실험 시험 문제 풀이

비틀림 진자 (15.0점)

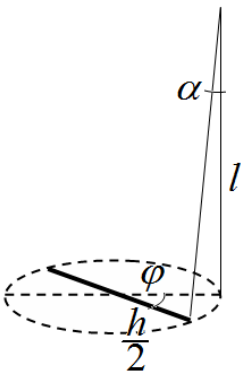
1부. 작은 자유 진동 (5.0점)

1.1 실의 길이에 따른 진동 주기의 측정 결과를 표 1에 나타내었다. 실의 길이마다 10번 진동하는 시간을 3번씩 측정하였다. 진동 주기는 측정한 시간의 평균으로부터 계산하였다.

표 1.

l, sm	t_1, s	t_2, s	t_3, s	T, s	T^2, s^2
61	48,19	48,02	48,34	4,82	23,22
49	43,57	43,31	43,81	4,36	18,98
39	38,56	38,34	38,37	3,84	14,76
28	33,1	32,94	32,78	3,29	10,85
19	26,44	27,03	26,62	2,67	7,13
10	18,91	19,35	19,22	1,92	3,67

1.2 볼트를 수평면에서 작은 각 φ만큼 돌리면 실은 연직선에서 작은 각 α만큼 기울어진다. 기하학적으로 두 각 사이의 관계는 다음과 같다.



$$\frac{h}{2}\varphi = l\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{h}{2l}\varphi, \tag{1}$$

여기서 l은 실의 길이이고 h는 두 실 사이의 거리이다.
실이 연직선에서 기울어지면 퍼텐셜 에너지가 다음과 같이 증가한다.

$$\Delta U = mgl(1-\cos\alpha) \approx mgl\frac{\alpha^2}{2} = \frac{1}{2}mgl\left(\frac{h}{2l}\varphi\right)^2. \tag{2}$$

비틀림 진동에 대한 에너지 보존 법칙은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{I\omega^2}{2} + \frac{1}{2}mgl\left(\frac{h}{2l}\varphi\right)^2 = E = const, \tag{3}$$

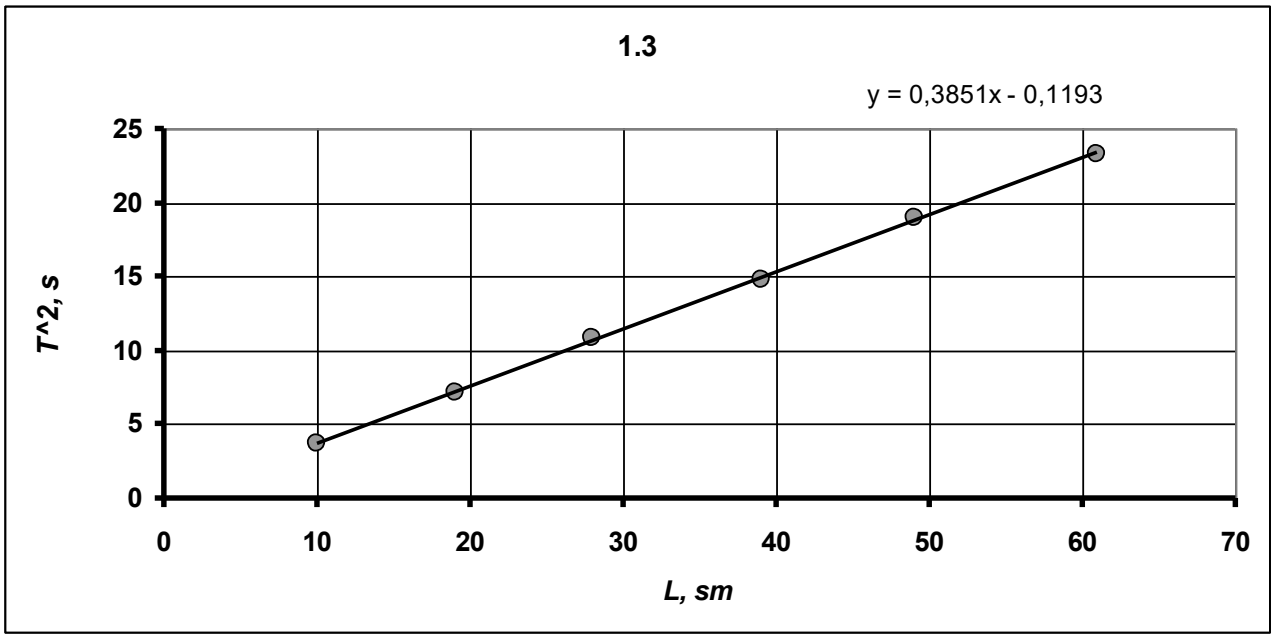
여기서 I는 진자의 관성 모멘트이다.
에너지 보존 법칙 (3)은 다음 주기를 갖는 조화 진동에 해당한다.

$$T = 4\pi\sqrt{\frac{I}{mg}\frac{l}{h^2}}. \tag{4}$$

1.3 얻은 식을 확인하려면 주기의 제곱을 실의 길이에 대한 그래프로 그려야 한다(그림 1.1 참고). 뚜렷한 선형 관계는 식 (4)가 옳다는 것을 증명한다.
최소 제곱법으로 계산한 선형 관계 $T^2 = al + b$의 계수는 다음과 같다.

$$a = (0,385 \pm 0,009)\frac{s^2}{sm}, \quad b = -(0,12 \pm 0,3)s^2. \tag{5}$$

$\Delta b < b$가 성립하므로 이 관계는 선형으로 볼 수 있다.



1.4 식 (4)로부터 진동 주기를 회전 반지름으로 나타내면 다음과 같다.

$$T = 4\pi\sqrt{\frac{I}{mg}\frac{l}{h^2}} = 4\pi\sqrt{\frac{mR^2}{mg}\frac{l}{h^2}} = \frac{4\pi R}{h\sqrt{g}}\sqrt{l}\ . \qquad (6)$$

따라서 1.3에서 구한 기울기로부터 회전 반지름을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$a = \left(\frac{4\pi R}{h\sqrt{g}}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad R = h\frac{\sqrt{ag}}{4\pi} = 4,33sm\,. \qquad (7)$$

두 실 사이의 거리는 $h = (2,8 \pm 0,1)sm$로 측정되었다.

실험 오차는 다음 식으로 계산한다.

$$\Delta R = R\sqrt{\left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{\Delta a}{a}\right)^2} = 4,33\sqrt{\left(\frac{0,1}{2,8}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{0,009}{0,385}\right)^2} = 0,16sm\,. \qquad (8)$$

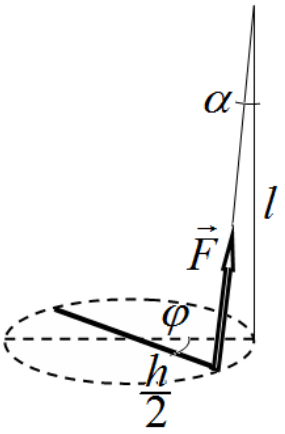
2부. 장력을 더한 작은 진동 (5.0점)

실의 장력에 따른 진동 주기의 측정 결과를 표 2에 나타내었다.

표 2.

z, mm	t_1, s	t_2, s	t_3, s	T, s	T^{-2}, s^{-2}
12	10,22	10,28	10,40	1,03	0,94
20	7,10	7,03	7,18	0,71	1,98
27	5,63	5,62	5,69	0,56	3,14
37	4,53	4,50	4,53	0,45	4,89
52	3,75	3,88	3,87	0,38	6,81

2.2 복원력의 돌림힘은 실의 장력 $\vec{F}$와 비틀림 각에 따라 달라진다. 비틀 때 장력이 변하는 것은 고차의 보정이다.



따라서 이 경우 회전 운동 방정식은 다음 꼴이다.

$$I\ddot{\varphi} = -kF\varphi\,. \qquad (9)$$

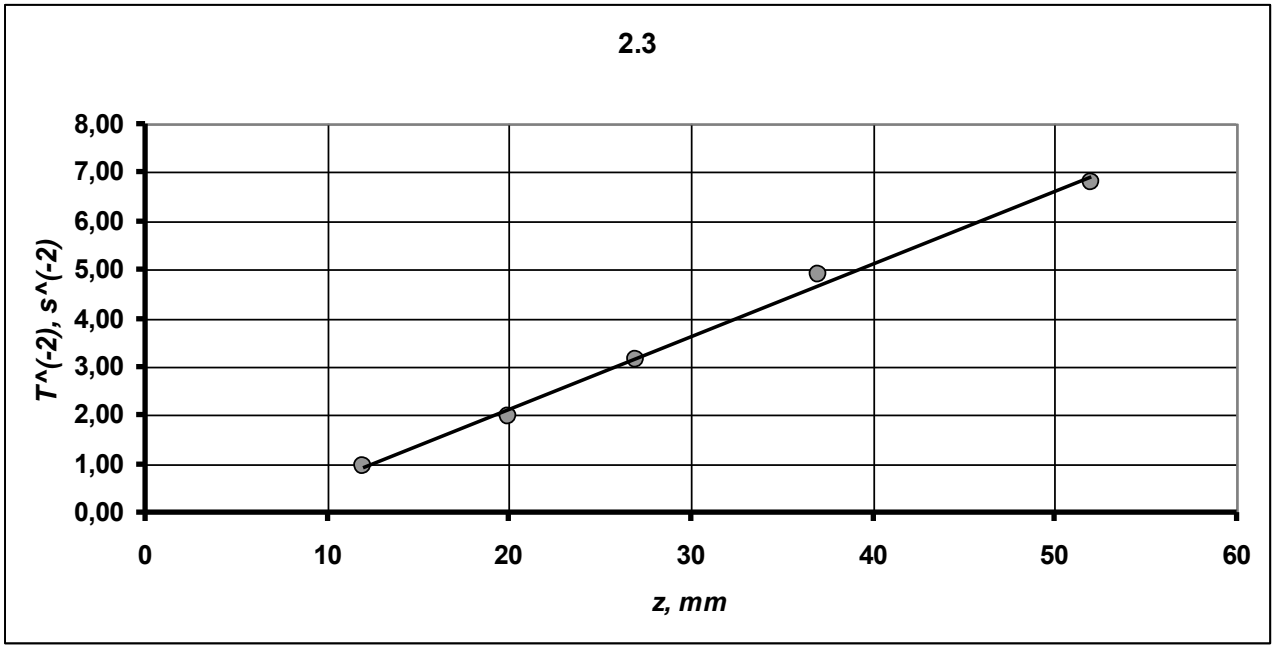
따라서 이 진동의 주기는 실의 장력의 제곱근에 반비례한다.

$$T = \frac{C}{\sqrt{F}} = \frac{A}{\sqrt{z}}, \qquad (10)$$

여기서 C, A는 어떤 상수이다.

2.3 이 관계를 확인하려면 $T^{-2}(z)$의 그래프를 그려야 한다. 이 경우 다른 선형화 방법은 덜 믿을 만한데, 휨 z를 잴 때 일정한 편차가 생기는 것을 피할 수 없기 때문이다.

$T^{-2}(z)$의 그래프를 그림 2.3에 나타내었다.



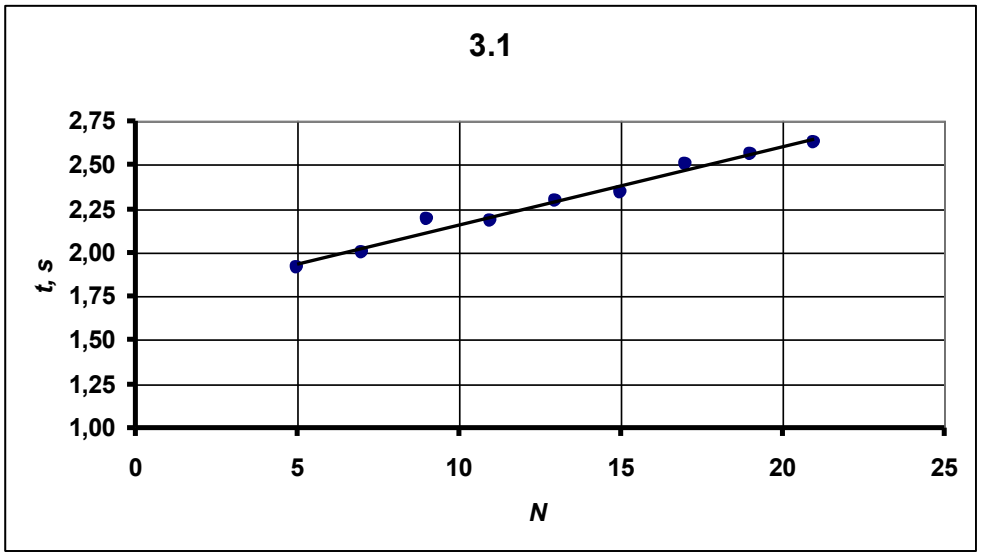
얻은 선형 관계는 주기가 실의 장력의 선형 함수라는 이론적 결론을 확인해 준다.

3부. 큰 각도의 비틀림 (5.0점)

3.1 풀림 시간이 비틀림 각에 따라 어떻게 달라지는지를 표 3과 그림 3.1에 나타내었다.

표 3.

N	*t, s*
5	1,91
7	2,00
9	2,19
11	2,18
13	2,29
15	2,34
17	2,50
19	2,56
21	2,63

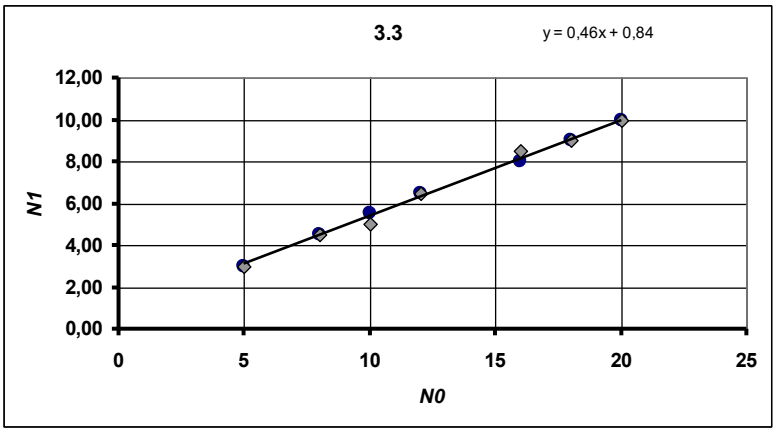


3.2 풀림 시간은 진동 주기의 1/4로 볼 수 있다. 풀림 시간이 "진폭"에 따라 증가하므로, 퍼텐셜 에너지는 조화 진동의 경우보다 더 느리게 증가한다. 즉 $\gamma < 2$이다.

3.3 다시 비틀린 반 바퀴 수 N_1이 처음 비틀린 반 바퀴 수 N_0에 따라 어떻게 달라지는지를 표 4와 그래프 3.3에 나타내었다. 얻은 관계는 실의 장력에 거의 무관하다.

표 4.

	$z = 35mm$	$z = 20mm$
N_0	N_1	N_1
20	10,0	10,0
18	9,0	9,0
16	8,0	8,5
12	6,5	6,5
10	5,5	5,0
8	4,5	4,5
5	3,0	3,0



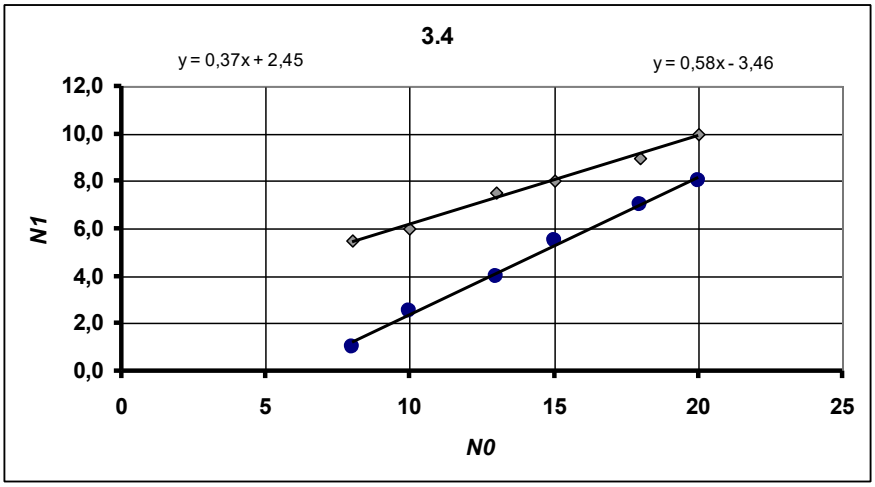
이 관계는 다음 일차 함수로 나타낼 수 있다.

$$N_1 = 0{,}46N_0 + 0{,}84\,. \qquad (11)$$

3.4-3.5 추를 들어 올릴 때와 들어 올리지 않을 때, 처음 비틀림 각 N_0에 따른 반 바퀴 수 N_1의 관계를 표 5와 그래프 3.4에 정리하였다. 이 관계들은 선형이다. 중요한 점은, 추를 더하지 않고 올라갈 때 해당하는 N_1 값이 훨씬 더 크다는 것인데, 이는 추를 들어 올리지 않는 동안 에너지가 공급된다는 것을 보여 준다. 또한 마지막 관계는 정확한 비례 관계로 볼 수 없다.

표 5.

	추 있음	추 없음
N_0	N_1	N_1
20	8,0	10,0
18	7,0	9,0
15	5,5	8,0
13	4,0	7,5
10	2,5	6,0
8	1,0	5,5



이 관계들은 다음 일차 함수들로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} N_1 &= 0{,}58N_0 - 3{,}5 \\ N_1 &= 0{,}37N_0 + 2{,}5 \end{aligned}. \qquad (12)$$

채점 기준

	내용	총점	배점
	1부. 작은 자유 진동.	**5**	
1.1	***측정 결과와 공식 결과의 차이가 25%를 넘지 않을 때에만 채점한다***	**2**	
	서로 다른 진자 길이의 개수: 5개 이상 (*3–4개; 3개 미만*);		0,8*(0,4;0)*
	주기를 잴 때의 진동 횟수: 10번 이상 (*5–9번; 5번 미만*);		0,3*(0,1;0)*
	모든 측정에 대해 주기를 계산함;		0,2
	진자 길이의 범위 40 *cm* 이상 (*30–40 cm, 20–30 cm; 20 cm 미만*)		0,7 *(0,5;0,3;0)*
1.2	이론식 유도: 정확한 식을 얻음: $T = 4\pi\sqrt{\frac{I}{mg}\frac{l}{h^2}}$; $T = A\sqrt{l}$ *관계만 예측함(또는* $\sqrt{l}$ *)의 계수가 틀림)*	**0,5**	 0,5 *(0,2)*
1.3	***1.1의 측정에 점수를 받았을 때에만 채점한다!*** 올바른 선형화 $T^2(l)$, $T\left(\sqrt{l}\right)$; *다른 선형화* $\ln T(\ln l)$ *거듭제곱 지수가 1/2임을 증명함*	**1**	 0,5 *(0,2)* *(0,3)*
	그래프 그리기 *(선형화하지 않은 관계는 채점하지 않는다)*: - 축의 이름과 눈금을 표시함;		0,1

	- 실험 데이터를 그림; - 직선을 그림;		0,1 0,1
	선형 관계가 확인됨;		0,2
1.4	***1.1의 측정에 점수를 받았을 때에만 채점한다!*** 모든 주기에 대해 회전 반지름을 계산함; *주기 2개에 대해서만 계산함;* *주기 1개에 대해서만 계산함;*	**1,5**	 0,3 *(0,2)* *(0,1)*
	선형화한 관계의 기울기를 구한 방법: 최소 제곱법; *그래프로부터;*		 0,2 *(0,1)*
	두 실 사이의 거리를 잼 정밀도를 밝힘		0,1 0,1
	회전 반지름을 계산하는 식		0,1
	회전 반지름의 수치가 다음 범위에 있음: 4,2 – 4,4 *cm* (*4,0 – 4,6 cm; 범위 밖*)		 0,4*(0,2;0)*
	오차 평가: - 기울기의 오차; - 두 실 사이 거리의 오차; - 최종 오차;		 0,1 0,1 0,1
	2부. 장력을 더한 작은 진동	**5**	
2.1	***측정 결과와 공식 결과의 차이가 50%를 넘지 않을 때에만 채점한다***	**2**	
	서로 다른 실의 장력의 개수: 5개 이상 (*3–4개; 3개 미만*);		 0,8*(0,4;0)*
	주기를 잴 때의 진동 횟수: 10번 이상 (*5–9번; 5번 미만*);		 0,3*(0,1;0)*
	모든 측정에 대해 주기를 계산함;		0,2
	주기의 변화 범위 2,5배 이상 (*2,0배, 1,5배; 그보다 작음*)		0,7 *(0,5;0,3;0)*
2.2	이론식 유도: $T = \frac{A}{\sqrt{F}}$ 관계를 정당화함 *(실의 장력을 일정하게 보고, 돌림힘이 F에 비례한다고 하여 진동 방정식을 세움)*; *증명 없이* $T = \frac{A}{\sqrt{F}}$ *이라고만 씀*	**1**	 1,0 *(0,3; 0,3; 0,4)* *(0,2)*
2.3	***2.1의 측정에 점수를 받았을 때에만 채점한다!!*** 올바른 선형화 $T^{-2}(z)$; *다른 선형화* $T\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)$ *선형화* $\ln T(\ln l)$ *를 사용하고, 거듭제곱 지수가 1/2임을 증명함*	**2**	 1,0 *(0,5)* *(0,3+0,2)*
	그래프 그리기 (선형화하지 않은 관계는 채점하지 않는다): - 축의 이름과 눈금을 표시함; - 실험 데이터를 그림; - 직선을 그림;		 0,1 0,1 0,1
	선형 관계가 확인됨;		0,7
	3부. 큰 각도의 비틀림	**5**	
3.1	***측정 결과와 공식 결과의 차이가 50%를***	**1,0**	

	넘지 않을 때에만 채점한다		
	서로 다른 N 값의 개수: 5개 이상 (*3–4개; 3개 미만*);		 0,4 *(0,2;0)*
	측정을 3번 되풀이함;		0,1
	증가하는 $t(N)$ 관계를 얻음		0,2
	그래프 그리기 ***(측정 결과에 점수를 받았을 때에만 채점한다)**:* - 축의 이름과 눈금을 표시함; - 실험 데이터를 그림; - 직선을 그림;		 0,1 0,1 0,1
3.2	퍼텐셜 에너지의 거듭제곱 지수 $\gamma < 2$ 근거: U가 조화 진동의 경우보다 느리게 증가함	**0,3**	 0,2 0,1
3.3	***기울기가 0,35–0,65 범위에 있을 때에만 채점한다***	**1,5**	
	서로 다른 N_0 값의 개수: 5개 이상 (*3–4개; 3개 미만*);		 0,5*(0,2;0)*
	측정을 3번 이상 되풀이함;		0,1
	증가하는 선형 관계를 얻음;		0,2
	그래프 그리기 ***(측정 결과에 점수를 받았을 때에만 채점한다)**:* - 축의 이름과 눈금을 표시함; - 실험 데이터를 그림; - 직선을 그림;		 0,1 0,1 0,1
	일차 함수를 제안함; 매개변수의 수치를 구함;		0,1 0,2
	두 장력에서 기울기가 같음;		0,1
3.4	***기울기가 0,25–0,65 범위에 있을 때에만 채점한다***	**1**	
	서로 다른 N_0 값의 개수: 5개 이상 (*3–4개; 3개 미만*);		0,3*(0,1;0)*
	증가하는 선형 관계를 얻음;		0,1
	그래프 그리기 ***(측정 결과에 점수를 받았을 때에만 채점한다)**:* - 축의 이름과 눈금을 표시함; - 실험 데이터를 그림; - 직선을 그림;		 0,1 0,1 0.1
	일차 함수를 제안함; 매개변수의 수치를 구함;		0,1 0,2
3.5	***기울기가 0,25–0,75 범위에 있고 직선이 위로 이동했을 때에만 채점한다!***	**1,2**	
	서로 다른 N_0 값의 개수: 5개 이상 (*3–4개; 3개 미만*);		 0,4*(0,2;0)*
	위로 이동한 증가하는 선형 관계를 얻음;		0,2+0,1
	그래프 그리기 ***(측정 결과에 점수를 받았을 때에만 채점한다)**:* - 실험 데이터를 그림; - 직선을 그림;		 0,1 0,1
	일차 함수를 제안함; 매개변수의 수치를 구함;		0,1 0,2