실험 시험 문제 풀이

1. 이론 부분

1.1 세기가 같은 두 파동이 간섭할 때, 합성된 빛의 세기는 다음 식으로 정해진다.

$$I = 2I_0\left(1+\cos\Delta\varphi\right) = 4I_0\cos^2\frac{\Delta\varphi}{2}. \tag{1}$$

1.2 거울이 처음 위치에서 x만큼 이동하면 경로차는 $2x$만큼 변한다. 이때 두 파동 사이에 생기는 위상차는 다음과 같다.

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi}{\lambda}x, \tag{2}$$

따라서 세기는 좌표에 따라 다음과 같이 달라진다.

$$I = 2I_0\cos^2\frac{2\pi}{\lambda}x. \tag{3}$$

1.3 경로차가 파장의 정수배와 같을 때, 곧 다음 조건에서 세기가 극대가 되고

$$2x_m = m\lambda \quad\Rightarrow\quad x_m = m\frac{\lambda}{2}, \tag{4}$$

다음 조건에서 세기가 극소가 된다.

$$2x_m = \left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda \quad\Rightarrow\quad x_m = \left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}. \tag{5}$$

1.4 거울이 파장의 1/4만큼 이동할 때마다 세기는 극대에서 극소로(또는 그 반대로) 바뀐다. 따라서 구하는 거울의 좌표는 다음 식으로 나타난다.

$$x_m = m\frac{\lambda}{4}. \tag{6}$$

2. 파장을 아는 단색광을 이용한 장치의 보정

2.1 주어진 그림으로부터 거울의 양 끝 위치는 다음 시각 값에 해당한다.

$$t_{\min} = 67; \quad t_{\max} = 901. \tag{7}$$

이 이동은 거울 진동 주기의 절반 동안 일어나므로

$$T = 2\left(t_{\max} - t_{\min}\right) = 1668. \tag{8}$$

한편, 진동 주기는 주어진 거울의 진동수 $\nu = 20$ Hz로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T = \frac{1}{\nu} = 5.0\cdot10^{-2}\ \text{s} = 50\ \text{ms}. \tag{9}$$

식 (8)과 (9)를 같게 놓으면 시간 눈금 한 칸의 값은 다음과 같다.

$$\Delta t = \frac{50}{2(901-67)} = 0.030\ \text{ms}. \tag{10}$$

2.2 주어진 세기–시간 그래프는 “가운데” 극대에 대하여 대칭이며, 이 극대의 번호는 다음과 같다.

$$m_0 = \frac{0+54}{2} = 27 \tag{11}$$

이 극대는 다음 시각에 해당한다.

$$t_0 = 486. \tag{12}$$

이후 계산을 위해 (어림수로) 가운데 극대에 대하여 거의 대칭인 극값 13개를 고른다. 표 1을 보라.

표 1.

m	t_m	$m-m_0$	$t-t_0$	$\sin\left(\frac{2\pi}{T}(t-t_0)\right)$	x_m, μm
1	118	-26	-368	-0,983	-4,16
5	224	-22	-262	-0,834	-3,52
10	302	-17	-184	-0,639	-2,72
15	361	-12	-125	-0,454	-1,92
20	414	-7	-72	-0,268	-1,12
25	465	-2	-21	-0,079	-0,32
27	486	0	0	0,000	0,00
30	515	3	29	0,109	0,48
35	567	8	81	0,300	1,28
40	623	13	137	0,493	2,08
45	684	18	198	0,679	2,88
50	766	23	280	0,870	3,68
53	855	26	369	0,984	4,16

다음과 같이 계산한다.
가운데를 기준으로 한 극값의 번호 $m' = m - m_0$;
가운데로부터의 시간 이동 $t' = t - t_0$;

세기가 극값일 때 거울의 좌표 $x_m = m'\frac{\lambda_0}{4}$.

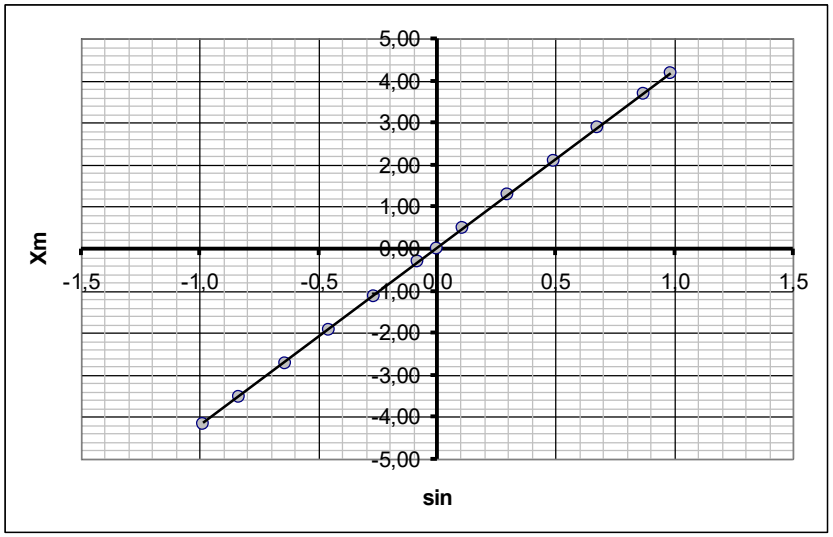
다음 운동 법칙을 적용할 수 있는지 확인하기 위해

$$x(t) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}(t-t_0)\right) \tag{13}$$

좌표 x_m을 $S = \sin\left(\frac{2\pi}{T}(t-t_0)\right)$에 대하여 그린다. 그래프를 그릴 점을 고를 때에는 다음에 유의해야 한다.

- 좌표 변화의 범위가 가장 큰 점들을 고른다;
- 맨 끝의 극값들은 조건 (6)을 만족하지 않을 수 있으므로 포함하지 않는다.

아래에 이 관계의 그래프를 나타내었다.



이 그래프가 선형이라는 것은 거울의 운동 법칙을 식 (13)으로 기술할 수 있음을 확인해 준다. 최소 제곱법으로 계산한 이 의존성의 매개변수의 수치는 다음과 같다.

$$A = (4.23 \pm 0.01)\ \mu\text{m}$$
$$b = (0.04 \pm 0.06)\ \mu\text{m}$$

(14)

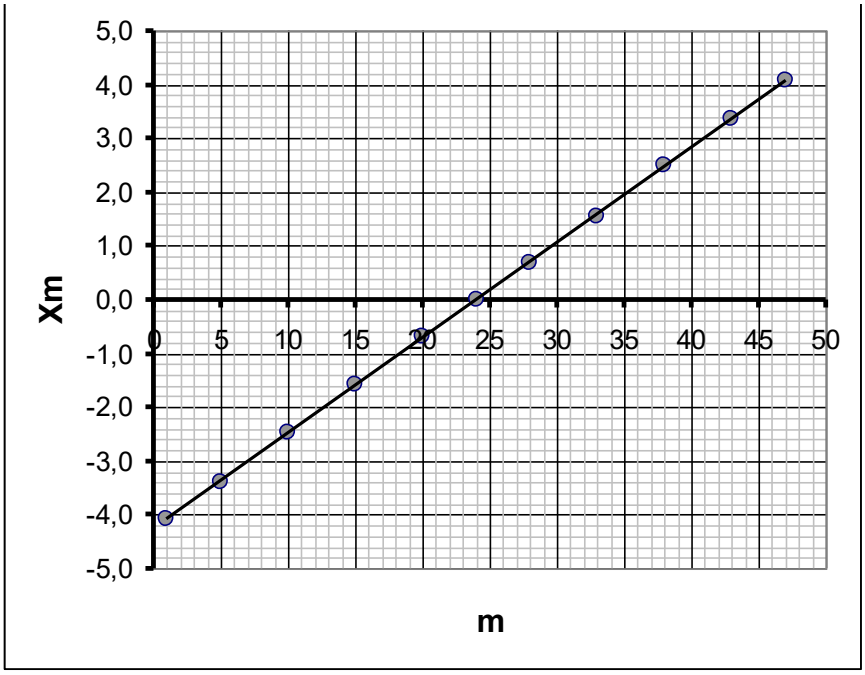
기울기 A는 거울 진동의 진폭이다. 이동 매개변수 b의 수치는 그 오차보다 작으므로 $b = 0$으로 볼 수 있고, 분석한 의존성은 정비례 관계이다.

3. 파장을 모르는 단색광

3.1 극값 표에서 (앞에서 세운 기준에 따라) 대칭인 점들을 고른다.

표 2.

m	t_m	x_m
1	138	-4,088
5	240	-3,382
10	320	-2,476
15	384	-1,586
20	442	-0,698
24	486	0,000
28	529	0,682
33	586	1,556
38	653	2,489
43	730	3,363
47	830	4,071



3.2 각 극값에 대하여 식 (13)을 이용해 거울의 좌표 x_m을 계산하고, 거울의 좌표가 극값의 번호 m에 따라 어떻게 달라지는지 그래프를 그린다. 이 의존성은 다음 식으로 나타난다.

$$x_m = m\frac{\lambda}{4}. \qquad (15)$$

얻은 그래프는 이 의존성을 확인해 준다(이 경우 번호 축 m을 따른 이동은 중요하지 않으며, 극값의 번호를 다르게 매겼기 때문에 생긴다). 최소 제곱법으로 계산한 그래프의 기울기는 다음과 같다.

$$a = (0{,}1771 \pm 0{,}0008)\ \mu\text{m}.$$

식 (15)의 꼴로부터 빛의 파장은 다음과 같다.

$$\lambda = 4a = (0{,}709 \pm 0{,}003)\ \mu\text{m}. \qquad (16)$$

4. 두 단색광

4.1 파장이 다른 파동은 간섭하지 않으며, 이 경우 기록되는 신호는 두 파동의 세기의 합이다. 식 (3)을 이용하여 전체 세기가 거울의 좌표에 따라 어떻게 달라지는지 식으로 쓰고, (코사인의 합에 대한 삼각 공식을 써서) 변형한다.

$$U(x) = 2I_1\cos\frac{4\pi}{\lambda_1}x + 2I_2\cos\frac{4\pi}{\lambda_2}x =$$
$$= 2I_0\left(\cos\frac{4\pi}{\lambda_1}x + \cos\frac{4\pi}{\lambda_2}x\right) + 2(I_2 - I_1)\cos\frac{4\pi}{\lambda_2}x = \qquad (17)$$
$$= 4I_1\cos\left(2\pi\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)x\right)\cos\left(2\pi\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right)x\right) + 2(I_2 - I_1)\cos\frac{4\pi}{\lambda_2}x$$

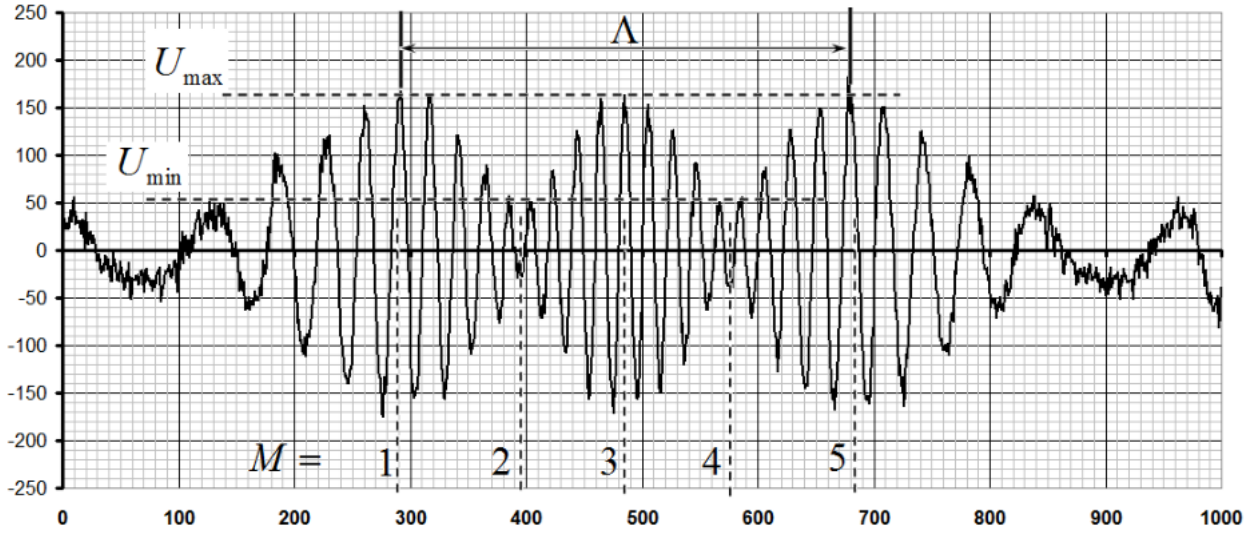
얻은 함수는 실험에서 얻은 변조된 신호를 나타낸다. 이 식은 너무 복잡해서 이 함수의 극값을 식으로 명시적으로 구할 수 없다. 따라서 필요한 특성을 얻는 유일한 방법은 빠르게 변하는 신호의 포락선을 분석하는 것이다. 상수항을 제외하면 이 포락선은 다음 함수로 나타난다.

$$\bar{U}(x) = U_1 \cos\left(2\pi\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)x\right) = U_1 \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda}x\right), \tag{18}$$

여기서 다음과 같이 놓았다.

$$\left|\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right| = \frac{1}{\Lambda}. \tag{19}$$

여기서 Λ는 신호 변조의 공간 주기이다(아래 그림 참조).



포락선 함수 (18)은 다음 조건에서 극값을 가진다.

$$\frac{2\pi}{\Lambda}x_M = \frac{\pi}{2}M, \tag{20}$$

여기서 $M = 0, \pm1, \pm2\ldots$는 포락선 극값의 번호이다.

위의 신호에서는 이러한 극값 5개를 구별할 수 있으며, 그림에도 나타내었다. 식 (20)으로부터 이에 해당하는 거울의 좌표는 다음 식으로 정해진다.

$$x_M = \frac{\Delta}{4}(M - M_0). \tag{21}$$

여기서 M_0은 "처음" 번호로, 이후 분석에는 중요하지 않으며 번호를 세기 시작하는 점을 정한다.

극값 표를 이용하여 극값이 관측되는 시각 t_M을 구하고, 식 (14)를 이용하여 거울의 좌표 x_M의 값을 계산한 뒤, 의존성 $x_M(M)$의 그래프를 그린다. 이 값들을 표 3과 그래프에 나타내었다.

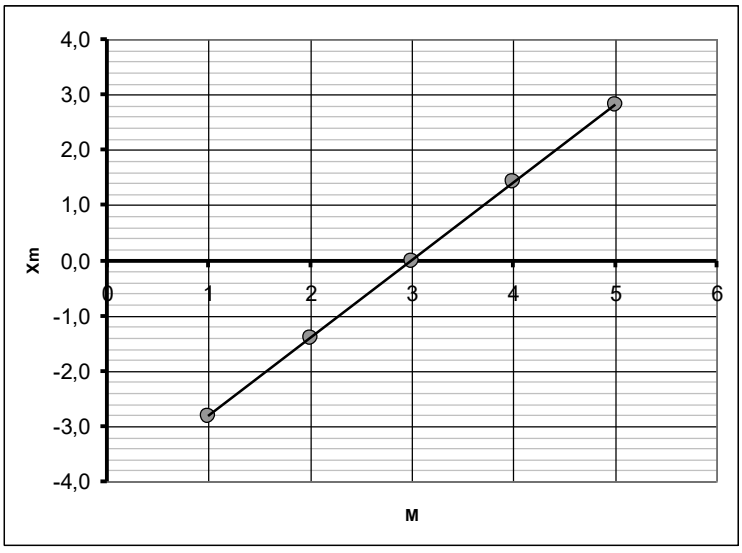


표 3.

M	t_M	x_M ,μm
1	292	-2,823
2	397	-1,392
3	486	0,000
4	577	1,422
5	679	2,811

최소 제곱법으로 계산한 이 그래프의 기울기는 다음과 같다.

$$a = (1,41 \pm 0,01)\ \mu\text{m},$$

또한 식 (21)에 따라 공간 주기는 다음과 같다.

$$\Lambda = (5,64 \pm 0,04)\ \mu\text{m}. \qquad (22)$$

끝으로 식 (19)로부터 파장 λ_2의 가능한 두 값을 계산한다.

$$\lambda_{21} = \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\Lambda}\right)^{-1} = 0,722\ \mu\text{m}$$
$$\Delta\lambda_{21} = \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\Lambda}\right)^{-2} \frac{\Delta\Lambda}{\Lambda^2} = \left(\frac{\lambda_1}{\Lambda}\right)^2 \Delta\Lambda = 0,001\ \mu\text{m} \qquad (23)$$

$$\lambda_{22} = \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\Lambda}\right)^{-1} = 0,575\ \mu\text{m}$$
$$\Delta\lambda_{22} = \left(\frac{\lambda_2}{\Lambda}\right)^2 \Delta\Lambda = 0,001\ \mu\text{m} \qquad (24)$$

4.2 두 파동의 세기의 비를 추정하려면 변조 함수의 최댓값과 최솟값을 이용할 수 있다. 식 (17)로부터 다음이 성립한다.

$$U_{\max} \approx 2(I_0 + I_1)$$
$$U_{\max} \approx 2|I_0 - I_1| \qquad (25)$$

$U_{\max}, U_{\min}$의 값은 그래프(또는 표)에서 대략 $U_{\max} \approx 170$, $U_{\min} \approx 40$으로 얻을 수 있다. 그 비는 $\gamma = \dfrac{U_{\max}}{U_{\min}} \approx 4{,}25$이다. 한편 식 (25)로부터 다음을 얻는다.

$$\gamma = \frac{I_1 + I_2}{|I_1 - I_2|} \quad \Rightarrow \quad \frac{I_1}{I_0} = \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \approx 0,62. \qquad (26)$$

곧 $I_{21}/I_1 \approx 0{,}62$이다.

두 번째 경우도 가능하다: $\dfrac{I_{22}}{I_1} \approx 1{,}62$.

№	내용	부분 합계	배점
1. 이론 부분 *(계수가 틀리면 식은 채점하지 않는다)*		**1,0**	
1.1	식 (1) $I = 2I_0(1+\cos\Delta\varphi) = 4I_0\cos^2\dfrac{\Delta\varphi}{2}$		0,2
1.2	위상 변화에 대한 식 (2) $\Delta\varphi = \dfrac{4\pi}{\lambda}x$		0,2
	세기에 대한 식 (3) $I = 4I_0\cos^2\dfrac{2\pi}{\lambda}x$		0,2
1.3	식 (4) $x_m = m\dfrac{\lambda}{2}$		0,1
	식 (5) $x_m = \left(m+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\lambda}{2}$		0,1
1.4	식 (6) $x_m = m\dfrac{\lambda}{4}$		0,2
2. 파장을 아는 단색광을 이용한		**8,0**	

장치의 보정			
2.1	눈금 값의 결정: - 극대 0과 54 – 거울의 양 끝 위치 – 0,4; - *운동 시간 – 진동 주기의 절반 – 0,2;* - *상대 단위로 주기 계산* $T = 1668$ - *0,1;* - *초 단위로 주기 계산* $T = 50$ ms - *0,1;* - *눈금 값 계산* $\Delta t = 0{,}030$ ms - *0,2*		1,0
2.2	운동 법칙의 결정		
	구한 진동 주기를 이용함;		0,5
	가운데 점의 결정: - 극대의 번호 $m_0 = \frac{0+54}{2} = 27$ - *0,3;* - *가운데 점을 지나는 시각* $t_0 = 486$ - *0,2;*		0,5
	점의 선택: - 점을 10개 이상 사용 0,3 (5개 이상 -0,1); - *맨 끝 점은 포함하지 않음 - 0,2;* - *최대 범위를 사용함 - 0,3;* - *점들이 대략 대칭임 - 0,2;*		1,0
	좌표 결정 방법: - 이웃한 극값 사이의 거리 – $\frac{\lambda}{4}$ – *0,5;* - *가운데에서부터 극대의 번호를 다시 매김 – 0,2;* - *좌표 계산 식* $x_m = m' \frac{\lambda_0}{4}$ - *0,3;*		1,0
	좌표 계산 (선택한 모든 점에 대해 올바르게 계산함; 허용 계산 오차는 10%)		1,0
	의존성의 선형화: - x 대 $\sin\left(\frac{2\pi}{T}(t-t_0)\right)$ - *0,4;* - *사인값을 계산함 0,6;*		1,0
	그래프 그리기: *(계산이 채점된 경우에 채점);* *- 축에 이름과 눈금을 붙임 – 0,1;* *- 모든 점을 표에 따라 찍음 – 0,2;* *- 선형 의존성을 얻음 -0.2;* *- 매끄러운 직선을 그림 – 0,2;*		0,7
	거울 진동의 진폭 계산: *최소 제곱법 사용 – 0,3 (그래프로, 또는 모든 점에 대해 평균 – 0,2; 두 점 사용 0,1);* *(극값의 개수에 따라 계산한 경우 – 0,1);* *수치가 4,2 – 4,3 μm 범위 – 0,5 (4,0 – 4,5 μm 범위 – 0,3; 범위 밖 - 0);*		0,8
	진폭의 오차 계산: - 최소 제곱법 사용 -0,3 (다른 방법 -0,2); - *수치의 크기 정도가* 10^{-2} μm - *0,3;*		0,5
3. 파장을 모르는 단색광		**5,0**	
3.1	점의 선택: - 점을 10개 이상 사용 0,3 (5개 이상 -0,1); - *맨 끝 점은 제외함 - 0,2;*		1,0

	- 최대 범위를 사용함 - 0,3; *- 점들이 대략 대칭임 - 0,2;*		
	극값 좌표 계산: *- 좌표에 대한 올바른 식 사용 – 0,5;* *- 극값의 좌표를 10% 이하의 오차로 계산함 - 1,0 ;*		1,5
	그래프 그리기: *(계산이 채점된 경우에 채점);* *- 축에 이름과 눈금을 붙임 – 0,1;* *- 모든 점을 표에 따라 찍음 0,2;* *- 선형 의존성을 얻음 -0.2;* *- 매끄러운 직선을 그림 – 0,2;*		0,7
3.2	파장 계산: *- 최소 제곱법 사용 – 0,5 (모든 점에 대해 평균 – 0,3; 점 1–2개 사용 – 0,2);* *- 수치가 0,70 – 0,72 μm 범위 – 0,8 (0,68 -0,74 μm 범위 - 0,4, 범위 밖 – 0);*		1,3
	파장의 오차 계산: *- 최소 제곱법 사용 – 0,2 (그 밖의 타당한 방법 – 0,1);* *- 수치의 크기 정도가* 10^{-3} *μm - 0,3;*		0,5
4. 두 단색광		**6,0**	
4.1	합성 세기에 대한 식 (17)		0,5
	포락선 분석(*극값의 위치에 따른 계산은 채점하지 않는다*);		0,5
	포락선의 극값 점 선택: - 극값마다 0,2;		1,0
	파장 계산 식 $\left\|\frac{1}{\lambda_0}-\frac{1}{\lambda_1}\right\|=\frac{1}{\Lambda}$		0,3
	파장에 대한 두 해: *최소 제곱법 사용(모든 점에 대해 평균) – 0,4 (두 점 사용 – 0,2);* *다음 범위의 수치* *0,70 – 0,74 μm; 0,56 -0,59 μm – 2x0,6;* *다음 범위의 수치* *(0, 67-0,77 μm; 0,53 – 0,62 μm – 2x0,3;)* *범위 밖 – 0;*		1,6
	오차 추정: *간접 측정의 오차 공식* $\Delta\lambda_1=\left(\frac{\lambda_1}{\Lambda}\right)^2\Delta\Lambda$ *- 0,3;* *수치 – 2x0,1;*		0,5
4.2	세기의 비를 계산하는 식: $\frac{I_2}{I_1}=\frac{1-\gamma}{1+\gamma}$		0,3
	세기의 비에 대한 두 해(두 값을 언급함);		0,3
	세기의 비 계산, 수치: *범위 0,5 – 0,7; 1,5-1,7 – 2x0,5;* *(범위 0,4 – 0,8; 1,4 – 1,8 - 2x0,2)* *범위 밖 - 0*		1,0
	합계	**20,0**	