (선형이 아닌 관계는 인정하지 않음);		0,2 0,2
4.4	선형 구간	0,1	
	- 구간을 표시함(구간 양 끝 근처에서는 측정값이 벗어나도 됨)		0,1
4.5	매개변수	0.8	

	- 선형화한 관계를 올바르게 구함: 기울기 ((0,060 ± 30%) kΩ/눈금 또는 (0,07 ± 30%) kΩ/mm - 편차가 30%~75%이면 점수는 절반; - 편차가 크면 점수 없음) - 최소 제곱법을 사용; - 그래프(또는 모든 점)를 사용; - 두 점을 사용;		0,6 (0,4) (0,2)
	- 저항의 상수 성분: - 4~10 kΩ 범위 - 2~4 kΩ 또는 10~12 kΩ 범위; - 그 밖에는 점수 없음;		0,2 (0,1)
5.1	물의 비저항 계산	2	
	- 4부의 관계를 사용함; - 그 밖의 타당한 관계(저항 식이 올바른 경우);		0,3 (0,1)
	식 (7)을 사용하여 다음으로 저항을 계산함: - 그래프의 기울기; - (1~2개의 점을 이용한 계산);		0,4 (0,2)
	비저항 계산(80 Ω·m): - 60~100 Ω· 범위의 값; - 40~120 Ω· 범위의 값; - 20~150 Ω· 범위의 값; - 그 밖에는 0점.		1,3 (1,0) (0,5)