실험 시험 문제 풀이

진동의 중첩

실험에서 설명한 진자의 세로 진동과 비틀림 진동은 작은 각 근사에서 진자의 고유 진동(모드)이므로, 서로 독립적으로 다룰 수 있다.

작은 각 근사에서 이 진동들의 주기는 다음 식으로 주어진다.

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}, \tag{1}$$

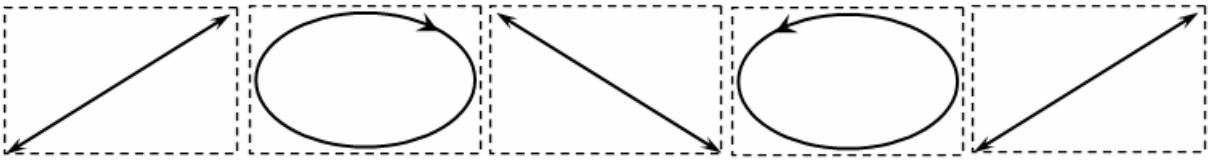
$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{4LI}{mga^2}}, \tag{2}$$

여기서 $m = m_0 + 2m_1$은 진자의 전체 질량, m_0은 막대의 질량, m_1은 너트의 질량이고, $I = \frac{m_0 l^2}{12} + 2m_1 z^2$은 너트를 끼운 막대의 관성 모멘트이다.

식 (1)과 (2)는 실제로 이 실험에서 사용되지만, 그 유도는 요구하지 않으며 채점하지도 않는다.

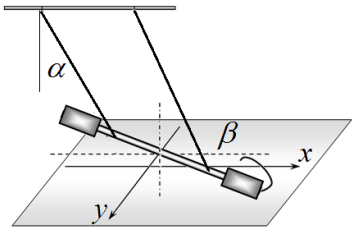
1부. 효과의 관찰과 이론적 기술

1.1 막대 끝은 진동수가 가까운 두 수직 진동의 합성에 해당하는 궤적을 따라 움직인다. 이는 진동수는 같지만 그 사이의 위상차가 천천히 변하는 진동들의 합성으로 생각할 수도 있다. 이러한 가장 전형적인 궤적들의 모습을 아래 그림에 나타내었다.



1.2 기하학적으로 막대 끝의 수평 좌표는 다음 식으로 나타난다.

$$\begin{cases} x = L\sin\alpha + \frac{l}{2}\cos\beta \\ y = \frac{l}{2}\sin\beta \end{cases}. \tag{3}$$



작은 각 $\alpha, \beta \ll 1$의 근사에서는 다음과 같다.

$$\begin{cases} x \approx L\alpha + \frac{l}{2} \\ y \approx \frac{l}{2}\beta \end{cases}. \tag{4}$$

각 α, β는 각각 진동수 $\omega_0 = 2\pi/T_0$과 $\omega_1 = 2\pi/T_1$로 조화 법칙에 따라 변하므로, 막대 끝의 궤적 방정식은 다음 꼴이다.

$$\begin{cases} x(t) = L\alpha_{max}\cos\omega_0 t + \frac{l}{2} \\ y(t) = \frac{l}{2}\beta_{max}\sin\omega_1 t \end{cases}, \tag{5}$$

진동수가 가까울 때는 이 식을 다음과 같이 고쳐 쓰는 것이 편리하다.

$$\begin{cases} x(t) = L\alpha_{max}\cos\omega_0 t + \frac{l}{2} \\ y(t) = \frac{l}{2}\beta_{max}\sin(\omega_0 t + (\omega_1 - \omega_0)t) \end{cases}. \tag{6}$$

진동수가 가까울 때 $y(t)$의 식에서 $\Delta\varphi = (\omega_1 - \omega_0)t$는 진동수가 가까운 두 진동 사이의 천천히 변하는 위상차로 볼 수 있다.

1.3 위상차가 $\pm 2\pi$만큼 변하면 궤적의 모양이 처음 모양으로 되돌아오는 것은 분명하다. 따라서 사이클 주기는 다음 조건을 만족한다.

$$(\omega_1 - \omega_0)T_C = \pm 2\pi, \tag{7}$$

이로부터 다음을 얻는다.

$$T_C = \frac{T_0 T_1}{|T_0 - T_1|}. \tag{8}$$

1.4 한 사이클 동안의 세로 진동 횟수는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$N_C = \frac{T_C}{T_0} = \frac{T_1}{|T_0 - T_1|}. \tag{9}$$

2부. 세로 진동

2.1 측정 정확도를 높이려면 충분히 많은 진동의 시간을 측정해야 한다. 이 실험에서는 진동 20주기의 시간 t_{20}을 측정한다. 우연 오차를 추정하기 위해 이 측정을 10번 하였으며, 그 결과를 표 1에 나타내었다.

표 1. 세로 진동의 주기 측정.

n	t_{20}, s
1	26,39
2	26,32
3	26,51
4	26,40
5	26,46
6	26,41
7	26,34
8	26,22
9	26,55
10	26,53

진동 20번의 평균 시간은 다음과 같다.

$\langle t_{20} \rangle = 26.41$ s,

기기 오차는 스톱워치 한 눈금 값의 절반과 같다.

$\Delta t_1 = 0.5 \cdot 10^{-3}$ s.

우연 오차는 다음 식으로 계산한다.

$$\Delta t_2 = 2\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10}(t_{20,i}-\langle t_{20}\rangle)^2}{n(n-1)}} = 6.5 \cdot 10^{-2} \text{ s.}$$

시간 측정의 전체 오차는 다음과 같다.

$\Delta t = \sqrt{\Delta t_1^2 + \Delta t_2^2} = 0.066$ s.

따라서 세로 진동의 주기는 다음과 같다.

$$T_0 = \frac{t_{20}}{20} = (1.321 \pm 0.003) \text{ s.} \quad (10)$$

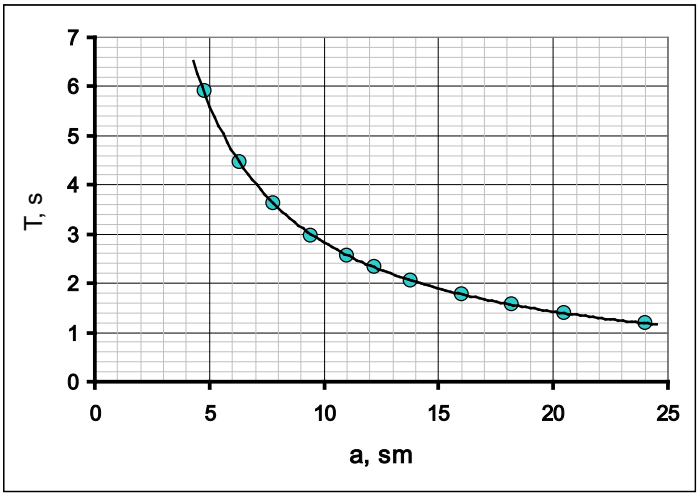
3부. 비틀림 진동

3.1 표 2는 두 실 사이의 거리 a의 여러 값에서 비틀림 진동의 주기를 측정한 결과이다. 같은 표에 지수 q를 구하는 계산 결과도 나타내었다.

표 2. 두 실 사이의 거리에 따른 비틀림 진동 주기의 의존성.

a, cm	t_{10},s	T_1, s	$\ln a$	$\ln T_1$
4,8	59,11	5,911	1,5686	1,7768
6,3	44,62	4,462	1,8405	1,4956
7,8	36,31	3,631	2,0541	1,2895
9,4	29,66	2,966	2,2407	1,0872
11,0	25,60	2,560	2,3979	0,9400
12,2	23,32	2,332	2,5014	0,8467
13,8	20,46	2,046	2,6247	0,7159
16,0	17,66	1,766	2,7726	0,5687
18,2	15,82	1,582	2,9014	0,4587
20,5	13,87	1,387	3,0204	0,3271
24,0	11,98	1,198	3,1781	0,1807

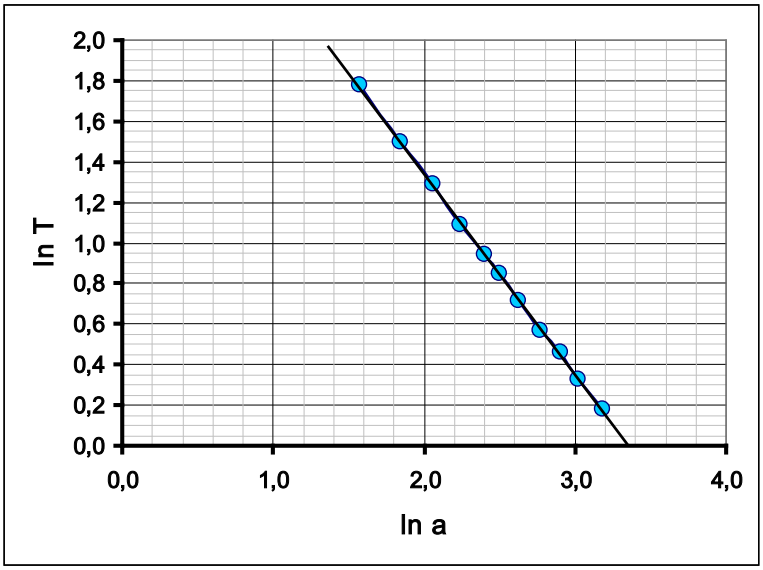
이에 해당하는 의존성 그래프는 다음과 같다.



3.2 지수를 구하는 가장 좋고 흔한 방법은 양 로그 눈금으로 그래프를 그리는 것이다. 문제에 주어진 식 (1)로부터 다음이 성립한다.

$$\ln T = C + q \ln a, \qquad (11)$$

따라서 그래프의 기울기는 지수와 같다. 이 그래프를 아래 그림에 나타내었다.



얻은 관계는 선형이며 기울기는 (-1)에 매우 가깝다. 다른 방법으로 $T_1(a^{-1})$ 또는 $T_1^{-1}(a)$의 의존성을 그릴 수도 있다. 그러나 이 방법들에서는 그린 그래프가 좌표 원점을 지나는 직선임을 보여야 한다.

이 모든 방법은 구하려는 지수가 (-1)과 같다는 것, 곧 비틀림 진동의 주기가 두 실 사이의 거리에 반비례한다는 것을 타당하게 보여 준다.

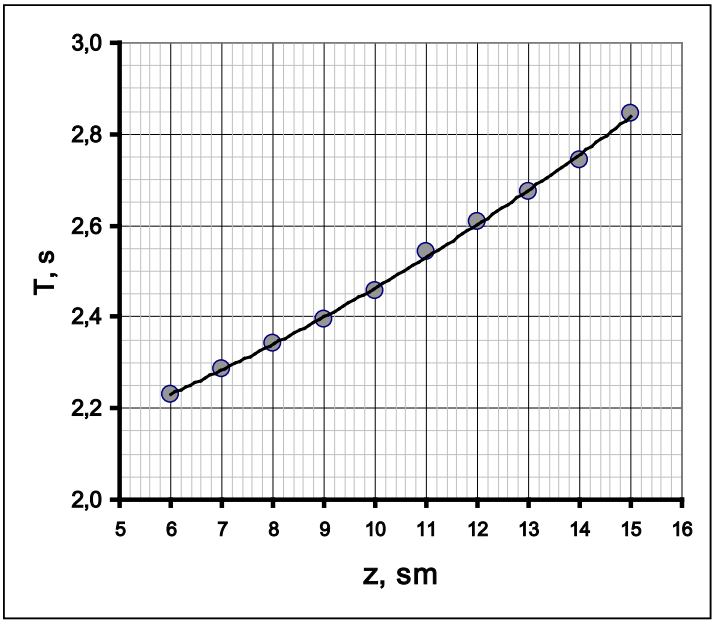
3.3 너트의 위치에 따른 비틀림 진동 주기의 측정 결과를 표 3에 나타내었다. 같은 표에 선형화된 그래프를 그리는 데 필요한 계산 결과도 나타내었다.

표 3. 비틀림 진동 주기의 측정.

z, cm	t_{20}, s	T_1, s	z^2	T_1^2	U
6	44,58	2,229	36	4,968	284,9
7	45,75	2,288	49	5,233	300,0
8	46,83	2,342	64	5,483	314,3
9	47,87	2,394	81	5,729	328,5
10	49,17	2,459	100	6,044	346,5

11	50,84	2,542	121	6,462	370,5
12	52,15	2,608	144	6,799	389,8
13	53,47	2,674	169	7,148	409,8
14	54,85	2,743	196	7,521	431,2
15	56,91	2,846	225	8,097	464,2

이 관계의 그래프를 아래 그림에 나타내었다. 얻은 의존성이 비선형임을 알 수 있다.



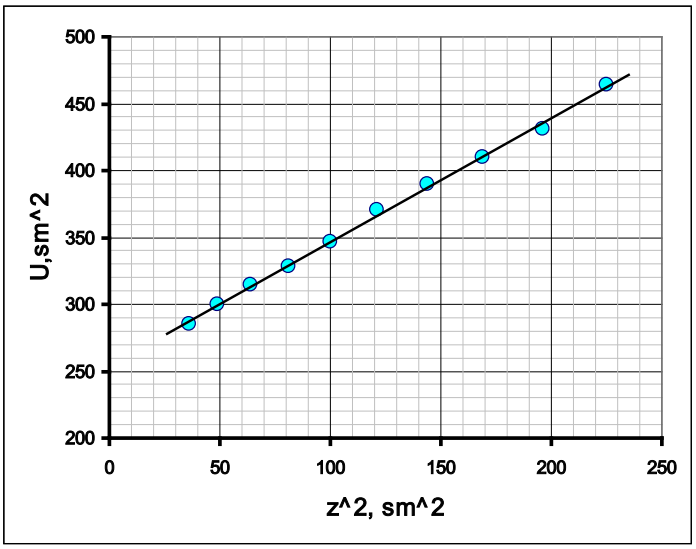
3.4 문제에 주어진 식 (1)–(2)와 앞 문항의 결과로부터, 비틀림 진동의 주기는 다음 식으로 나타난다.

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{\sqrt{A+Bz^2}}{a}, \tag{12}$$

그 선형화는 분명하며 다음 꼴이다.

$$\left(a\frac{T_1}{T_0}\right)^2 = A + Bz^2. \tag{13}$$

$U = \left(a\frac{T_1}{T_0}\right)^2$의 값은 z^2에 선형으로 의존하며, 선형화된 의존성의 그래프를 아래 그림에 나타내었다.



3.5 최소 제곱법으로 계산한 이 의존성의 계수는 다음과 같다.

$$A = (254 \pm 4)\ \text{cm}^2, \tag{14}$$

$$B = 0.93 \pm 0.03. \tag{15}$$

4부. 혼합 진동

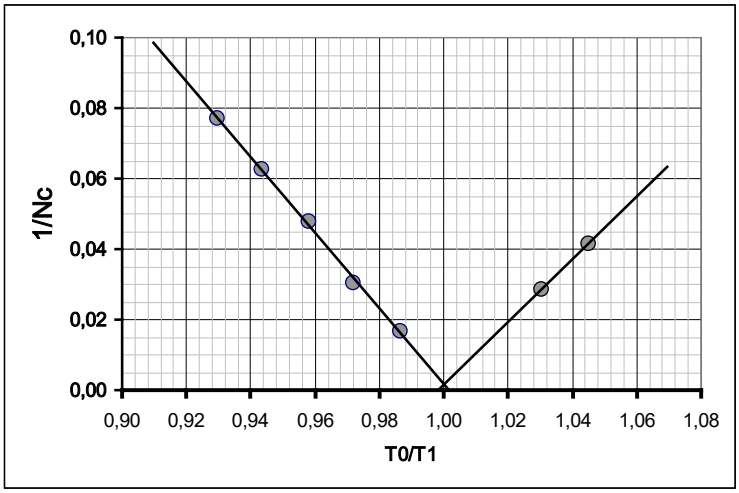
4.1, 4.2 표 4는 이론식 (9)를 검증하는 데 필요한 측정과 계산의 결과이다.

표 4. 혼합 진동의 조사.

z, cm	T_1, s	$\frac{T_0}{T_1}$	N_C (이론)	N_C (실험)	$\frac{1}{N_C}$
10,5	1,247	1,059	17		
11,0	1,264	1,045	22	24	0,042
11,5	1,282	1,030	33	35	0,029
12,0	1,301	1,015	65		
12,5	1,319	1,002	660		
13,0	1,339	0,987	74	60	0,017
13,5	1,359	0,972	36	33	0,030
14,0	1,379	0,958	24	21	0,048
14,5	1,400	0,944	18	16	0,063
15,0	1,421	0,930	14	13	0,077

이 표에서 T_1은 식 (12)로 계산한 비틀림 진동의 주기이고, N_C는 한 사이클 동안의 주기 수를 계산한 값과 측정한 값이다.

4.3 식 (9)를 확인하기 위해 진동 횟수의 역수 $\frac{1}{N_C}$를 $\frac{T_0}{T_1}$의 함수로 그린다. 이 의존성은 이론적으로 $\frac{1}{N_C} = \left|\frac{T_0}{T_1} - 1\right|$로 나타난다. 실험 데이터로 그린 이 의존성의 그래프를 아래 그림에 나타내었다.



이 그래프와 N_C의 계산값과 측정값의 비교는 이론적 결론을 뒷받침한다.

	내용	배점	합계
1부. 효과의 관찰과 이론적 기술			
1.1	진동의 합성을 얻었다(그럴듯한 그림이 적어도 하나 있다)	0,2	**1,0**
	그림 4개: 선분에 가까운 것 2개, 운동 방향을 표시한 타원 2개	4x0,2=0,8	
1.2	편각으로 나타낸 평면 위의 좌표 식	2x0,2=0,4	**0,8**
	시간에 대한 명시적 의존성	2x0,1=0,2	
	작은 각 근사	0,2	

1.3	핵심 아이디어는 위상차의 변화이다, 식 (7); (맥놀이 주기를 쓴 경우)	0,5 *(0,2)*	**1,3**
	사이클 시간에 대한 식 (8)	0,5	
	식 (8)에 절댓값 기호를 붙였다	0,3	
1.4	$N_C = \frac{T_1}{\lvert T_0 - T_1 \rvert}$.	0,4	**0,4**
	2부. 세로 진동		
	주기의 수치를 추정한 경우에 채점한다		
2.1	얻은 주기 값이 1.3 – 1.5 s 범위에 있다	0,4	**2,0**
	측정 오차가 1% 미만이다(오차를 추정한 경우에 채점)	0,1	
	진동 N번의 시간을 적어도 5번 측정했다*(3번; 그보다 적음)*	0,3 *(0,1;0)*	
	진동 횟수 N이 10 이상이다*(5; 그보다 적음)*	0,2 *(0,1;0)*	
	모든 측정값의 평균을 냈다	0,1	
	우연 오차를 계산했다(편차 절댓값의 평균, 표준 편차 – 모두 인정)	0,2	
	기기 오차(눈금 값의 절반 또는 눈금 값)	0,2	
	전체 오차를 계산했다(값이 타당함)	0,2	
	올바른 반올림(오차 – 1~2자리, 결과 – 오차의 자릿수까지)	0,2	
	결과의 단위를 표시했다	0,1	
	3부. 비틀림 진동		
	측정 결과가 채점된 경우에 채점한다!		
3.1	*너트가 막대 끝에 있지 않으면 점수를 2로 나눈다.*		**2,5**
	측정마다 0.15(합계 1.5 이하; 20% 범위 안에 들어야 함; *진동 10번 미만의 시간을 측정했다면 측정마다 0.1*)	*0,15x10=1,5*	
	범위의 하한이 5.0 cm 이하	0,2	
	범위의 상한이 15.0 cm 이상	0,2	
	쌍곡선에 가까운 비선형 의존성을 얻었다	0,1	
	그래프 그리기(축에 이름과 눈금을 달고, *모든 점을 표에 따라 찍고, 매끄러운 곡선을 그렸다)*	*0,1+0,2+0,2=* =0,5	
3.2	*지수가 -1이고 측정 결과가 채점된 경우에 채점한다*		**1,5**
	얻은 값은 q=-1	0,5	
	양 로그 눈금으로 선형화했다(계산을 제시함) *(역수를 쓰고 원점을 지남을 증명한 경우);*	0,5 *(0,2+0,2)*	
	선형화된 의존성의 그래프를 그렸다(축에 이름과 눈금을 달고, 모든 *점을 표에 따라 찍고, 매끄러운 직선을 그렸다)*	*0,1+0,2+0,2=* =0,5	
3.3	*두 실 사이의 거리가 10 cm가 아니면 점수를 2로 나눈다*		**2,5**
	측정마다 0.15(합계 1.5 이하; 20% 범위 안에 들어야 함; *진동 10번 미만의 시간을 측정했다면 측정마다 0.1*)	*0,15x10=1,5*	
	범위의 하한이 6.5 cm 이하	0,2	
	범위의 상한이 14.0 cm 이상	0,2	
	아래로 볼록한 비선형 의존성을 얻었다	0,1	
	선형화된 의존성의 그래프를 그렸다(축에 이름과 눈금을 달고, 모든 *점을 표에 따라 찍고, 매끄러운 직선을 그렸다)*	*0,1+0,2+0,2=* =0,5	
3.4	선형화했다(주기와 거리의 제곱을 계산함)	0,3	**1,0**

	선형화된 의존성의 그래프를 그렸다(축에 이름과 눈금을 달고, 모든 점을 표에 따라 찍고, 매끄러운 직선을 그렸다)	*0,1+0,2+0,2= =0,5*	
	직선을 얻었다	0,2	
3.5	*3.3–3.4가 채점된 경우에 채점한다*		**1**
	계수의 수치를 얻었다(20% 범위 안, *단위를 표시하지 않으면 -0.1)*	2x0,4=0,8	
	계수의 오차를 계산했다	2x0,1=0,2	
	최소 제곱법으로 계산하면 계수 1; *그래프로, 모든 점에 대해 평균하면 – 0.8;* *두 점으로 하면 – 0.5;*		
4부. 혼합 진동			
	측정 결과가 채점된 경우에 채점한다		
4.1	측정마다 0.2*(합계 2.0 이하; 30% 범위 안)*	0,2x10=2,0	**4**
	의존성의 가지가 두 개 있다(각 가지에 점이 적어도 2개)	1,0	
	범위의 하한이 11 cm 이하	0,2	
	범위의 상한이 15 cm 이상	0,2	
	얻은 수가 N>50	0,3	
	급격한 증가(선형보다 가파름)	0,1	
	범위 가운데에 “측정되지 않은” 영역이 있다	0,2	
4.2	주기를 계산했다(범위 – 20%) 각 점마다 0.05(소수점 아래 적어도 3자리)	0,05x10=0,5	**0,5**
4.3	선형화를 제안했다(주기의 비로 나타낸 진동 횟수의 역수, 주기의 차); *진동 횟수를 이론적으로 계산하고 실험 결과와 비교했다.*	0,5 *0,2+0,1=0,3*	**1,5**
	선형화된 의존성을 계산했다	0,2	
	선형화된 의존성의 그래프를 그렸다 *측정 결과의 그래프를 그렸다*	0,4 *0,2*	
	절댓값 함수의 그래프와 비슷한 그래프를 얻었다	0,3	
	그래프에서 최솟값의 위치가 올바르다	0,1	
	합계		**20,0**