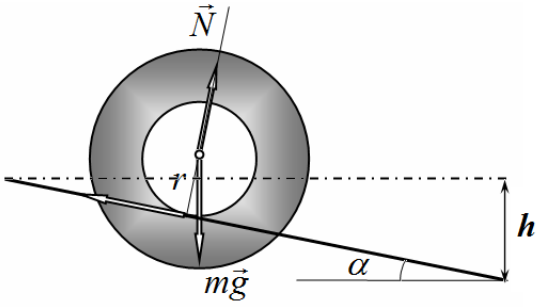
실험 시험 문제 풀이
맥스웰 원판 (15,0점)

1부. 굴러 내려가기

1.1 막대와 실이 닿는 점에 대한 회전 운동의 동역학 기본 방정식은 다음과 같다.

$$\left(\frac{mR^2}{2}+mr^2\right)\frac{a}{r}=mgr\sin\alpha\,, \qquad (1)$$

여기서 R는 원판의 반지름, r는 막대의 반지름이다.



따라서 원판 축의 가속도에 대한 식은 다음과 같이 얻어진다.

$$a=\frac{g}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2}\sin\alpha. \qquad (2)$$

1.2 실이 수평과 이루는 각을 바꾸고 측정하려면 스탠드의 고정대 하나를 높이 h만큼 위로 옮겨야 한다. 따라서 경사각의 사인은 다음과 같이 구한다.

$$\sin\alpha=\frac{h}{L}, \qquad (3)$$

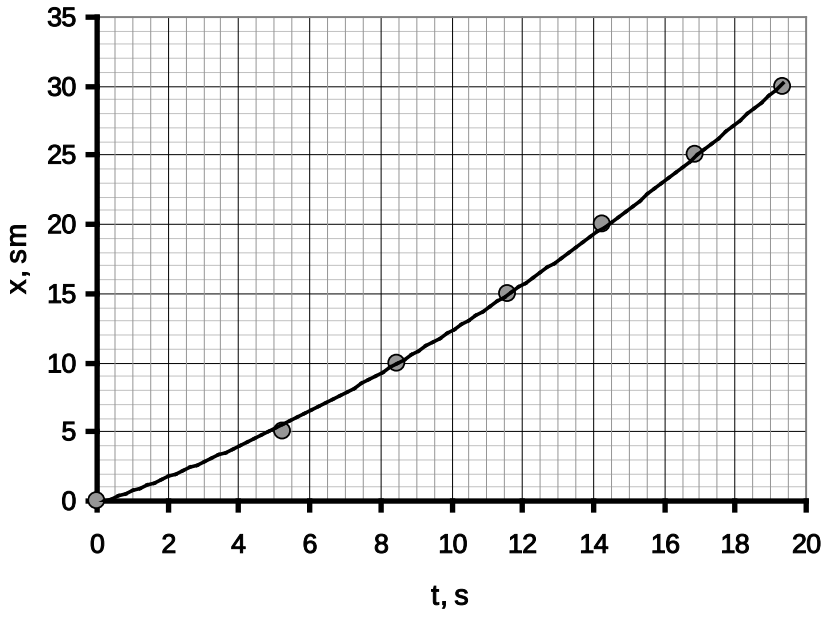
여기서 L은 실의 길이이다(이 실험에서는 $L=70$ cm).

이 부분에서는 $h=3{,}0$ cm에서 측정하였다. 실에 일정한 간격으로 표시를 하고 이동 시간을 스톱워치로 잰다. 실제로는 원판을 처음 표시에서 밀지 않고 놓기가 어렵다는 점이 문제이다. 그래서 처음 표시를 기준점으로 삼지만, 이때 원판의 속력은 0이 아니다! 원판 축의 위치가 시간에 따라 변하는 관계를 표 1과 그림 1에 나타내었다.

표 1.

x, cm	t, s	x/t
0	0	
5	5,24	0,95
10	8,44	1,18
15	11,57	1,30
20	14,25	1,40
25	16,90	1,48
30	19,34	1,55

Fig. 1



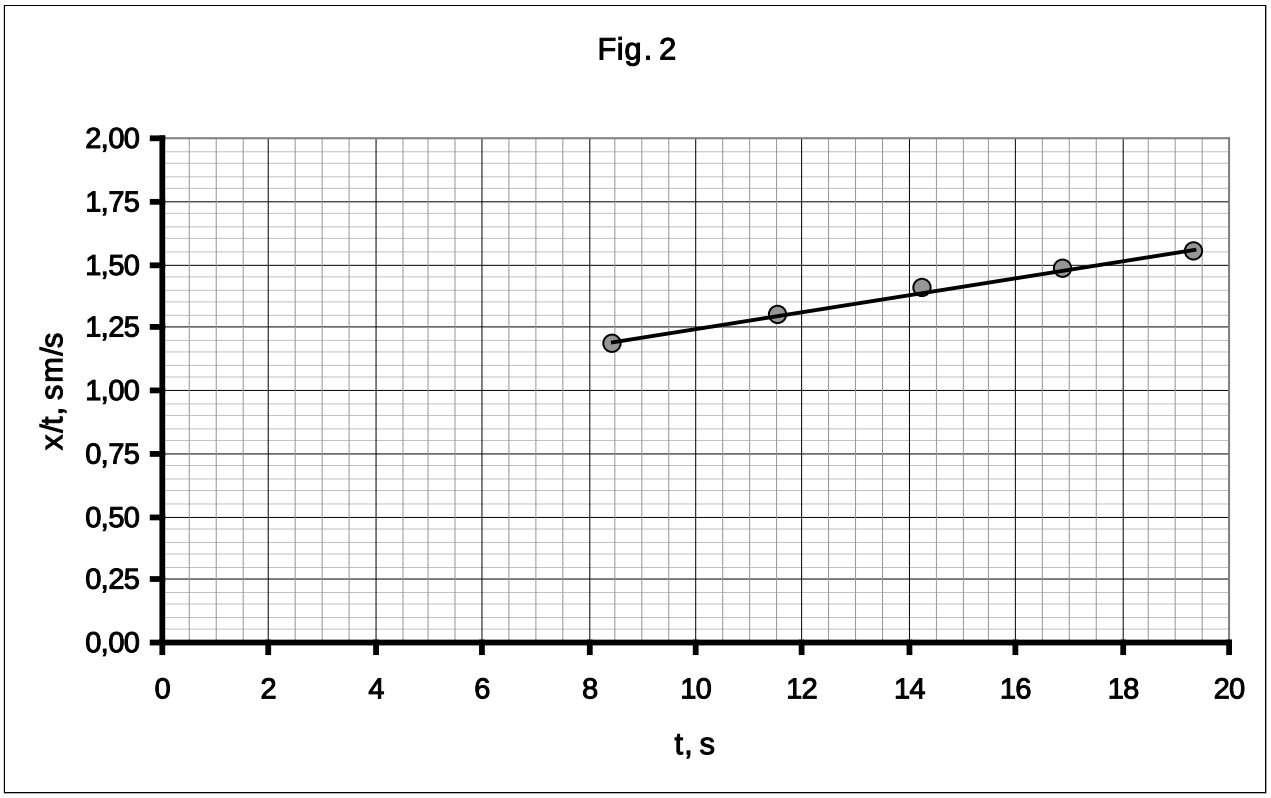
등가속도 운동의 법칙은 다음 꼴이다.

$$x(t)=v_0t+\frac{at^2}{2}. \qquad (4)$$

선형화에는 여러 방법을 쓸 수 있지만, 다음 방법이 바람직하다.

$$\frac{x}{t} = v_0 + \frac{a}{2}t\,. \tag{5}$$

그림 2는 값 $\frac{x}{t}$(사실상 평균 속력)를 시간 t에 대해 나타낸 그래프이다.



이 관계가 거의 선형이라는 것은 실험에서 얻은 운동 법칙을 함수 (4)로 나타낼 수 있음을 보여 준다.

원판 축의 가속도는 이 그래프 기울기의 두 배와 같으며, 최소제곱법으로 구하면 다음과 같다.

$$a = 0,081\frac{sm}{s^2}\,. \tag{6}$$

1.3 실의 다른 경사각에서도 같은 측정을 해야 한다. 그 결과를 표 2에 나타내었다.

표 2

h=5 sm			h=7 sm			h=9 sm			h=11 sm		
x. sm	*t, s*	*x/t*	*x. sm*	*t, s*	*x/t*	*x. sm*	*t, s*	*x/t*	*x. sm*	*t, s*	*x/t*
0			0			0			0		
5	4,66	1,07	5	3,53	1,42	5	3,30	1,52	5	3,38	1,48
10	7,51	1,33	10	5,81	1,72	10	5,24	1,91	10	5,32	1,88
15	9,95	1,51	15	7,94	1,89	15	7,14	2,10	15	6,92	2,17
20	12,28	1,63	20	9,70	2,06	20	8,73	2,29	20	8,36	2,39
25	14,23	1,76	25	11,26	2,22	25	10,10	2,48	25	9,45	2,65
30	16,10	1,86	30	12,84	2,34	30	11,46	2,62	30	10,89	2,75

그림 3은 시간 t에 대한 $\frac{x}{t}$의 관계를 나타낸 그래프로, 이로부터 가속도의 실험값을 계산한다.

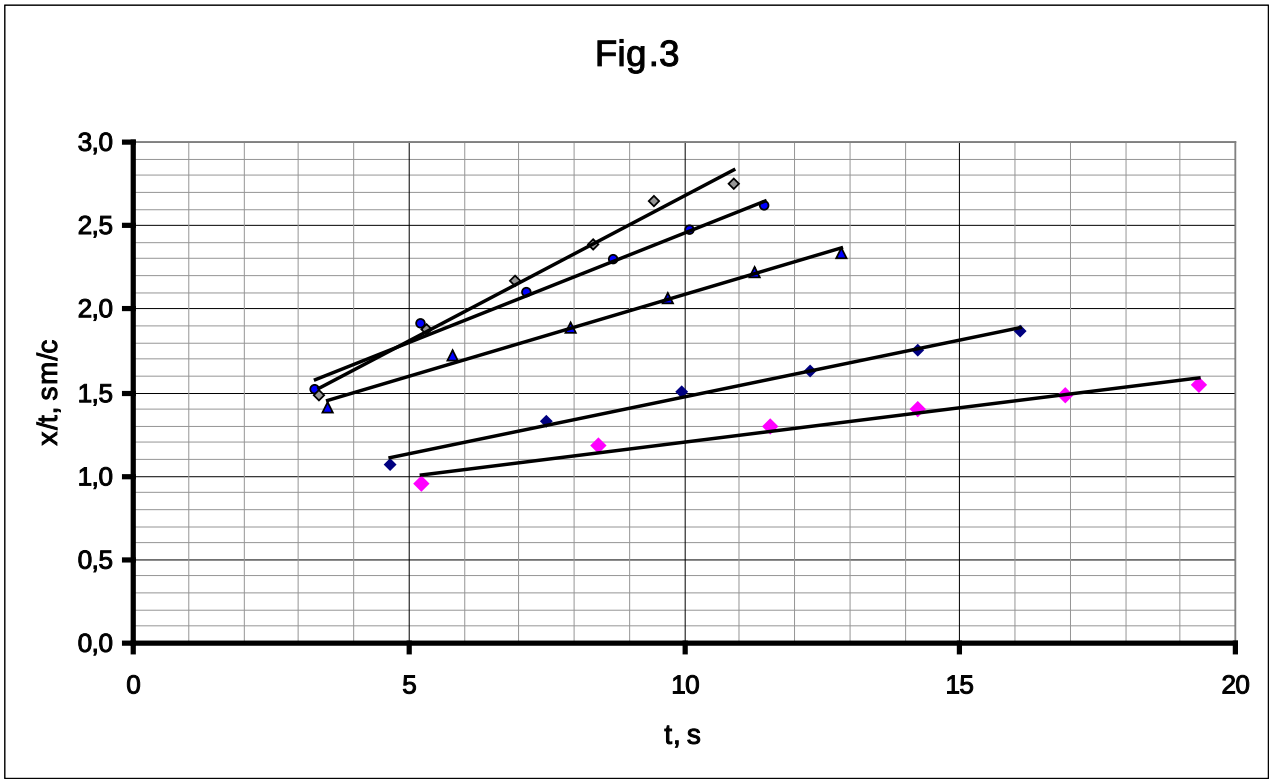
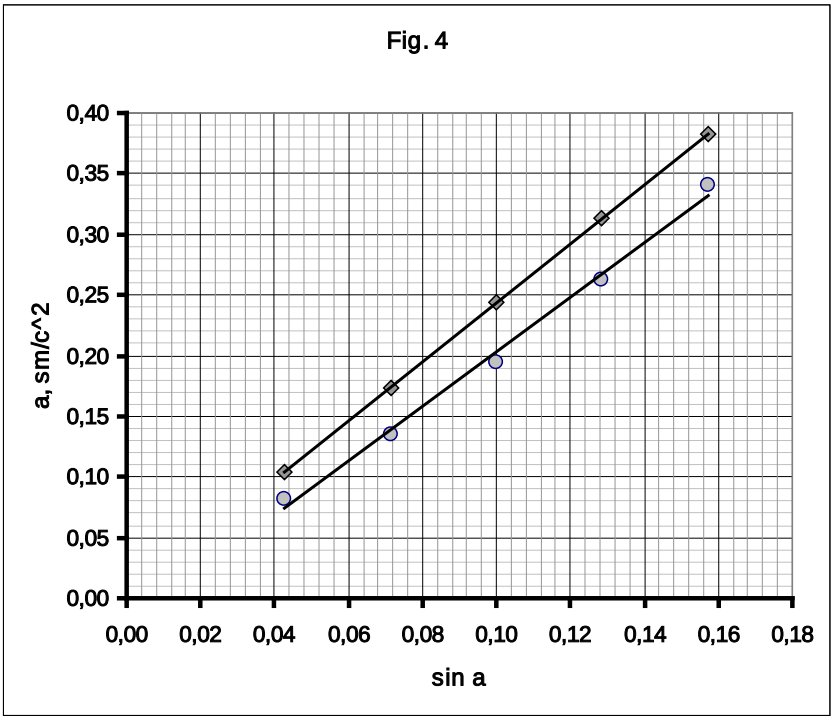


표 3에 그래프의 기울기 계수로 구한 가속도와 식 (2)로 계산한 이론값을 나타내었다. 계산에는 측정값인 원판의 지름 $D = 85$ mm와 막대의 지름 $d = 3{,}0$ mm를 썼다. 그림 4는 가속도가 실의 경사각에 따라 변하는 관계를 나타낸 그래프이다.

표 3

h , sm	a, 이론 sm/s^2	a, 실험 sm/s^2	$\sin\alpha$
3	0,104	0,081	0,043
5	0,174	0,135	0,071
7	0,244	0,195	0,100
9	0,313	0,262	0,129
11	0,383	0,340	0,157



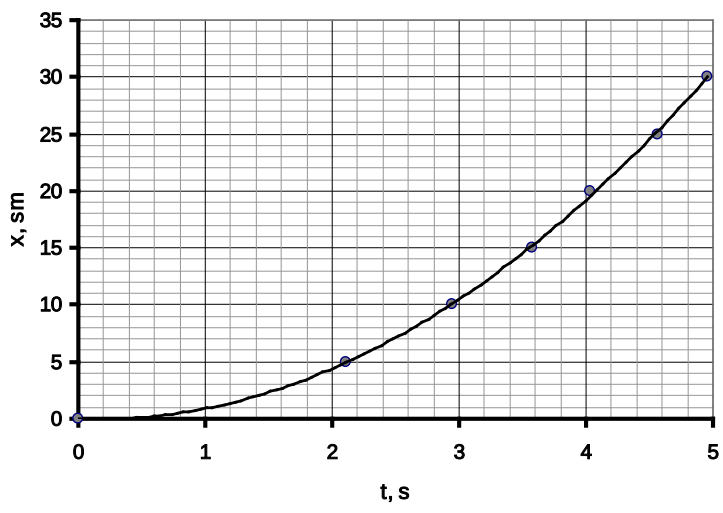
2부. 내려가기

2.1 이 경우 이동 시간이 짧으므로, 각 좌표마다 여러 번 되풀이하여 측정해야 한다. 표 4는 원판이 거리 x를 지나는 데 걸린 시간을 3번 측정하여 평균한 결과이다. 그림 5는 얻은 관계를 나타낸 그래프이다.

표 4.

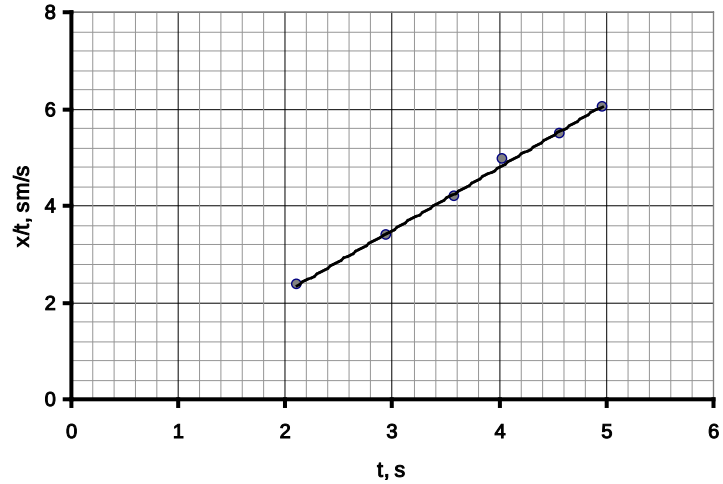
x, sm	t, s	x/t	t^2
0	0		0
5	2,11	2,37	4,45
10	2,95	3,39	8,70
15	3,58	4,19	12,82
20	4,03	4,96	16,24
25	4,56	5,48	20,79
30	4,96	6,05	24,60

Fig. 5



가속도를 계산하는 데에는 앞의 방법을 쓴다. 곧 t에 대한 x/t의 관계를 그리고(그림 6), 선형화한 관계의 매개변수를 구한다.

Fig. 6



최소제곱법으로 계산한 관계식 $x/t = Kt + b$의 계수는 다음과 같다.

$$K = (1{,}30 \pm 0{,}07)\frac{sm}{s^2}$$

$$b = (-0{,}40 \pm 0{,}3)\frac{sm}{s}$$

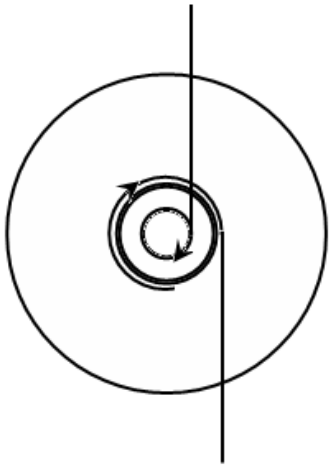
그러면 원판 축의 가속도는 다음과 같다.

$$a = (2{,}60 \pm 0{,}13)\frac{sm}{s^2}. \qquad (7)$$

2.3 가속도에 대한 식은 식 (2)에 $\sin\alpha = 1$을 넣으면 바로 얻어진다.

$$a = \frac{g}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2}. \qquad (8)$$

이 식으로 계산하면 $a = 2{,}44\ \mathrm{cm/s^2}$이다.



3부. 올라가기

3.1 추를 매단 실이 풀릴 때 맥스웰 원판에 연결된 실은 감기도록 실을 감아야 한다. 또 추를 매단 실은 막대에서 반지름이 더 큰 부분에 감아야 한다는 것도 분명하다.

3.2 이 경우 원판 축이 움직이기 시작하는 순간을 쉽게 기록할 수 있으므로, 일정한 높이까지 올라가는 시간을 재어 다음 식으로 가속도를 계산하면 된다.

$$H = \frac{at^2}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2H}{t^2}. \tag{9}$$

측정에서 얻은 자료를 표 5에 나타내었다($H = 12$ cm).

표 5

n	t_1, s	t_2, s	t_3, s	$\langle t \rangle$, s	$a\ \frac{sm}{s^2}$
1	2,07	2,13	2,23	2,14	5,22
2	1,6	1,56	1,63	1,60	9,41

채점 기준

	내용	**부분별 합계 점수**	**점수**
1부. 굴러 내려가기		**8**	
1.1	식 (2) $a = \frac{g}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2}\sin\alpha$	**0,3**	0.3
1.2	실험 장치를 올바르게 꾸몄고, 크기 정도가 알맞은 자료를 얻었다	**0,5**	0,5
	$\sin\alpha$의 값을 밝혔다: 측정 방법; 수치가 0,04 – 0,2 범위에 있다;	**0,2**	 0,1 0,1
	관계의 측정 $\sin\alpha$가 위 범위에 있을 때만 점수를 준다. 자료가 공식 풀이와 25% 이내로 차이 난다: - 좌표 측정 범위가 20 cm를 넘는다(*10 cm를 넘는다, 10 cm보다 작다*); - 자료 점의 수가 5개 이상이다(*4개, 4개 미만*); - 포물선에 가까운 비선형 관계를 얻었다;	**1,2**	 0,5(*0,3;0*) 0,5(*0,3;0*) 0,2
	$x(t)$의 그래프 (*해당 자료에 점수를 받았을 때만 점수를 준다*): - 축의 이름과 눈금을 적었다; - 모든 자료 점이 그래프에 있다; - 매끄러운 곡선을 그렸다;	**0,3**	 0,1 0,1 0.1
	등가속도 모형의 분석: - 운동 법칙 $x(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2}$; - *처음 속도가 없는 경우;*	**0,2**	 0.2 *(0)*
	분석 방법: - 선형화 $\frac{x}{t} = v_0 + \frac{a}{2}t$; - *속도 $v(t)$의 계산;* - *$x(t^2)$의 선형화;* - *2–3개 점으로 가속도 계산;*	**1,0**	 1 *(0,5)* *(0.2)* *(0.1)*
	선형화한 관계의 그래프	**0.3**	

	(*해당 자료에 점수를 받았을 때만 점수를 준다*): - 축의 이름과 눈금을 적었다; - 모든 자료 점이 그래프에 있다; - 매끄러운 곡선을 그렸다;		 0,1 0,1 0.1
	가속도 계산(단위가 없으면 점수를 주지 않는다); - 선형화한 관계로(최소제곱법, 그래프); - 2–3개 점으로; - 1개 점으로;	**0,4**	 0,4 *(0,2)* *(0,1)*
1.3	가속도와 각의 관계 자료가 공식 풀이와 25% 이내로 차이 날 때만 점수를 준다: 각의 사인이 0,04 – 0,2 범위에 있다: - 측정한 각의 수가 4개 이상이다(*3개, 3개 미만*); - 각 관계의 자료 점 수가 5개 이상이다(3–4개, 3개 미만);	**1,4**	 0,2 0,8*(0,5;0)* 0,4(0,2;0)
	가속도 계산(점마다, 단 4개까지): - 선형화; - *1–3개 점으로*; $\sin\alpha$의 계산;	**1,0**	 0,2×4 (0,1×4) 0.2
	가속도와 각의 관계 그래프(*해당 자료 점에 점수를 받았을 때만 점수를 준다*): - 축의 이름과 눈금을 적었다; - 모든 자료 점이 그래프에 있다; - 매끄러운 곡선을 그렸다;	**0,3**	 0.1 0,1 0.1
1.4	원판과 막대의 반지름을 측정했다; 계산에 올바른 식을 썼다; 선형 관계를 그렸다; 실험 자료가 이론 곡선보다 체계적으로 아래에 있다;	**0,9**	0,2 0,1 0,1 0,5
2부. 내려가기		**4**	
	실험 장치를 올바르게 꾸몄고, 크기 정도가 알맞은 자료를 얻었다	**0,5**	0,5
2.1	실험 자료 자료가 공식 풀이와 25% 이내로 차이 날 때만 점수를 준다: - 좌표 측정 범위가 20 cm를 넘는다(10 cm를 넘는다, 10 cm보다 작다); - 자료 점의 수가 5개 이상이다(3–4개, 3개 미만); - 3번 이상 되풀이하여 평균했다; - 포물선에 가까운 관계를 얻었다;	**1,5**	 0,5(*0,3;0*) 0,5(*0,3;0*) 0,3 0,2
	$x(t)$의 그래프 (해당 자료에 점수를 받았을 때만 점수를 준다): - 축의 이름과 눈금을 적었다; - 모든 자료 점이 그래프에 있다; - 매끄러운 곡선을 그렸다;	**0,3**	 0,1 0,1 0.1
2.2	가속도 계산(해당 자료에 점수를 받았을 때만 점수를 준다): - 선형화를 썼다($x(t^2)$을 써도 된다); - 선형화한 관계로 가속도를 계산했다(1–2개 점으로); - 실험 오차를 계산했다;	**1,3**	 0,5 0,5 0,3
2.3	가속도에 대한 올바른 식을 유도했다; 수치를 올바르게 계산했다;	**0.4**	0,2 0.2
3부. 올라가기		**3**	

3.1	실을 감는 방법을 나타낸 올바른 그림(실이 막대의 한쪽에 있다);		1
3.2	올라가는 시간을 측정했다(0,7 – 3,0 s 범위 안);		0,5×2
	가속도를 계산했다(공식 풀이와 50% 이내 차이);		0,5×2
	합계	**15**	