문제 1 해설

낙하 속력이 일정하면 중력과 저항력이 정확히 평형을 이루므로

$$mg = cv^{\gamma} \qquad \text{(RE2.1)} \qquad \textbf{[1]}$$

양변에 상용로그를 취하여 정리하면 다음과 같다.

$$\lg(v) = \frac{1}{\gamma}\lg(m) + \frac{1}{\gamma}\lg\left(\frac{g}{c}\right) \qquad \text{(RE2.2)}$$

c 를 바꾸지 않고 저항력의 값을 달리하려면 컵들을 포갠다. 질량은 컵 개수에 비례하며, 공기 저항의 차이는 낙하 속력에만 의존한다.

시간만 측정할 수 있으므로, 일정한 높이 H에서 낙하하는 시간으로 위 식을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\lg(T_n) = -\frac{1}{\gamma}\lg(n) - \frac{1}{\gamma}\lg\left(\frac{mg}{c}\right) + \lg H \qquad \text{(RE2.3)} \qquad \textbf{[2]}$$

여기서 n는 포갠 컵의 수이며, T_n는 컵 n개를 포개어 낙하시키는 시간이다. m는 동일한 컵 각각의 질량이다.

측정

높이 1.90 m에서 측정하였다. 표의 낙하 시간 T_1, T_2, T_3은 각각 컵 1개, 2개, 3개에 해당한다. 평균값과 T_1, T_2, T_3의 표준 편차도 표에 제시하였다.

그림 1은 그래프와 기울기를 나타낸다. 이로부터 $\gamma = 1.84$를 얻는다.

T_1(s)	$<T_1>$(s)	표준 편차 σ (s)	δT (s)
2.51	2.51	0.089	0.02
2.50			
2.53			
2.41			
2.50			
2.47			
2.59			
2.40			
2.46			
2.47			
2.40			
2.46			
2.50			
2.44			
2.60			
2.63			
2.57			
2.62			
2.47			
2.75			

T_2(s)	$<T_2>$(s)	표준 편차 σ (s)	δT (s)
1.72	1.70	0.058	0.012
1.71			
1.63			
1.75			
1.72			
1.62			
1.75			
1.71			
1.75			
1.75			
1.72			
1.69			
1.72			
1.66			
1.59			
1.59			
1.62			
1.59			
1.66			
1.66			

T_3(s)	$<T_3>$(s)	표준 편차 σ (s)	δT (s)
1.31	1.38	0.046	0.010
1.38			
1.41			
1.41			
1.31			
1.38			
1.38			
1.38			
1.37			
1.34			
1.34			
1.41			
1.32			
1.44			
1.40			
1.48			
1.44			
1.47			
1.44			
1.37			

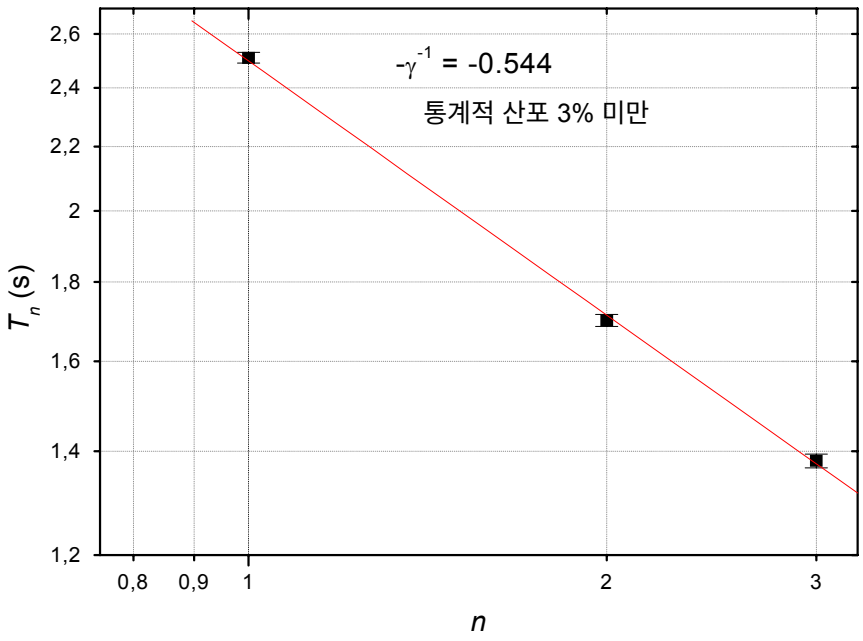


그림 RE2.1: 컵 개수에 따른 낙하 시간의 거듭제곱 관계를 나타낸 양대수 그래프. 오차 막대는 시간의 총오차이다.

오차 이론

표의 표준 편차는 다음과 같이 계산하였다.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_i \left(m_i - \langle m \rangle\right)^2}{9}} \qquad \text{여기서} \qquad \langle m \rangle = \frac{1}{n}\sum_i x_i \qquad \text{(RE2.4)}$$

무작위 오차는 다음과 같이 계산하였다.

$$\delta m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \text{(RE2.5)}$$

측정의 총오차는 다음과 같다.

$$E = \sqrt{e_T{}^2 + \delta T^2} \qquad \text{(RE2.6)}$$

여기서 $e_T = 0.01\,s$이다. 따라서 각 질량의 총오차는 다음과 같다.

$E_{T1} = 0.02\,s$
$E_{T2} = 0.015\,s$
$E_{T3} = 0.014\,s$

지수 γ의 오차 상한을 구하자.

$$\gamma = \frac{\log\frac{m_3}{m_1}}{\log\left(\frac{T_1}{T_3}\right)} \qquad \text{(RE2.7)}$$

질량의 오차는 무시할 수 있으므로 두 번째 항만 고려한다. 증분은 다음과 같다.

$$\Delta\gamma = \frac{1}{2}\ln\frac{m_3}{m_1}\left\{\frac{1}{\ln\frac{T_1-\Delta T_1}{T_3+\Delta T_3}} - \frac{1}{\ln\frac{T_1+\Delta T_1}{T_3-\Delta T_3}}\right\} \qquad \text{(RE2.8)}$$

계산하면 γ의 오차 상한을 다음과 같이 얻는다.

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma} = \frac{1}{2}\frac{\left\{\frac{1}{\ln\frac{T_3-\Delta T_3}{T_1+\Delta T_1}} - \frac{1}{\ln\frac{T_3+\Delta T}{T_1-\Delta T_1}}\right\}}{\ln\frac{T_3}{T_1}} \qquad \text{(RE2.9)}$$

그래프의 양 끝 값인 T_1과 T_3을 대입하면 다음과 같다.

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma} = 0.086$$

따라서 측정된 지수는 $\gamma = 1.84 \pm 0.16 \quad (\pm 9\,\%)$**로 나타낼 수 있다.**