실험 시험 문제 풀이

비틀림: 퍼텐셜 곡선 만들기

제1부. 이론적 도입

1.1 회전하는 막대의 운동 에너지는 다음 식으로 주어진다.

$$E = \frac{I\omega^2}{2}. \quad (1)$$

여기서 $I = m_1a^2/12 + 2m_2h^2/4$는 회전축에 대한 막대의 관성 모멘트이고($a$는 막대의 길이, h는 실 사이의 거리이다), $\omega = 2\pi V$는 막대의 각속도이다(ω는 회전 진동수이다).

따라서

$$E = \pi^2\left(\frac{m_1a^2}{6} + m_2h^2\right)V^2 \quad (2)$$

$V = 1\ \mathrm{s}^{-1}$일 때 막대의 에너지는 구하려는 에너지 단위와 같다. 여기서부터는 막대의 수직 속도와 관련된 에너지를 회전 운동 에너지에 비해 무시할 수 있다고 가정한다. 측정 결과에 따르면 $a = 25$ cm, $h = 15$ cm이고, 질량 값은 문제에 주어져 있다. 따라서

$$1\ Ku \approx 6.35 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{J}. \quad (3)$$

1.2 제안된 시간과 좌표의 관계 $t(k) = Ak^{\alpha}$를 k에 대해 미분하자. 이때 좌표가 회전수 k(반드시 정수일 필요는 없다)라는 점을 고려한다.

$$V(k) = \frac{dk}{dt} = \frac{k^{1-\alpha}}{\alpha A}, \quad (4)$$

$$E(k) = V^2 = \left(\frac{k^{1-\alpha}}{\alpha A}\right)^2. \quad (5)$$

1.3 에너지 보존 법칙으로부터 막대의 각속도를 나타내자.

$$V^2 = U(N) - U(k). \quad (6)$$

풀리는 시간은 다음 식으로 계산할 수 있다.

$$T = \int_0^N \frac{dk}{V(k)}. \quad (7)$$

적분 변수를 다음과 같이 바꾸고

$$\xi = \frac{N-k}{N} \quad (8)$$

관계 $U(N) = BN^{\beta}$를 이용하면 다음을 얻는다.

$$T(N) = N^{1-\frac{\beta}{2}}\sqrt{\frac{1}{B}}\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^{\beta}}}. \quad (9)$$

이 식의 적분은 N의 값에 의존하지 않고, 지수 β에만 의존한다. 따라서 회전수에 따른 풀리는 시간의 관계는 식 $T(N) = GN^{\gamma}$로 주어지며, 그 지수는 다음과 같다.

$$\gamma = 1 - \frac{\beta}{2}. \quad (10)$$

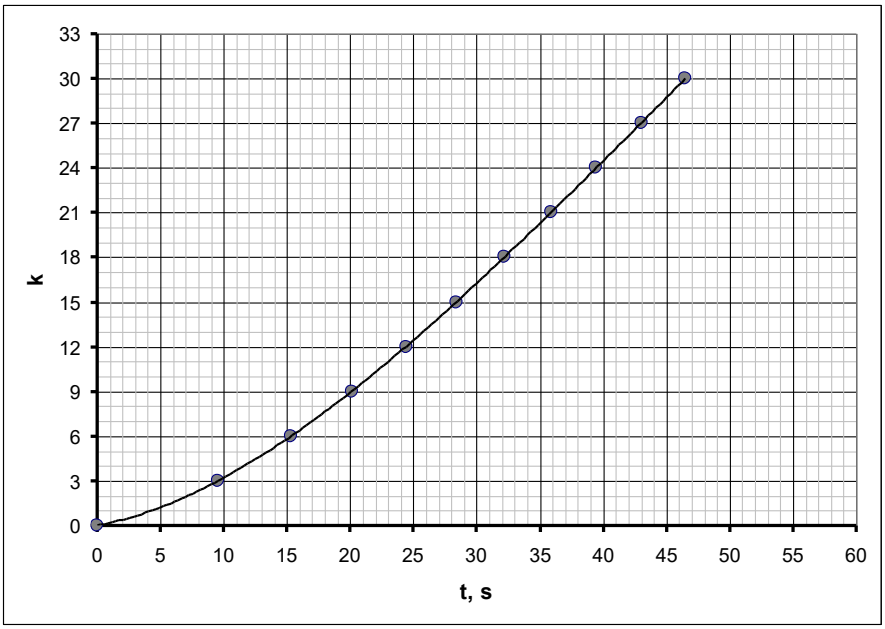
제2부. 운동 법칙 조사

2.1-2.2 측정 결과와 필요한 계산 결과를 표 1에 나타내었다.

k	*t, s*	*V, s^{-1}*	*E, Ku (exp.)*	*ln k*	*ln t*	*E, Ku (theor.)*
0	0	0	0			
3	9,55	0,391	0,153	1,099	2,257	0,213
6	15,35	0,568	0,323	1,792	2,731	0,330
9	20,11	0,662	0,438	2,197	3,001	0,427
12	24,42	0,725	0,525	2,485	3,195	0,512
15	28,39	0,774	0,599	2,708	3,346	0,590
18	32,17	0,803	0,645	2,890	3,471	0,662

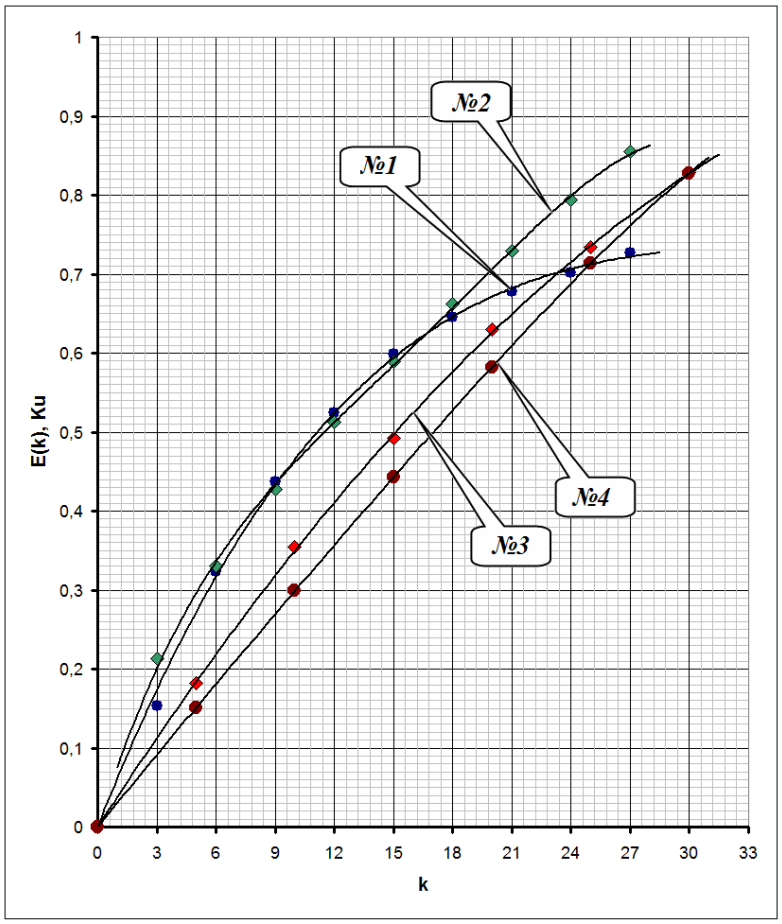
21	35,86	0,823	0,677	3,045	3,580	0,729
24	39,46	0,838	0,702	3,178	3,675	0,794
27	43,02	0,852	0,726	3,296	3,762	0,855
30	46,5			3,401	3,839	0,914

아래 그림은 시간에 따른 좌표의 그래프이다.



2.3 표 1에는 문제에 주어진 식으로 계산한 막대의 속도 V의 값이 나와 있다. 운동 에너지의 값은 식 $E = V^2$으로 계산하였다.

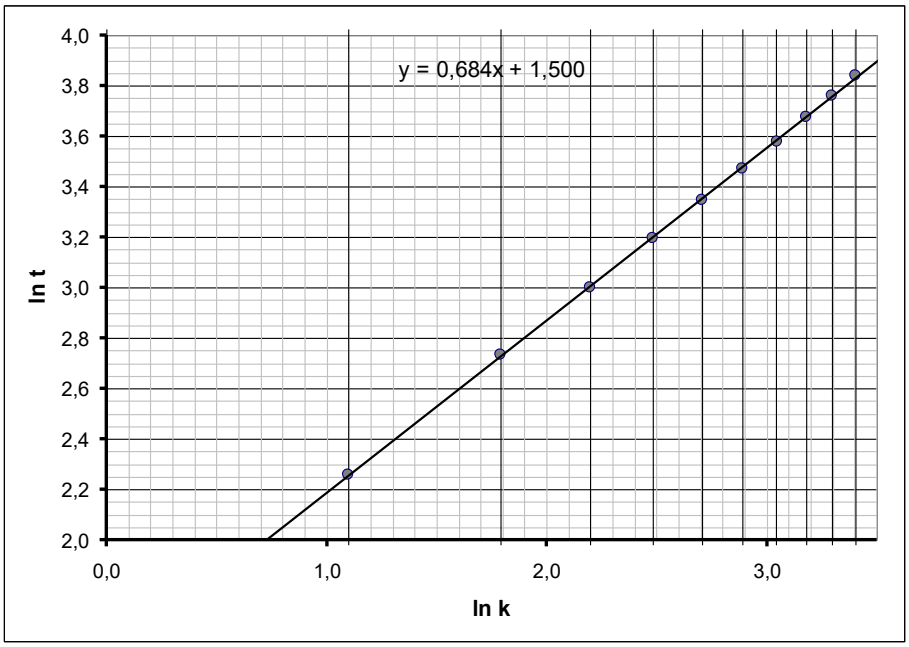
2.4 얻은 관계의 그래프는 그림(1번)에 나타내었다.



2.5 정한 0 준위에 대하여 퍼텐셜 에너지는 다음과 같다.

$$U(k) = -E(k). \quad (11)$$

2.6 회전수에 따른 운동 시간의 관계를 로그 눈금으로 그린 그래프는 아래 그림과 같다.



2.7 최소 제곱법으로 계산한 이 관계 $\ln t = \alpha \ln k + \ln A$의 계수는 다음과 같다.

$$\alpha = 0.684 \pm 0.006, \quad (12)$$

$$\ln A = 1.50 \pm 0.02. \quad (13)$$

매개변수 A와 그 오차를 계산하면 다음과 같다.

$$A = \exp(\ln A) = 4.48\ \boldsymbol{Ku}, \quad (14)$$

$$\Delta A = A\Delta(\ln A) = \pm 0.07\ \boldsymbol{Ku}. \quad (15)$$

2.8-2.9 운동 에너지를 계산하려면 얻은 매개변수의 수치와 함께 식 (5)를 사용한다. 계산 결과는 표 1과 2.4의 그래프에 2번으로 나타내었다.

제3부. 단계별 탐색

3.1-3.5 각 구간에 대한 측정 결과, 계산, 그래프, 최종 결과(에너지 변화 E_{5-10}의 계산값)를 아래에 나타내었다.

매개변수 α의 값은 그래프의 기울기로 계산한다.

$$\alpha = \frac{\Delta(\ln t)}{\Delta(\ln k)}. \quad (16)$$

그래프의 양 끝점(직선이 그래프의 경계와 만나는 점)의 값을 취하면 편리하다. 이 값을 $z_{\min}$과 $z_{\max}$로 나타내며, 이때 $\Delta(\ln k) = 2.5$이다.

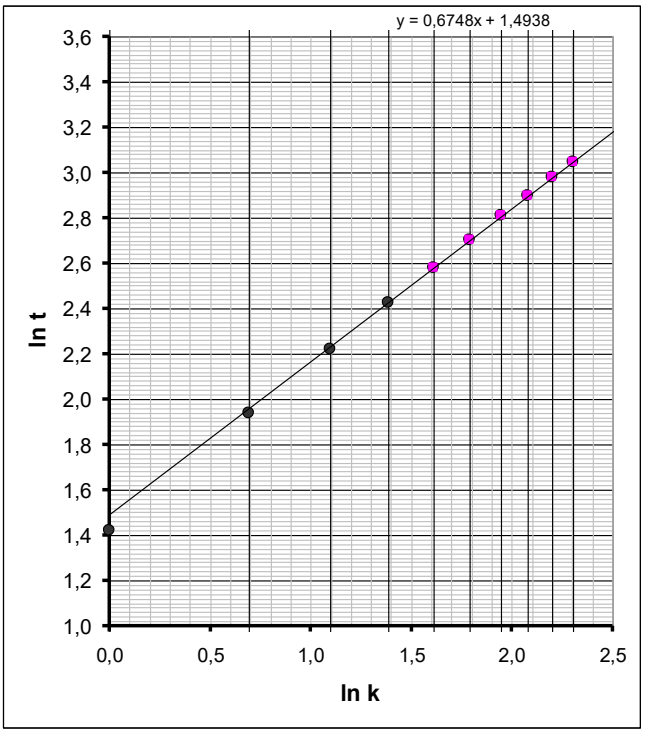
매개변수 $\ln A$의 값은 직선이 세로축과 만나는 점의 좌표에 해당한다.

운동 에너지의 변화를 계산하는 데에는 다음 식을 사용한다.

$$E_{5-10} = \left(\frac{10^{1-\alpha}}{\alpha A}\right)^2 - \left(\frac{5^{1-\alpha}}{\alpha A}\right)^2 = \left(\frac{5^{1-\alpha}}{\alpha A}\right)^2 (4^{1-\alpha} - 1). \quad (17)$$

구간 35-25

k	t, s	$\ln k$	$\ln t$
0	0,00		
1	4,14	0,000	1,421
2	6,96	0,693	1,940
3	9,19	1,099	2,218
4	11,29	1,386	2,424
5	13,17	1,609	2,578
6	14,94	1,792	2,704
7	16,60	1,946	2,809
8	18,09	2,079	2,895
9	19,63	2,197	2,977
10	21,04	2,303	3,046



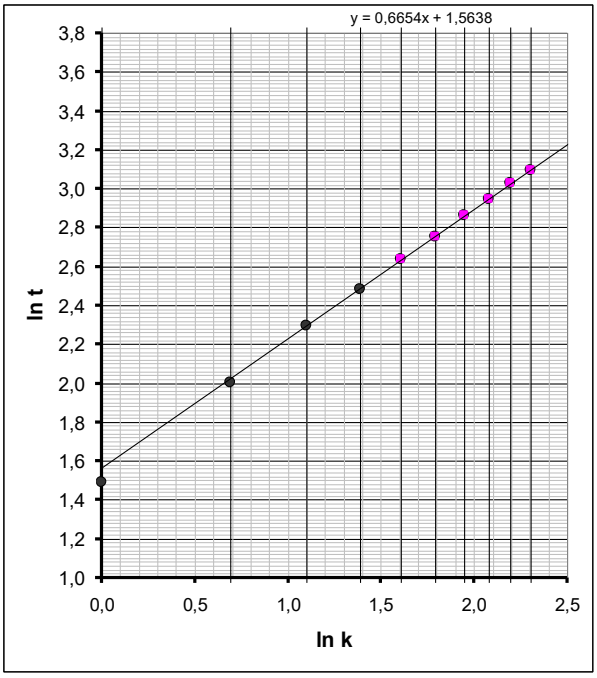
zmax= 3,18
zmin= 1,50

$\alpha =$ 0,672
$\ln A =$ 1,500
$A =$ 4,482

$E_{5-10} =$ **0,182** ***Ku***

구간 30-20

k	t, s	$\ln k$	$\ln t$
0	0		
1	4,43	0,000	1,488
2	7,43	0,693	2,006
3	9,92	1,099	2,295
4	11,96	1,386	2,482
5	13,94	1,609	2,635
6	15,71	1,792	2,754
7	17,47	1,946	2,860
8	19,06	2,079	2,948
9	20,61	2,197	3,026
10	22,09	2,303	3,095



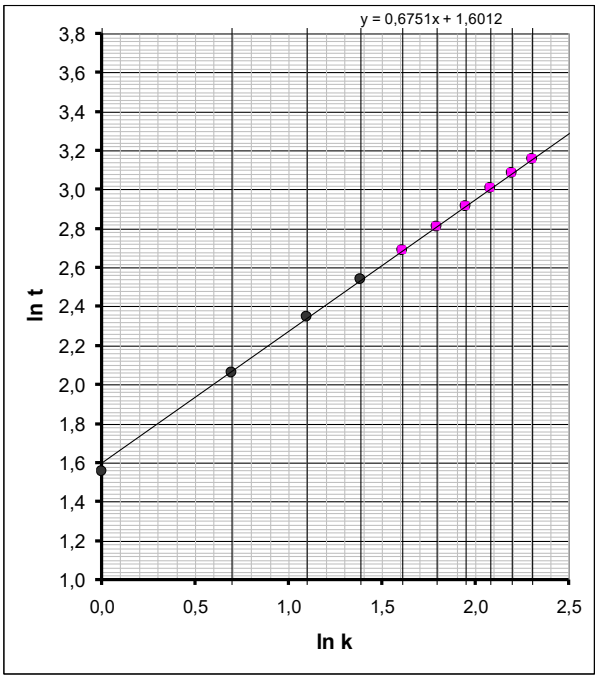
zmax= 3,23
zmin= 1,57

$\alpha =$ 0,664
$\ln A =$ 1,570
$A =$ 4,807

$E_{5-10} =$ **0,172** ***Ku***

구간 25-15

k	t, s	$\ln k$	$\ln t$
0	0,00		
1	4,73	0,000	1,554
2	7,85	0,693	2,061
3	10,44	1,099	2,346
4	12,69	1,386	2,541
5	14,73	1,609	2,690
6	16,59	1,792	2,809
7	18,41	1,946	2,913
8	20,20	2,079	3,006
9	21,87	2,197	3,085
10	23,48	2,303	3,156



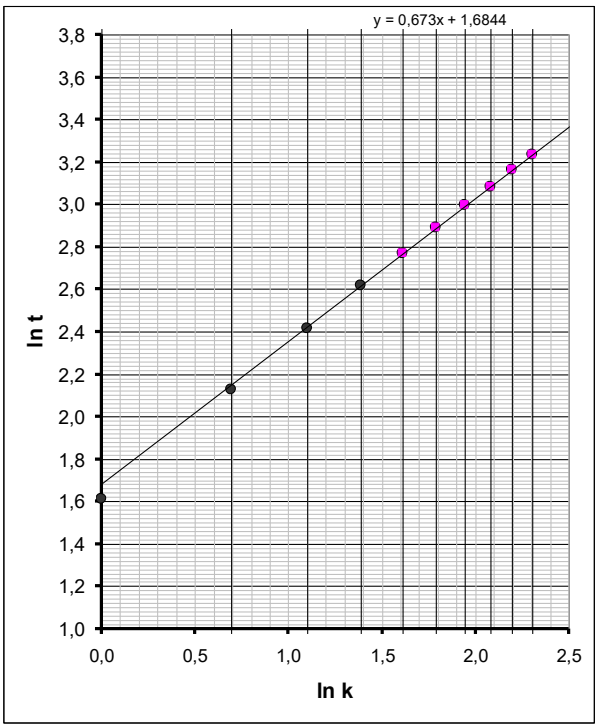
zmax= 2,23
zmin= 0,57

$\alpha =$ 0,680
$\ln A =$ 1,600
$A =$ 4,953

$E_{5-10} =$ **0,138** ***Ku***

구간 20-10

k	t, s	$\ln k$	$\ln t$
0	0		
1	5,01	0,000	1,611
2	8,38	0,693	2,126
3	11,19	1,099	2,415
4	13,67	1,386	2,615
5	15,92	1,609	2,768
6	17,98	1,792	2,889
7	19,99	1,946	2,995
8	21,86	2,079	3,085
9	23,61	2,197	3,162
10	25,39	2,303	3,234



zmax= 3,30
zmin= 1,60

$\alpha =$ 0,672
$\ln A =$ 1,680
$A =$ 5,366

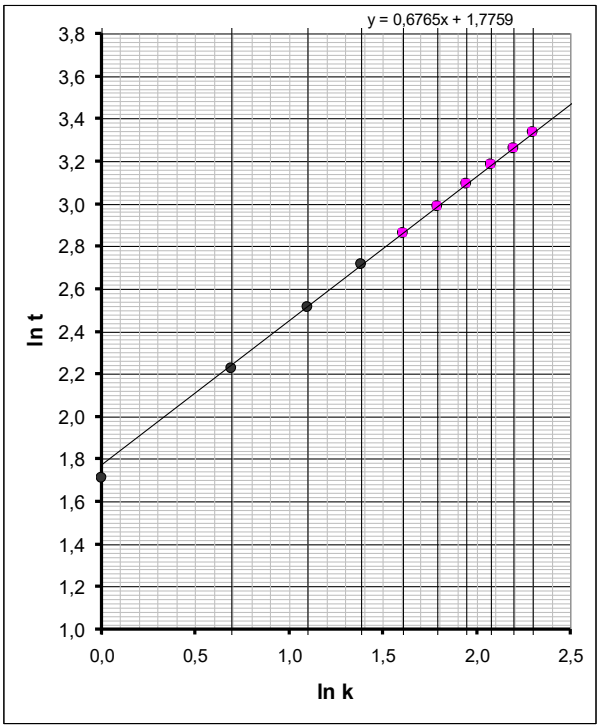
$E_{5-10} =$ **0,127** ***Ku***

구간 15-5

k	t, s	$\ln k$	$\ln t$
0	0		
1	5,55	0,000	1,714
2	9,28	0,693	2,228
3	12,33	1,099	2,512
4	15,08	1,386	2,713
5	17,53	1,609	2,864
6	19,86	1,792	2,989
7	22,04	1,946	3,093
8	24,13	2,079	3,183
9	26,07	2,197	3,261
10	28,05	2,303	3,334

zmax= 3,47
zmin= 1,78

$\alpha =$ 0,676
$\ln A =$ 1,780
$A =$ 5,930



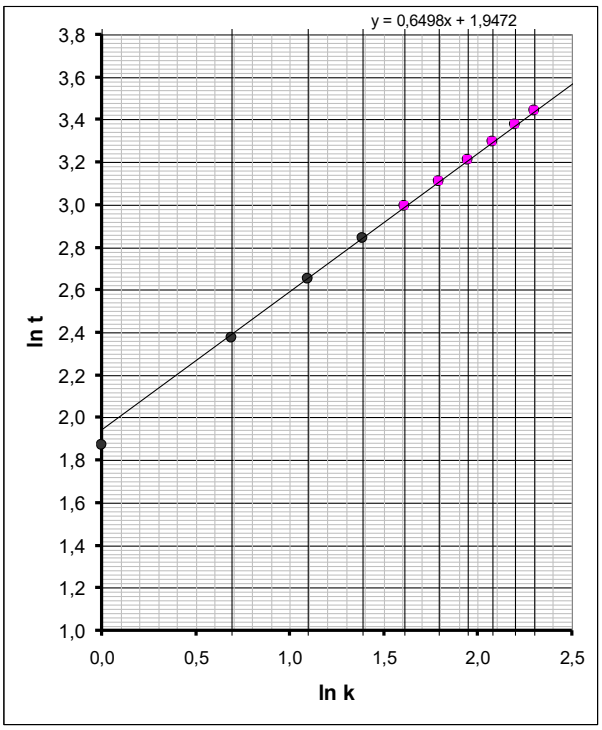
$E_{5-10} =$ **0,100** ***Ku***

구간 10-0

k	t, s	$\ln k$	$\ln t$
0	0		
1	6,48	0,000	1,869
2	10,74	0,693	2,374
3	14,16	1,099	2,650
4	17,16	1,386	2,843
5	19,94	1,609	2,993
6	22,44	1,792	3,111
7	24,84	1,946	3,212
8	27,08	2,079	3,299
9	29,28	2,197	3,377
10	31,23	2,303	3,441

zmax= 2,57
zmin= 0,95

$\alpha =$ 0,648
$\ln A =$ 1,950
$A =$ 7,029



$E_{5-10} =$ **0,094** ***Ku***

3.6 최종 표는 다음과 같다.

위쪽 경계 N	아래쪽 경계 N	E_{5-10}, ***Ku***	N	k	$E(k)$
35	25	0,182		0	0
30	20	0,172	30	5	0,182
25	15	0,138	25	10	0,354
20	10	0,127	20	15	0,492
15	5	0,100	15	20	0,619
10	0	0,094	10	25	0,719
			5	30	0,814

$E(k)$의 값은 단계적으로 더하여 얻었다.

$$E_0 = 0$$
$$E(k+5) = E(k) + E_{5-10}. \quad (18)$$

이 관계의 그래프는 2.4의 그래프에 3번으로 나타내었다.

제4부. 풀리는 시간

4.1 측정 결과의 표는 아래와 같다.

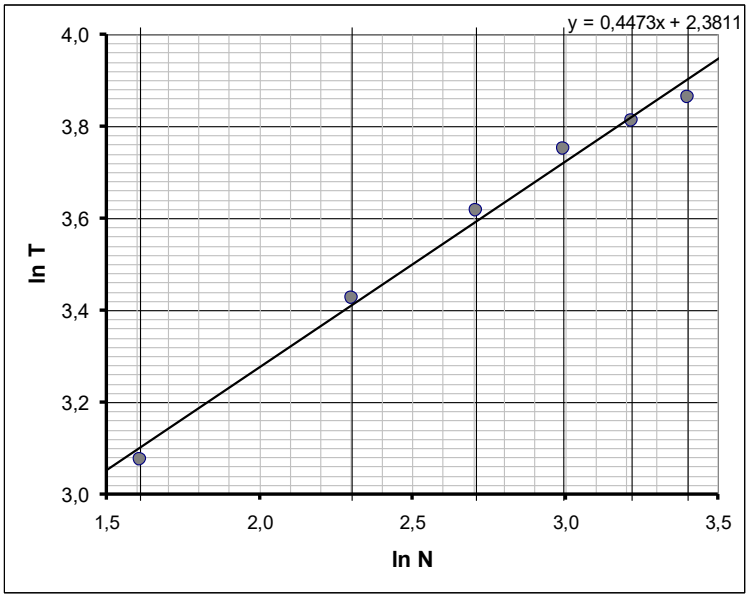
N	***T, s***		***ln N***	***ln T***	N	k	$E(k)$
30	47,63		3,40	3,86		0	0,000
25	45,30		3,22	3,81	30	5	0,149
20	42,62		3,00	3,75	25	10	0,294
15	37,25		2,71	3,62	20	15	0,436
10	30,81		2,30	3,43	15	20	0,572
5	21,65		1,61	3,07	10	25	0,702
					5	30	0,814

4.2. 풀리는 시간 측정의 오차를 추정하려면 여러 번 측정해야 한다. 우연 오차는 엄밀하게는 다음 식으로 계산하며

$$\Delta T = t_{n,p}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \langle x \rangle)^2}{n(n-1)}} \quad (19)$$

그 값은 백분의 몇 초 정도이다.

4.3 처음 회전수에 따른 풀리는 시간의 관계 그래프는 그림과 같다.



4.4 지수의 값은 그래프로 구하거나 최소 제곱법으로 구할 수 있다. 그 값은 다음과 같다.

$$\gamma = 0.45. \tag{20}$$

4.5 퍼텐셜 에너지 식의 지수는 다음과 같다.

$$\beta = 2(1-\gamma) = 1.10. \tag{21}$$

4.6 운동 에너지를 계산하려면 다음 단계를 따른다.

가) 식 $U' = N^{\beta}$를 이용하여 퍼텐셜 에너지의 값을 계산한다;

나) 이 값을 이용하여 (상수 인자를 제외하고) 운동 에너지의 값을 계산한다.

$$E'(k) = U'(30) - U'(N-k). \tag{22}$$

다) 에너지를 정규화한다.

$$E(k) = \frac{E(30)}{E\prime(30)} E'(k), \tag{23}$$

여기서 $E(30)$은 과제의 제3부에서 구한 운동 에너지의 값이다(우리의 측정에서는 $E(30) = 0.814$이다).

계산 결과는 표 4.1에 나타내었다. 이 관계의 그래프는 2.4의 그래프에 4번으로 나타내었다.

채점 기준
틀린 식으로 한 올바른 계산은 채점하지 않는다!
반올림이 틀리면 감점한다(-0.2점).

문항	내용	배점	부분 총점
	제1부. 이론적 도입		
1.1	식 (2): $E = \pi^2 \left(\frac{m_1 a^2}{6} + m_2 h^2\right) V^2$	0,2	**0,5**
	측정값: $a = (25 \pm 1)$ cm, $h = (15 \pm 1)$ cm	0,2	
	식 (3)의 수치: $1\ Ku \approx 6.35 \cdot 10^{-3}$ J	0,1	
1.2	식 (4): $V(k) = \frac{k^{1-\alpha}}{\alpha A}$	0,3	**0,5**
	식 (5): $E(k) = \left(\frac{k^{1-\alpha}}{\alpha A}\right)^2$	0,2	
1.3	적분 (7): $T = \int_0^N \frac{dk}{V(k)}$	0,2	**0,6**
	식 (9): $T(N) = N^{1-\frac{\beta}{2}} \sqrt{\frac{1}{B}} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^\beta}}$	0,3	
	식 (10)의 지수: $\gamma = 1 - \frac{\beta}{2}$	0,1	
	제2부. 운동 법칙 조사		
2.1	측정하였다 0,1×10 10% 범위 안 0,1×10 *(20% 범위 안 0,05×10)*	1	**1**
	2.2 – 2.4와 2.6 – 2.9는 2.1이 점수를 받은 경우에만 채점한다		
2.2	그래프 $k(t)$ 그리기:		**0,3**
	표에 맞게 자료 점을 찍었다.	0,2	
	맞춤 곡선을 그었다	0,1	
2.3	운동 에너지를 계산하였다	0,4	**0,4**
2.4	그래프 $E(k)$ 그리기		**0,3**
	표에 맞게 자료 점을 찍었다.	0,2	
	맞춤 곡선을 그었다	0,1	
2.5	퍼텐셜 에너지의 식 (11): $U(k) = -E(k)$	0,2	**0,2**
2.6	$\ln k$에 대한 $\ln t$의 그래프 그리기:		**0,4**
	시간의 로그를 계산하였다	0,1	
	표에 맞게 자료 점을 찍었다	0,2	
	가장 잘 맞는 직선을 그었다	0,1	
2.7	관계의 매개변수 결정		**0,9**
	최소 제곱법(LSM)을 사용하였다	0,2	
	수치가 $\alpha = 0{,}68 \pm 0{,}05$ 범위 안에 있다 *($\alpha = 0{,}68 \pm 0{,}10$ 범위 안이면 − 0,1)*	0,2	
	오차 $\Delta\alpha$	0,1	
	수치가 $A = 4{,}5 \pm 0{,}3$ 범위 안에 있다 *($A = 4{,}5 \pm 0{,}6$ 범위 안이면 - 0,1)*	0,2	
	A의 오차 (식 → 수치)	0,2	
2.8	$E(k)$의 이론적 에너지 값 계산		**0,5**
2.9	그래프 $E(k)$ 그리기 *(2.8이 점수를 받은 경우에만 채점)*		**0,3**
	표에 맞게 자료 점을 찍었다	0,2	
	맞춤 곡선을 그었다	0,1	

제3부. 단계별 탐색			
모든 구간에서 3.2–3.5는 해당하는 3.1의 측정 결과가 점수를 받은 경우에만 채점한다.			
	구간 35-25		
3.1	측정하였다 10% 범위 안 - 0,3 *(20% 범위 안 - 0,1)*		**0,3**
3.2	그래프 그리기		**0,2**
	로그 $\ln t$를 계산하였다	0,1	
	표에 맞게 자료 점을 찍었다	0,1	
3.3	가장 잘 맞는 직선을 그었다		**0,1**
3.4	매개변수 계산		**0,8**
	α의 식: $\alpha = \frac{\Delta(\ln t)}{\Delta(\ln k)}$	0,1	
	A의 식: $A = \exp(\ln A)$	0,1	
	수치가 $\alpha = 0{,}67 \pm 0{,}06$ 범위 안에 있다 *($\alpha = 0{,}67 \pm 0{,}10$ 범위 안이면 - 0,1)*	0,3	
	수치가 $A = 4{,}5 \pm 0{,}03$ 범위 안에 있다 *($A = 4{,}5 \pm 0{,}06$ 범위 안이면 - 0,1)*	0,3	
3.5	에너지 계산		**0,5**
	식 (17): $E_{5-10} = \left(\frac{10^{1-\alpha}}{\alpha A}\right)^2 - \left(\frac{5^{1-\alpha}}{\alpha A}\right)^2 = \left(\frac{5^{1-\alpha}}{\alpha A}\right)^2 (4^{1-\alpha} - 1)$	0,2	
	수치가 $E_{5-10} = 0{,}18 \pm 0{,}06$ 범위 안에 있다 *($E_{5-10} = 0{,}18 \pm 0{,}10$ 범위 안이면 - 0,1)*	0,3	
	구간 30-20		
3.1	측정하였다 10% 범위 안 - 0,3 *(20% 범위 안 - 0,1)*		**0,3**
3.2	그래프 그리기		**0,2**
	로그 $\ln t$를 계산하였다	0,1	
	표에 맞게 자료 점을 찍었다	0,1	
3.3	가장 잘 맞는 직선을 그었다		**0,1**
3.4	매개변수 계산		**0,6**
	수치가 $\alpha = 0{,}66 \pm 0{,}06$ 범위 안에 있다 *($\alpha = 0{,}66 \pm 0{,}10$ 범위 안이면 - 0,1)*	0,3	
	수치가 $A = 4{,}8 \pm 0{,}03$ 범위 안에 있다 *($A = 4{,}8 \pm 0{,}06$ 범위 안이면 - 0,1)*	0,3	
3.5	수치가 $E_{5-10} = 0{,}17 \pm 0{,}06$ 범위 안에 있다 *($E_{5-10} = 0{,}17 \pm 0{,}10$ 범위 안이면 - 0,1)*		**0,3**
	구간 25-15		
3.1	측정하였다 10% 범위 안 - 0,3 *(20% 범위 안 - 0,1)*		**0,3**
3.2	그래프 그리기		**0,2**
	로그 $\ln t$를 계산하였다	0,1	
	표에 맞게 자료 점을 찍었다	0,1	
3.3	가장 잘 맞는 직선을 그었다		**0,1**
3.4	매개변수 계산		**0,6**
	수치가 $\alpha = 0{,}68 \pm 0{,}06$ 범위 안에 있다 *($\alpha = 0{,}68 \pm 0{,}10$ 범위 안이면 - 0,1)*	0,3	
	수치가 $A = 4{,}95 \pm 0{,}03$ 범위 안에 있다	0,3	

	($A = 4{,}95 \pm 0{,}06$ 범위 안이면 - 0,1)		
3.5	수치가 $E_{5-10} = 0{,}14 \pm 0{,}06$ 범위 안에 있다 *($E_{5-10} = 0{,}14 \pm 0{,}10$ 범위 안이면 - 0,1)*		**0,3**
	구간 20-10		
3.1	측정하였다 10% 범위 안 - 0,3 *(20% 범위 안 - 0,1)*		**0,3**
3.2	그래프 그리기		**0,2**
	로그 $\ln t$를 계산하였다	0,1	
	표에 맞게 자료 점을 찍었다	0,1	
3.3	가장 잘 맞는 직선을 그었다		**0,1**
3.4	매개변수 계산		**0,6**
	수치가 $\alpha = 0{,}67 \pm 0{,}06$ 범위 안에 있다 *($\alpha = 0{,}67 \pm 0{,}10$ 범위 안이면 - 0,1)*	0,3	
	수치가 $A = 5{,}36 \pm 0{,}03$ 범위 안에 있다 *($A = 5{,}36 \pm 0{,}06$ 범위 안이면 - 0,1)*	0,3	
3.5	수치가 $E_{5-10} = 0{,}13 \pm 0{,}06$ 범위 안에 있다 *($E_{5-10} = 0{,}13 \pm 0{,}10$ 범위 안이면 - 0,1)*		**0,3**
	구간 15-5		
3.1	측정하였다 10% 범위 안 - 0,3 *(20% 범위 안 - 0,1)*		**0,3**
3.2	그래프 그리기		**0,2**
	로그 $\ln t$를 계산하였다	0,1	
	표에 맞게 자료 점을 찍었다	0,1	
3.3	가장 잘 맞는 직선을 그었다		**0,1**
3.4	매개변수 계산		**0,6**
	수치가 $\alpha = 0{,}67 \pm 0{,}06$ 범위 안에 있다 *($\alpha = 0{,}67 \pm 0{,}10$ 범위 안이면 - 0,1)*	0,3	
	수치가 $A = 5{,}93 \pm 0{,}03$ 범위 안에 있다 *($A = 5{,}93 \pm 0{,}06$ 범위 안이면 - 0,1)*	0,3	
3.5	수치가 $E_{5-10} = 0{,}10 \pm 0{,}06$ 범위 안에 있다 *($E_{5-10} = 0{,}10 \pm 0{,}10$ 범위 안이면 - 0,1)*		**0,3**
	구간 10-0		
3.1	측정하였다 10% 범위 안 - 0,3 *(20% 범위 안 - 0,1)*		**0,3**
3.2	그래프 그리기		**0,2**
	로그 $\ln t$를 계산하였다	0,1	
	표에 맞게 자료 점을 찍었다	0,1	
3.3	가장 잘 맞는 직선을 그었다		**0,1**
3.4	매개변수 계산		**0,6**
	수치가 $\alpha = 0{,}65 \pm 0{,}06$ 범위 안에 있다 *($\alpha = 0{,}65 \pm 0{,}10$ 범위 안이면 - 0,1)*	0,3	
	수치가 $A = 7{,}03 \pm 0{,}03$ 범위 안에 있다 *($A = 7{,}03 \pm 0{,}06$ 범위 안이면 - 0,1)*	0,3	
3.5	수치가 $E_{5-10} = 0{,}09 \pm 0{,}06$ 범위 안에 있다 *($E_{5-10} = 0{,}09 \pm 0{,}10$ 범위 안이면 - 0,1)*		**0,3**
3.6	좌표에 따른 에너지 관계 계산.		**0,9**
	식 (18): $E_0 = 0$ $E(k+5) = E(k) + E_{5-10}$	0,2	
	에너지를 계산하였다.	0,4	

	3번 그래프 그리기.	0,3	
제4부. 풀리는 시간			
4.1	측정하였다 0,2×6 10% 범위 안 0,2×6 *(20% 범위 안 0,1×6)*		**1,2**
4.3–4.5와 4.7은 4.1의 측정 결과가 점수를 받은 경우에만 채점한다			
4.2	시간 측정 오차의 추정		**0,6**
	5–7번 측정하였다 (허용 오차 — 10%) *(3-4번 측정 – 0,1)*	0,3	
	평균을 계산하였다	0,1	
	올바른 식을 써서 오차를 추정하였다	0,2	
4.3	그래프 $T(N)$ 그리기:		**0,4**
	로그 $\ln T$를 계산하였다	0,1	
	표에 맞게 자료 점을 찍었다	0,2	
	가장 잘 맞는 직선을 그었다	0,1	
4.4	지수를 구하였다 $\gamma = 0{,}45 \pm 0{,}03$ *($\gamma = 0{,}45 \pm 0{,}06$ 범위 안이면 - 0,1)*		**0,3**
4.5	값 $\beta = 2(1-\gamma)$를 계산하였다		**0,2**
4.6	에너지 계산		**0,8**
	계산 절차		
	퍼텐셜 에너지 계산	0,1	
	운동 에너지 계산 (22): $E'(k) = U'(30) - U'(N-k)$	0,1	
	식 (23)에 따른 정규화: $E(k) = \frac{E(30)}{E\prime(30)} E'(k)$	0,1	
	에너지를 계산하였다	0,5	
4,7	4번 그래프 그리기	0,3	**0,3**
		합계	**20**