2021년 1월 9일

컴퓨터 실험:

수학 진자, 또는 어느 정도의 각을 충분히 작다고 볼 수 있을까 ...

물리학은 본질적으로 실험 과학이며, 이것은 분명히 물리학의 강점이다. 그러나 수많은 실험 사실을 이해하지 않는다면 물리학은 엄청나게 많은 현상과 과정을 기술하는 것으로 전락하고 말 것이다. 먼 옛날 물리 법칙과 그에 해당하는 모형은 이렇게, 곧 다루는 대상의 중요하지 않은 특징을 무시함으로써 생겨났다. 최근 수십 년 동안 컴퓨터 모형화, 흔히 하는 말로 컴퓨터 실험이라는 분야가 빠르게 발전하였다. 요점은 만들어 낸 물리 모형을 컴퓨터에서 계산 과정의 꼴로 직접 구현하여, 관심 있는 규칙성을 순수한 형태로 철저히 조사할 수 있다는 것이다. 이번 시험에서는 잘 알려진 계인 수학 진자에 대하여 이러한 컴퓨터 실험을 해야 한다.

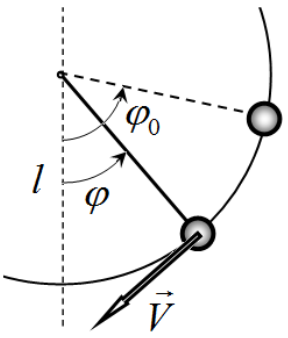
중력 가속도 g로 특징지어지는 지구의 균일한 중력장 속에 있는 길이 l인 수학 진자의 진동 주기에 대한 식은 잘 알려져 있다. 그러나 이 식은 흔들림 각이 충분히 작을 때에만 쓸 수 있다. 이 계산 실험을 하면서 답해야 할 주요 질문은 다음과 같다. ***"어느 정도의 흔들림 각을 작다고 볼 수 있을까?"***

실험 실습에 관한 교육 문헌에서는 최대 흔들림 각이 $1°$, $2°$, $5°$ 등을 넘지 말아야 한다는 지침을 볼 수 있다. 위의 질문에는 이 컴퓨터 실험을 바탕으로 답해야 한다! 곧 수학 진자의 진동 주기가 진폭, 곧 연직선에서 벗어난 최대 각에 따라 어떻게 변하는지 조사해야 한다.

컴퓨터 실험을 수행하고 그 결과를 처리하는 순서는 실제 실험의 순서와 크게 다르지 않다. 따라서 이 문제의 각 부분은 실제 물리 실험의 주요 단계에 그대로 대응한다.

1. 이론 모형 세우기.

늘어나지 않는 길이 l인 실에 매달린 작고 무거운 공으로 이루어진 수학 진자를 생각하자. 진자는 자유 낙하 가속도가 g인 중력장 속에 있다. 아래에서는 공기 저항을 완전히 무시한다.



1.1 수학 진자의 작은 진동의 주기 T에 대한 식을 써라.

처음 순간 $t_0 = 0$에 실이 연직선과 이루는 각은 φ_0이고, 공의 처음 속도는 0이라고 하자.

공은 원호를 따라 움직이므로, 공의 위치는 실이 연직선과 이루는 각 φ로 정해지고, 이 각이 시간에 따라 변하는 빠르기는 각속도 $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$로 정해진다.

1.2 주어진 각진폭 φ_0과 알려진 l, g 값에 대하여, 진자의 각속도가 흔들림 각에 따라 변하는 관계 $\omega(\varphi)$를 나타내는 정확한 식을 구하여라.

진자의 운동은 연직선에 대하여 대칭이므로, 진동 주기를 계산하려면 최대 흔들림에서 흔들림이 0이 될 때까지 움직이는 시간 t_1만 구하면 된다.

1.3 각속도가 흔들림 각에 따라 변하는 알려진 관계 $\omega(\varphi)$로부터 시간 t_1을 계산하는 정확한 식을 써라.

1.4 진동 주기 T를 시간 t_1으로 나타내어라.

컴퓨터 실험에서 계산을 할 때에는 실제 차원이 있는 양을 쓰는 일이 드물다. 그런 양은 크기 정도가 매우 다를 수 있어 몹시 불편하기 때문이다. 보통 모든 양을 무차원으로 만들거나, 주어진 문제에 특징적인 어떤 값으로 나누어 줄인다. 예를 들어 이 연구에서는 진동 주기가 특징적인 시간이므로, 다음 식으로 정의되는 무차원 시간 τ를 도입하는 것이 편리하다.

$$\tau = t\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

1.5 무차원 단위로 나타낸 각속도 $\tilde{\omega} = \frac{d\varphi}{d\tau}$를 앞에서 정의한 각속도 ω와 잇는 식을 써라.

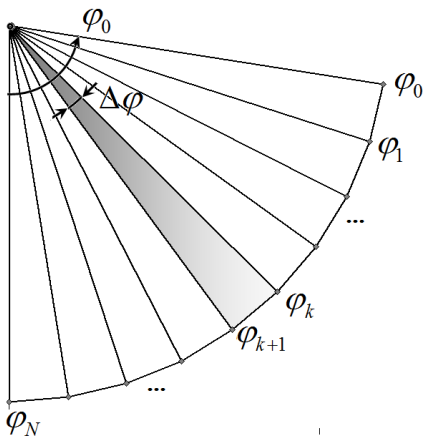
1.6 무차원 시간 단위로 나타낸 수학 진자의 작은 진동의 주기 $\tilde{T}$를 구하여라.

1.7 각속도 $\tilde{\omega}$가 흔들림 각 φ에 따라 변하는 관계 $\tilde{\omega}(\varphi)$를 구하여라.

주의! 아래에서는 앞에서 도입한 무차원 양, 곧 시간 τ, 주기 $\tilde{T}$, 각속도 $\tilde{\omega}$를 어디에서나 쓰며, 이를 각각 t, T, ω로 나타낸다.

2. 실험 장치 설계와 실험 계획.

컴퓨터 실험에서 이 단계는 계산 알고리즘을 개발하는 것에 해당한다. 이 경우 수치(컴퓨터) 계산의 주요 착상은 운동 경로를 작은 구간으로 나누고, 각 구간에서 운동을 근사적으로 기술하는 것이다.



$\varphi = \varphi_0$에서 $\varphi = 0$까지의 운동 구간을 폭이 $\Delta\varphi$인 같은 구간 N개로 나눈다. 나누는 점을 φ_k, $k = 0, 1, \ldots, N$으로, 이 점들에서의 각속도를 ω_k로 나타내자. 이후 계산에 쓰는 주요 근사는 φ_k에서 φ_{k+1}까지의 각 구간에서 진자의 운동을 등가속도 운동으로 보는 것이다. 나누는 구간의 수 N이 커질수록 계산의 정확도가 높아지리라고 기대하는 것이 자연스럽다.

이 근사의 틀 안에서는 진자가 φ_0에서 0까지 움직이는 시간을 쉽게 구할 수 있다. 주어진 진폭 φ_0과 나누는 구간의 수 N에 대하여, 계산 알고리즘은 다음 질문에 차례로 답하면서 드러난다.

2.1 나누는 구간 $\Delta\varphi$를 구하여라.

2.2 나누는 점의 좌표 φ_k를 구하여라.

2.3 임의의 처음 흔들림 각 φ_0에 대하여 점 φ_k에서의 각속도 ω_k를 나타내어라. 이 식을 $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$인 특별한 경우에 대하여 써라.

2.4 φ_{k-1}에서 φ_k까지 k번째 구간을 지나는 시간 Δt_k를 구하여라.

2.5 공이 각 φ_k에 이르는 데 걸리는 시간 t_k에 대한 식을 구하여라. 간단히 하기 위해, 바로 앞의 각 φ_{k-1}까지 가는 데 걸린 시간 t_{k-1}로 나타내어라.

2.6 주어진 구간 나누기에 대한 진동 주기 T_N의 식을 써라.

3. 시험 실험, 오차 추정.

이 단계에서는 장치가 작동하는지, 곧 이 경우에는 위에서 개발한 알고리즘에 따라 계산을 할 수 있는지 확인하고, 결과가 요구되는 정확도에 이르는지 평가해야 한다.

앞에서 말했듯이 계산 오차는 나누는 구간의 수 N에 따라 달라진다. 이 문제에서는 컴퓨터가 아니라 계산기를 써서 "손으로" 계산해야 한다. N이 커지면 계산 오차는 줄어들지만 계산하는 데 걸리는 시간은 늘어난다. 따라서 N의 최적값, 곧 요구되는 정확도를 얻는 최솟값을 고르는 것이 중요하다. 이 단계에서는 모든 계산을 $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$에서 하여라.

주의! 이제부터 계산은 소수 넷째 자리까지의 정확도로 해야 한다. 시간을 아끼려면 계산의 전체 순서를 잘 생각하여라. 앞에서 계산한 값을 이용하고, 식에 나오는 필요한 상수를 미리 정해 두고(여러 번 다시 계산하지 않도록), 중간 계산의 결과를 가장 편리한 꼴로 적어 두어라.

3.1 $N = 1, 2, 4, 8, 16, 32$에 대하여 각 φ_k인 점들까지의 이동 시간 t_k를 계산하여라. 주어진 N에 대하여 계산한 진동 주기의 근삿값 T_N을 구하여라. 결과는 표 1에 정리해야 한다.

3.2 $N = 16$일 때의 계산 결과를 바탕으로 진자의 4분의 1 주기 동안의 운동 법칙 $\varphi(t)$를 그래프 1에 그려라.

3.3 같은 그래프 1에 진동이 작다고 가정한 운동 법칙 $\varphi(t)$를 그려라. 운동 법칙의 계산 결과는 표 2에 나타내야 한다.

N개의 구간으로 나누었을 때 진동 주기 계산의 상대 오차의 추정값으로 다음 양을 쓴다.

$$\varepsilon_N = \frac{T_N - T_{32}}{T_{32}},$$

여기서 T_{32}는 참값에 가장 가까운, $N = 32$일 때 계산한 주기이다.

계산의 상대 오차 ε_N이 나누는 구간의 수 N에 따라 변하는 관계는 다음 근사식으로 나타낼 수 있다.

$$\varepsilon_N = \frac{C}{N^\gamma},$$

여기서 C와 γ는 어떤 상수이다.

3.4 주기를 구할 때의 상대 오차 ε_N을 계산하여라. 결과는 표 3에 나타내야 한다.

3.5 위의 상대 오차 식을 쓸 수 있음을 그래프 2로 보이고, 매개변수 C와 γ의 값을 구하여라.

3.6 주기 계산의 상대 오차가 0.2%를 넘지 않는 최솟값 $N_{\min}$을 구하여라.

이후 계산에서는 나누는 구간의 수로 앞에서 구한 값 $N_{\min}$만 써라.

4. 실험: 주기와 진폭의 관계.

컴퓨터 실험의 이 단계에서는 수학 진자의 진동 주기가 진폭에 따라 변하는 관계 $T(\varphi_0)$을 구한다. 이 관계는 다음 식으로 나타낸다.

$$T(\varphi_0) = T_0\left(a + \frac{\varphi_0^2}{b}\right),$$

여기서 T_0은 진자의 작은 진동의 주기이고, a, b는 상수이다.

4.1 다음 진폭들에 대하여 수학 진자의 진동 주기를 계산하여라. φ_0: $15°, 30°, 45°, 60°, 75°$, 그리고 이미 구한 $90°$.

4.2 진자의 진동 주기가 진폭에 따라 변하는 관계에 대한 위의 식을 쓸 수 있음을 그래프 3으로 보여라.

4.3 매개변수 a, b의 값을 구하여라.

실제 실험에서 진자의 진동 주기를 측정하는 오차가 약 5%라고 하자.

4.4 도(°)로 나타낸 각 φ_0이 얼마일 때 수학 진자의 진동을 작다고 볼 수 있는지 구하여라.