풀이

컴퓨터 실험:

수학 진자, 또는 어느 정도의 각을 충분히 작다고 볼 수 있을까 ...

1. 이론 모형 세우기.

1.1 수학 진자의 작은 진동의 주기에 대한 식은 다음 꼴이다.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{1}$$

1.2 진자 공에 대한 역학적 에너지 보존 법칙으로부터(퍼텐셜 에너지의 기준을 매단 점으로 잡는다)

$$\frac{ml^2\omega^2}{2} = mgl\left(\cos\varphi - \cos\varphi_0\right), \tag{2}$$

진자의 각속도에 대한 다음 식이 얻어진다.

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{l}\left(\cos\varphi - \cos\varphi_0\right)}. \tag{3}$$

1.3 φ_0에서 0까지의 운동 구간 전체를 무한히 작은 구간 $d\varphi$로 나누자. 진자가 이 구간을 지나는 데 걸리는 시간 dt는 다음과 같다.

$$dt = \frac{d\varphi}{\omega} = \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2g}{l}\left(\cos\varphi - \cos\varphi_0\right)}}. \tag{4}$$

그러면 운동 시간 t_1은 작은 구간들의 시간을 모두 더한 것으로 얻어지며, 결국 다음과 같은 간단한 적분이 된다.

$$t_1 = \int_0^{\varphi_0} dt = \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2g}{l}\left(\cos\varphi - \cos\varphi_0\right)}}. \tag{5}$$

1.4 진동 주기는 구한 시간 t_1의 4배이다. 곧

$$T = 4t_1. \tag{6}$$

1.5 무차원 단위로 나타낸 각속도는 다음과 같다.

$$\tilde{\omega} = \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{g}{l}}dt} = \sqrt{\frac{l}{g}}\,\omega. \tag{7}$$

1.6 무차원 단위로 나타낸 작은 진동의 주기는 다음과 같다.

$$\widetilde{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}\,T = 2\pi. \tag{8}$$

1.7 각속도 $\tilde{\omega}$가 흔들림 각 φ에 따라 변하는 관계는 다음 꼴이다.

$$\tilde{\omega}(\varphi) = \sqrt{2(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}. \tag{9}$$

2. 실험 장치 설계와 실험 계획.

2.1 나누는 구간은 다음과 같다.

$$\Delta\varphi = \frac{\varphi_0}{N}. \tag{10}$$

2.2 먼저 "0번째" 흔들림 각을 정해야 하며, 나머지 나누는 점의 좌표는 다음 식으로 주어진다.

$$\varphi_k = \varphi_{k-1} - \Delta\varphi. \tag{11}$$

2.3 점 φ_k에서의 각속도 ω_k는 다음 식으로 나타낸다.

$$\omega_k = \sqrt{2(\cos\varphi_k - \cos\varphi_0)}. \tag{12}$$

$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$인 특별한 경우에 이 식은 더 간단해진다.

$$\omega_k = \sqrt{2\cos\varphi_k}\,. \tag{12a}$$

2.4 권장한 등가속도 운동 근사에서, 선택한 구간에서의 평균 속력은 구간 양 끝에서의 각속도의 산술 평균과 같다. 곧

$$\langle\omega\rangle = \frac{1}{2}\left(\omega_{k-1} + \omega_k\right),$$

따라서 φ_{k-1}에서 φ_k까지 k번째 구간을 지나는 시간 Δt_k는 다음과 같다.

$$\Delta t_k = \frac{2\Delta\varphi}{\omega_{k-1} + \omega_k}\,. \tag{13}$$

2.5 각 φ_k에 이르는 시간 t_k는 다음 식으로 구한다.

$$t_k = t_{k-1} + \Delta t_k \tag{14}$$

처음 조건은 $t_0 = 0$이다.

2.6 N개의 구간으로 나눌 때 진동 주기 T_N은 결국 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$T_N = 4t_N\,. \tag{15}$$

3. 시험 실험, 오차 추정.

3.1 주어진 나누는 구간의 수에 대하여 각속도, 시간, 진동 주기를 계산한 결과를 표 1에 나타내었다.

표 1. 나누는 구간의 수에 따른 진동 주기의 계산.

***N*=**	**32**				***N*=**	**16**			
$\Delta\varphi$	0,0491				$\Delta\varphi$	0,0982			
k	φ	ω	Δt_k	t_k	***k***	φ	ω	Δt_k	t_k
0	1,5708	0,0000		0,0000	0	1,5708	0,0000		0,0000
1	1,5217	0,3133	0,3134	0,3134	1	1,4726	0,4428	0,4435	0,4435
2	1,4726	0,4428	0,1299	0,4432	2	1,3744	0,6246	0,1840	0,6274
3	1,4235	0,5417	0,0997	0,5430	3	1,2763	0,7620	0,1416	0,7690
4	1,3744	0,6246	0,0842	0,6271	4	1,1781	0,8749	0,1200	0,8890
5	1,3254	0,6971	0,0743	0,7014	5	1,0799	0,9710	0,1064	0,9954
6	1,2763	0,7620	0,0673	0,7687	6	0,9817	1,0541	0,0970	1,0923
7	1,2272	0,8208	0,0620	0,8307	7	0,8836	1,1264	0,0900	1,1824
8	1,1781	0,8749	0,0579	0,8886	8	0,7854	1,1892	0,0848	1,2672
9	1,1290	0,9247	0,0546	0,9432	9	0,6872	1,2434	0,0807	1,3479
10	1,0799	0,9710	0,0518	0,9950	10	0,5890	1,2896	0,0775	1,4254
11	1,0308	1,0140	0,0495	1,0444	11	0,4909	1,3281	0,0750	1,5004
12	0,9817	1,0541	0,0475	1,0919	12	0,3927	1,3593	0,0731	1,5735
13	0,9327	1,0915	0,0458	1,1377	13	0,2945	1,3834	0,0716	1,6451
14	0,8836	1,1264	0,0443	1,1819	14	0,1963	1,4006	0,0705	1,7156
15	0,8345	1,1589	0,0430	1,2249	15	0,0982	1,4108	0,0698	1,7854
16	0,7854	1,1892	0,0418	1,2667	16	0,0000	1,4142	0,0695	1,8549
17	0,7363	1,2173	0,0408	1,3075					
18	0,6872	1,2434	0,0399	1,3474					
19	0,6381	1,2674	0,0391	1,3865					
20	0,5890	1,2896	0,0384	1,4249					
21	0,5400	1,3098	0,0378	1,4626					
22	0,4909	1,3281	0,0372	1,4999					
23	0,4418	1,3446	0,0367	1,5366					

24	0,3927	1,3593	0,0363	1,5729					
25	0,3436	1,3723	0,0359	1,6088					
26	0,2945	1,3834	0,0356	1,6445					
27	0,2454	1,3929	0,0354	1,6798					
28	0,1963	1,4006	0,0351	1,7150					
29	0,1473	1,4065	0,0350	1,7500					
30	0,0982	1,4108	0,0348	1,7848					
31	0,0491	1,4134	0,0348	1,8196					
32	0,0000	1,4142	0,0347	1,8543					
			T_N=	**7,4171**				T_N=	**7,4197**

N=	**8**				N=	**4**			
$\Delta\varphi$	0,1963				$\Delta\varphi$	0,3927			
k	φ	ω	Δt_k	t_k	k	φ	ω	Δt_k	t_k
0	1,5708	0,0000		0,0000	0	1,5708	0,0000		0,0000
1	1,3744	0,6246	0,6287	0,6287	1	1,1781	0,8749	0,8977	0,8977
2	1,1781	0,8749	0,2619	0,8906	2	0,7854	1,1892	0,3805	1,2783
3	0,9817	1,0541	0,2036	1,0941	3	0,3927	1,3593	0,3082	1,5864
4	0,7854	1,1892	0,1751	1,2692	4	0,0000	1,4142	0,2832	1,8696
5	0,5890	1,2896	0,1584	1,4276					
6	0,3927	1,3593	0,1483	1,5759					
7	0,1963	1,4006	0,1423	1,7182					
8	0,0000	1,4142	0,1395	1,8577					
			T_N=	**7,4307**				T_N=	**7,4785**

N=	**2**				N=	**1**			
$\Delta\varphi$	0,7854				$\Delta\varphi$	1,5708			
k	φ	ω	Δt_k	t_k	k	φ	ω	Δt_k	t_k
0	1,5708	0,0000		0,0000	0	1,5708	0,0000		0,0000
1	0,7854	1,1892	1,3209	1,3209	1	0,0000	1,4142	2,2214	2,2214
2	0,0000	1,4142	0,6034	1,9242					
			T_N=	**7,6969**				T_N=	**8,8858**

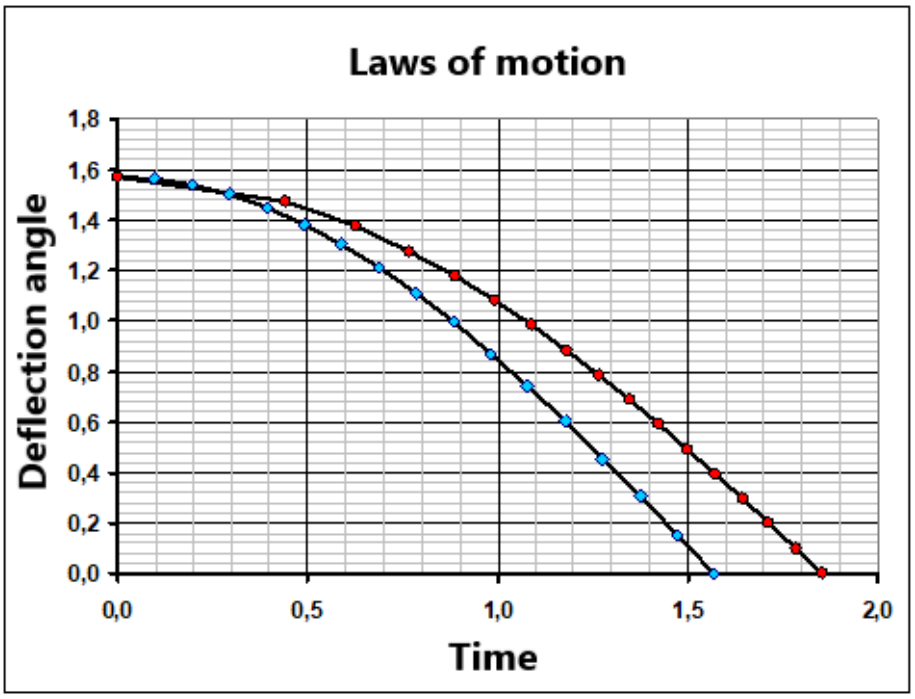
3.2 – 3.3 작은 진동 근사에서 운동 법칙의 그래프 점을 계산하려면 다음 식을 써야 한다.

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{2}\cos t\,. \qquad (16)$$

이 법칙에 대한 계산 결과를 표 2와 그래프에 나타내었다. 그래프에는 계산한 운동 법칙 (16)을 나타내는 선도 있다. 흥미롭게도 첫째 경우에는 시간 값을 정하고 그에 해당하는 흔들림 각을 계산하였고, 둘째 경우에는 거꾸로 흔들림 각을 정하고 그에 해당하는 시간을 계산하였다.

표 2.

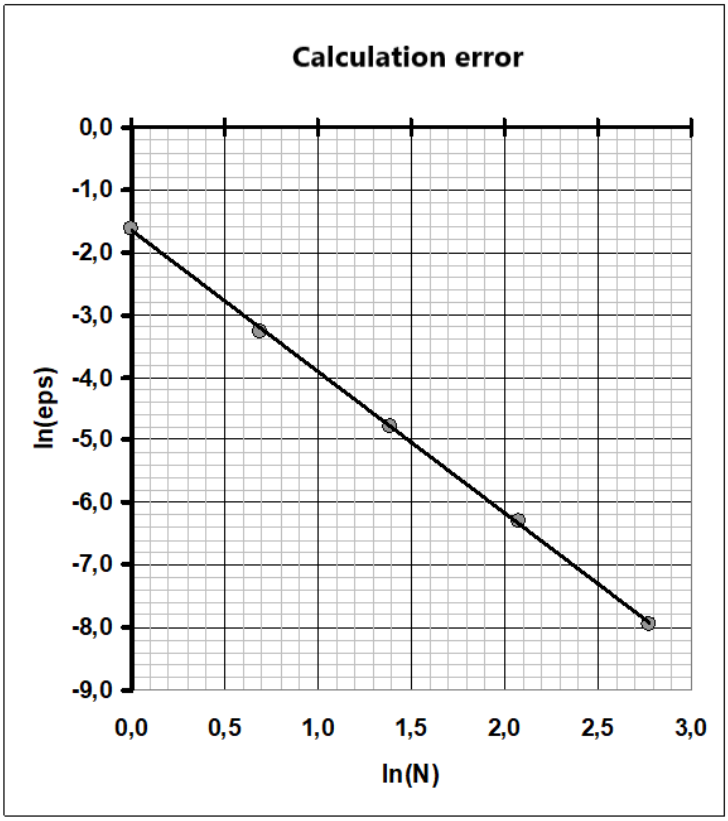
k	t	φ
0	0,0000	1,5708
1	0,0982	1,5632
2	0,1963	1,5406
3	0,2945	1,5032
4	0,3927	1,4512
5	0,4909	1,3853
6	0,5890	1,3061
7	0,6872	1,2142
8	0,7854	1,1107
9	0,8836	0,9965
10	0,9817	0,8727
11	1,0799	0,7405
12	1,1781	0,6011
13	1,2763	0,4560
14	1,3744	0,3064
15	1,4726	0,1540
16	1,5708	0,0000



3.4 - 3.5 나누는 구간의 수 N에 따른 진동 주기의 오차 ε_N을 계산한 결과를 표 3에 나타내었다.

표 3. 계산 오차.

N	T	ε_N	$\ln N$	$\ln \varepsilon_N$
1	8,8858	1,98E-01	0,0000	-1,6195
2	7,6969	3,77E-02	0,6931	-3,2774
4	7,4785	8,27E-03	1,3863	-4,7952
8	7,4307	1,83E-03	2,0794	-6,3026
16	7,4197	3,50E-04	2,7726	-7,9584
32	7,4171	0,00E+00		



관계 $\varepsilon_N = C/N^\gamma$의 매개변수를 구하려면, 이 관계를 이중 로그 눈금에서 다음과 같이 나타내야 한다.

$$\ln \varepsilon_N = \ln C - \gamma \ln N . \qquad (17)$$

오른쪽 그림은 표 3의 자료로 그린 이 관계의 그래프이다. 얻은 관계가 선형이라는 것은 계산 오차가 나누는 구간의 수 N에 따라 변하는 관계에 대한 식을 쓸 수 있음을 분명히 보여 준다.

최소제곱법으로 계산한 이 선형 관계의 매개변수는 기울기 계수 $a \approx -2{,}3$, 절편 $b \approx -1{,}65$이다. 따라서 구하려는 관계의 매개변수는 다음과 같다.

$$\gamma \approx -a = 2{,}3$$
$$C = \exp(b) \approx 0{,}19 \qquad (18)$$

3.6 식 (17)로부터 오차 $\varepsilon = 0{,}002$를 얻는 데 필요한 나누는 구간의 수는 다음과 같이 쉽게 구할 수 있다.

$$N_{\min} = \left(\frac{C}{\varepsilon}\right)^{1/\gamma} \approx 8. \tag{19}$$

따라서 이후의 모든 계산은 $N = N_{\min} = 8$에서 해야 한다.

4. 실험: 주기와 진폭의 관계.

4.1 여러 진동 진폭에 대하여 진동 주기를 계산한 결과를 표 4에 나타내었다.

표 4. 진동 주기의 계산.

φ_0	0,2618		15°		φ_0	0,5236		30°	
N=	8				N=	8			
$\Delta\varphi$	0,0327				$\Delta\varphi$	0,0654			
k	φ	ω	Δt_k	t_k	k	φ	ω	Δt_k	t_k
0	0,2618	0,0000		0,0000	0	0,5236	0,0000		0,0000
1	0,2291	0,1261	0,5190	0,5190	1	0,4581	0,2484	0,5270	0,5270
2	0,1963	0,1724	0,2193	0,7383	2	0,3927	0,3402	0,2224	0,7494
3	0,1636	0,2036	0,1741	0,9124	3	0,3272	0,4023	0,1763	0,9257
4	0,1309	0,2259	0,1524	1,0648	4	0,2618	0,4470	0,1541	1,0799
5	0,0982	0,2419	0,1399	1,2047	5	0,1963	0,4791	0,1413	1,2212
6	0,0654	0,2527	0,1323	1,3370	6	0,1309	0,5008	0,1336	1,3548
7	0,0327	0,2590	0,1279	1,4649	7	0,0654	0,5135	0,1291	1,4839
8	0,0000	0,2611	0,1259	1,5908	8	0,0000	0,5176	0,1269	1,6108
			T=	6,3630				T=	6,4432
			T/To=	1,0127				T/To=	1,0255

φ_0	0,7854		45°		φ_0	1,0472		60°	
N=	8				N=	8			
$\Delta\varphi$	0,0982				$\Delta\varphi$	0,1309			
k	φ	ω	Δt_k	t_k	k	φ	ω	Δt_k	t_k
0	0,7854	0,0000		0,0000	0	1,0472	0,0000		0,0000
1	0,6872	0,3631	0,5408	0,5408	1	0,9163	0,4664	0,5613	0,5613
2	0,5890	0,4987	0,2278	0,7687	2	0,7854	0,6436	0,2359	0,7972
3	0,4909	0,5913	0,1801	0,9488	3	0,6545	0,7660	0,1857	0,9829
4	0,3927	0,6584	0,1571	1,1059	4	0,5236	0,8556	0,1614	1,1444
5	0,2945	0,7069	0,1438	1,2497	5	0,3927	0,9207	0,1474	1,2917
6	0,1963	0,7398	0,1357	1,3855	6	0,2618	0,9653	0,1388	1,4306
7	0,0982	0,7590	0,1310	1,5165	7	0,1309	0,9914	0,1338	1,5643
8	0,0000	0,7654	0,1288	1,6453	8	0,0000	1,0000	0,1315	1,6958
			T=	6,5810				T=	6,7832
			T/To=	1,0474				T/To=	1,0796

φ_0	1,3090		75°		φ_0	1,5708		90°	
N=	8				N=	8			
$\Delta\varphi$	0,1636				$\Delta\varphi$	0,1963			
k	φ	ω	Δt_k	t_k	k	φ	ω	Δt_k	t_k
0	1,3090	0,0000		0,0000	0	1,5708	0,0000		0,0000
1	1,1454	0,5548	0,5899	0,5899	1	1,3744	0,6246	0,6287	0,6287
2	0,9817	0,7704	0,2469	0,8368	2	1,1781	0,8749	0,2619	0,8906
3	0,8181	0,9217	0,1934	1,0302	3	0,9817	1,0541	0,2036	1,0941
4	0,6545	1,0340	0,1673	1,1976	4	0,7854	1,1892	0,1751	1,2692

5	0,4909	1,1163	0,1522	1,3497	5	0,5890	1,2896	0,1584	1,4276
6	0,3272	1,1731	0,1429	1,4927	6	0,3927	1,3593	0,1483	1,5759
7	0,1636	1,2065	0,1375	1,6302	7	0,1963	1,4006	0,1423	1,7182
8	0,0000	1,2175	0,1350	1,7652	8	0,0000	1,4142	0,1395	1,8577
			T=	7,0608				T=	7,4307
			T/To=	1,1238				T/To=	1,1826

아래는 여러 진폭에 대한 진동 주기 계산을 정리한 표이다.

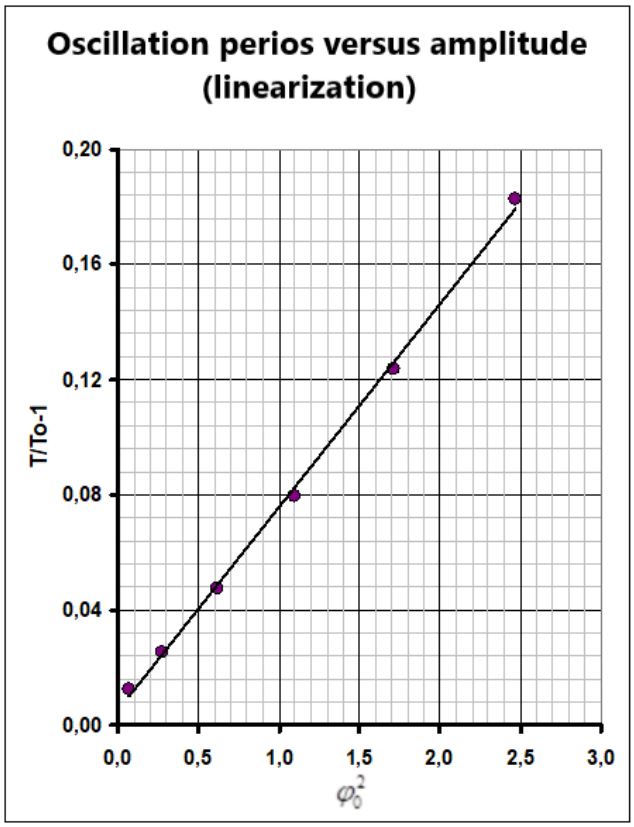
표 5.

$\varphi_0,^\circ$	φ_0	T	$\frac{T}{T_0}$	φ_0^2	$\frac{T}{T_0}-1$
15	0,2618	6,3630	1,0127	0,0685	0,0127
30	0,5236	6,4432	1,0255	0,2742	0,0255
45	0,7854	6,5810	1,0474	0,6169	0,0474
60	1,0472	7,0608	1,0796	1,0966	0,0796
75	1,3090	7,0608	1,1238	1,7135	0,1238
90	1,5708	7,4307	1,1826	2,4674	0,1826

4.2 – 4.3 작은 진동에서는 진동 주기에 대한 식

$$T(\varphi_0) = T_0\left(a + \frac{\varphi_0^2}{b}\right) \qquad (20)$$

이 식 (1)과 같아야 하므로 매개변수 $a = 1$이다. 식 (20)이 계산 결과를 잘 나타내는지 확인하려면, 값 $\left(\frac{T}{T_0} - 1\right)$이 진폭의 제곱 φ_0^2에 따라 변하는 관계를 그래프로 그려야 하며, 이것을 오른쪽 그림에 나타내었다.



얻은 관계의 기울기 계수는 0,0706이므로, 식 (20)에 나오는 매개변수 b는 대략 다음과 같다.

$$b \approx 14. \qquad (21)$$

4.4 실제 실험의 허용 오차가 5%일 때, 다음 부등식이 성립하면 주기가 작은 진동의 주기에서 벗어나는 것을 알아차릴 수 없다.

$$\frac{\varphi_0^2}{b} < 0.05, \qquad (22)$$

이로부터 $\varphi_0 < 45^\circ$이면 각이 충분히 작다고 볼 수 있다.

	내용	부분별 합계	점수
1. 이론 모형 세우기.		**1.5**	
1.1	식 (1): $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$	**0.1**	0.1

1.2	운동 법칙 - 역학적 에너지 보존 (2); - 식 (3): $\omega = \sqrt{\frac{2g}{l}\left(\cos\varphi - \cos\varphi_0\right)}$	**0.4**	0.1 0.3
1.3	운동 법칙의 적분 - 식 (4): $dt = \frac{d\varphi}{\omega}$ - 식 (5): $t_1 = \int_0^{\phi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2g}{l}\left(\cos\varphi - \cos\varphi_0\right)}}$	**0.3**	0.1 0.2
1.4	주기 (6): $T = 4t_1$	**0.1**	0.1
1.5	식 (7): $\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{l}{g}}\omega$	**0.2**	0.2
1.6	식 (8): $\tilde{T} = 2\pi$	**0.2**	0.2
1.7	식 (9): $\tilde{\omega}(\varphi) = \sqrt{2(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}$	**0.2**	0.2
	2. 실험 장치 설계와 실험 계획.	**1.5**	
2.1	식 (10): $\Delta\varphi = \frac{\varphi_0}{N}$	**0.1**	0.1
2.2	식 (11): $\varphi_k = \varphi_{k-1} - \Delta\varphi$	**0.1**	0.1
2.3	식 (12): $\omega_k = \sqrt{\cos\varphi_k - \cos\varphi_0}$	**0.1**	0.1
2.4	등가속도 운동 주요 착상 $\langle\omega\rangle = \frac{1}{2}(\omega_{k-1} + \omega_k)$ 식 (13): $\Delta t_k = \frac{2\Delta\varphi}{\omega_{k-1} + \omega_k}$	**1.0**	0.5 0.5
2.5	식 (14): $t_k = t_{k-1} + \Delta t_k$	**0.1**	0.1
2.6	식 (15): $T_N = 4t_N$	**0.1**	0.1
	3. 시험 실험, 오차 추정.	**9.0**	
3.1	*얻은 주기와 이 공식 풀이의 주기의 차이가 작을 때만 채점한다.* 다음에 대하여 주기를 올바르게 계산하였다: $N = 32$ $N = 16$ $N = 8$ $N = 4$ $N = 2$ $N = 1$	**4.2**	 1.2 1.0 0.8 0.6 0.4 0.2
3.2	그래프: 모든 점을 표에 따라 그렸다; 매끄러운 선을 그렸다;	**0.5**	 0.3 0.2
3.3	그래프 운동 법칙을 얻었다, 표 2 모든 점을 표에 따라 그렸다 매끄러운 선을 그렸다;	**1.0**	 0.5 0.3 0.2
3.4	오차를 올바르게 계산하였다, 표 3	**0.5**	0.5
3.5	그래프 이중 로그 눈금을 썼다 선형화한 관계를 그렸다	**2.3**	 0.5 0.5

	선형 관계를 얻었다 구한 지수: $\gamma \approx 2{,}3 \pm 0{,}1$ 구한 계수: $C \approx 0{,}19 \pm 0{,}1$		0.3 0.5 0.5
3.6	결론: $N = 8 \pm 1$	**0.5**	0.5
	4. 실험: 주기와 진폭의 관계.	**8.0**	
4.1	*얻은 주기와 이 공식 풀이의 주기의 차이가 0,02보다 작을 때만 채점한다* 얻은 주기마다 3부에서 주기 하나를 더한다	**4.2**	 0.8 0.2
4.2	선형화한 관계의 그래프 올바르게 선형화함: $T\left(\varphi_0^2\right)$ 그래프를 그렸다 선형화한 관계를 얻었다	**1.5**	 0.5 0.5 0.5
4.3	선형화한 관계의 매개변수 매개변수 $a = 1$(정확한 값만 인정한다) 매개변수 b가 13–16 범위에 있다	**1.3**	 0.3 1.0
4.4	작은 각의 추정: $\varphi < 45°$	**1.0**	1.0
	합계	**20.0**	