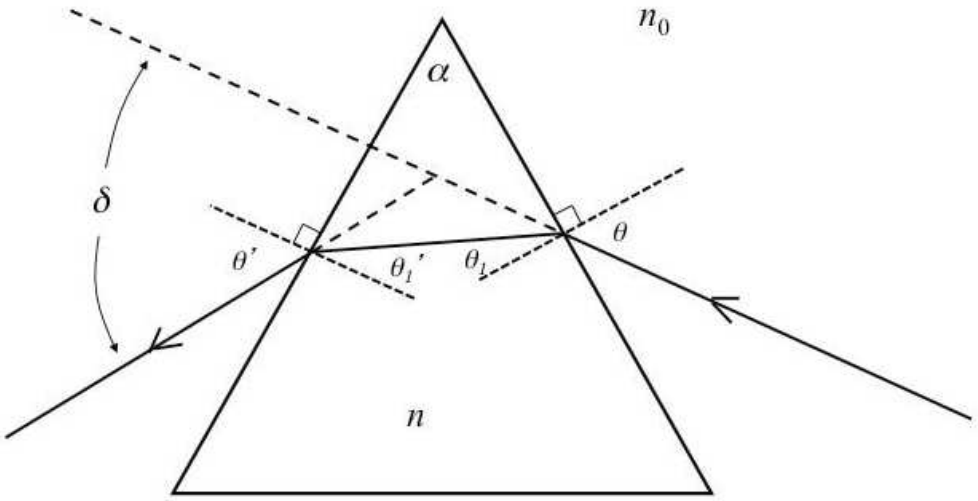
실험 문제

제13회 이베로아메리카 물리올림피아드, 2008, 멕시코 미초아칸주 모렐리아

굴절률

이 문제의 목적은 투명한 물질의 굴절률 n와,
출사 광선의 각도가 입사 광선의
각도에 따른 변화를 측정하는 것이다. 프리즘은 수지로 만든 삼각기둥이다.
물리적 원리는 간단하다. 그림을 보아라.



레이저 광선이 프리즘의 한 면에 입사하며, 그 면의 법선과 이루는 각은 θ 이다.
프리즘에 들어오면서 각도 θ_1로 굴절된 뒤,
인접한 면에 각도 θ_1'로 입사하고, 마지막으로
각도 θ'로 굴절되어 나온다. 프리즘의 꼭짓각을 α 라고 하자.
프리즘에서 굴절되어 나온 광선이 입사 광선의 방향과 이루는 각을 δ 라고 하자.
공기의 굴절률은 $n_0 = 1.0$으로 놓아라.

단색광이 한 매질에서 다른 매질로 진행할 때,
각 매질의 굴절률을 n_1과
n_2일 때 스넬 법칙은 다음과 같다:

$$n_1 \operatorname{sen}\varphi_1 = n_2 \operatorname{sen}\varphi_2 \qquad (1)$$

단, φ_1과 φ_2는 각 매질에서 광선이 경계면의 법선과 이루는 각이다.

스넬 법칙과 프리즘 및 광선의 기하학적 관계를 사용하면
다음 두 각 사이의 관계를 나타내는 함수를 얻는다.
δ와 θ 사이의 관계는 $\delta = \delta(\theta)$이다. 이 함수는
각도 θ_c에서 최솟값을 갖는다. 이를 δ_{min}이라 쓰면 $\delta_{\text{min}} = \delta(\theta_c)$이다.
$\delta(\theta)$를 θ_c에서 계산하면 δ_{min}에 대하여 다음 관계가 성립함을 보일 수 있다.

$$n \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = n_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\delta_{\text{min}} + \alpha}{2}\right) \qquad (2)$$

경고: 레이저 광선을 절대로 직접 바라보지 마시오!

준비물(제공된 것을 모두 사용할 필요는 없으며, 필요한 것만 사용하여라.)

- 프리즘
- 레이저
- 나무 받침대
- 긴 나무 스크린
- 작은 두꺼운 종이 스크린(10 cm x 10 cm)
- 눈금자
- 삼각자
- 흰 종이
- 모눈종이
- 가위
- 접착테이프
- 연필
- 연필깎이
- 지우개
- 계산기
- 실

프리즘에 결함이 있을 수 있으므로 광선이
항상 같은 면으로 입사하도록 하여라.

입사 광선은 항상 프리즘 면 중앙에 닿도록
하여라.

항상 밝은 점의 중심을 기준으로 각도를 정하여라.
이렇게 하면 불확도는 각도 측정에 포함되고,
광선의 폭은 계통 오차만 일으키게 된다.

과제 1. 다음 두 각을 측정할 수 있는 실험 장치의 모식도를 그려라.
각 δ와 θ. (3점)

과제 2. 최소 편각 공식인 식 (2)를 사용하여 프리즘의 굴절률 *n*를 구하여라. (총 8점)

(2.a) 프리즘의 각 α 를 구하여라. (1점) (2.b)
최소 편각을 실험으로 측정하고, 측정값을
표로 제시하여라. (4점)
(2.c) 각 α와 최소 편각 δ_{min}의 불확도(오차)를 구하여라. (1.5점)

(2.d) 굴절률 *n*와 그 불확도를 구하여라. (1.5점)

과제 3. 함수 관계 $\delta(\theta)$를 실험으로 구하여라. (총 6점)

(3.a) 목적에 충분한 수의 각도 쌍을 실험으로 측정하여라.
측정할 쌍은 (δ, θ) 이며, 결과를 표로 제시하여라. (3.b) 측정점을
모눈종이에 표시하여라.

과제 4. 함수 $\delta = \delta(\theta)$를 이론으로 구하고 실험과 비교하여라. (3점)

(4.a) 함수 $\delta = \delta(\theta)$의 식을 유도하여라. *도움말*: 그림에서 얻을 수 있는 다음 관계를 사용하여라.

$$\delta = \theta + \theta' - \alpha \quad \text{및} \quad \alpha = \theta_1 + \theta_1' \qquad (3)$$

(2점)

(4.b) (3.a)에서 측정한 θ에 대한 δ의 계산값을 제시하여라.
문항 (3.b)의 모눈종이에 각
θ에 대응하는 δ의 계산값을 추가하여라. 과제 2에서 얻은 굴절률 n와 각 α를 사용하여라. (1점)

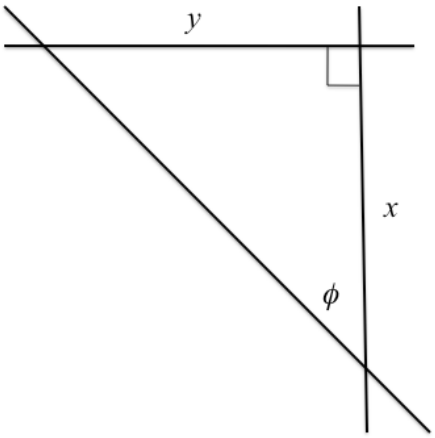
[답안지] *실험 문제*

학생 코드:	쪽 번호:	전체 쪽수:

과제 1. 필요하면 별지를 사용하여라. (총 3점)

1. 다음 각도를 측정할 수 있는 실험 장치의 모식도를 그려라.
각 δ와 θ.

각은 다음으로 구한다: $\phi = \arctan\frac{y}{x}$



[답안지] *실험 문제*

학생 코드:	쪽 번호:	전체 쪽수:

과제 2. 필요하면 별지를 사용하여라. (총 8점)

(2.a) 최소 편각 측정(도 단위)

$\delta_{\min}$
35.6
36.3
36.1
35.6
36.0

(2.b) 각 α. 의 측정. 신중하게 한 번 측정하고 거리 측정에서 비롯되는 불확도를 부여하거나, 여러 번 측정하여 평균을 구하여도 된다.

[답안지] *실험 문제*

학생 코드:	쪽 번호:	전체 쪽수:

(2.c) 불확도 분석

각 $\delta_{\min}$에 대하여 평균을 구한다.

$$\bar{\delta}_{\min} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}\delta_i = 35.9$$

불확도는 제곱 평균 편차의 제곱근으로 구한다.

$$\Delta\delta_{\min} = \sqrt{\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(\delta_i - \bar{\delta}_{\min})^2} = 0.3$$

거리로 측정한 각 α 에 대하여 다음을 얻는다.

α = 59.8 +- 0.5 도

개별 각도의 불확도는 다음과 같이 구한다. 측정값인 길이 *x*와 *y*는 각도와 다음 관계가 있다:

ϕ = arctan (y/x)

일반적인 길이는 평균 100 mm 이상이며, 길이 측정의
불확도는

$\Delta x = \Delta y$ = 1.0 mm

따라서 비 y/x의 불확도는

$\Delta(y/x) = (\Delta y/x) + y\,\Delta x/x^2$ = 0.02

이에 따른 각 ϕ (의 불확도는 대표 각도를 45º로 놓으면:

$\Delta\phi = \Delta(y/x)\cos^2\phi$ = 0.01 라디안 = 0.01 X 180/π = 0.5º

따라서 이 방법으로 측정한 모든 각도의 불확도를 0.5도로 놓을 수 있다.
따라서 각도는 소수점
첫째 자리로 쓴다. 예: ϕ = 38.7 +- 0.5

학생 코드:	쪽 번호:	전체 쪽수:

(2.d) 굴절률과 그 불확도.

최소 편각 공식을 사용한다.

$$n_1 = n_0 \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\delta_{\min} + \alpha}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}} = 1.487$$

$\delta_{\min}$과 α 의 평균값 및 $n_0 = 1.0$을 사용하였다.

불확도에는 미분 공식을 사용한다.

$$\Delta n_1 = \frac{\cos\left(\frac{\overline{\delta}_{\min} + \overline{\alpha}}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{\overline{\alpha}}{2}} \Delta\left(\frac{\delta_{\min} + \alpha}{2}\right) + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\overline{\delta}_{\min} + \overline{\alpha}}{2}\right)\cos\frac{\overline{\alpha}}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{\overline{\alpha}}{2}} \Delta\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

단,

$$\Delta\left(\frac{\delta_{\min} + \alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{(\Delta\delta)^2 + (\Delta\alpha)^2} \approx 0.005 \text{ 라디안}$$

얻는다:

$$n_1 \approx 1.487 \pm 0.007 \approx 1.49 \pm 0.01$$

$$\alpha \approx 59.8 \pm 0.5 \quad \text{도}$$

점수:

[답안지] *실험 문제*

학생 코드:	쪽 번호:	전체 쪽수:

과제 3. 필요하면 별지를 사용하여라. (총 6점)

(3.a) 각도 쌍 (δ, θ)의 실험 측정값. (도 단위)

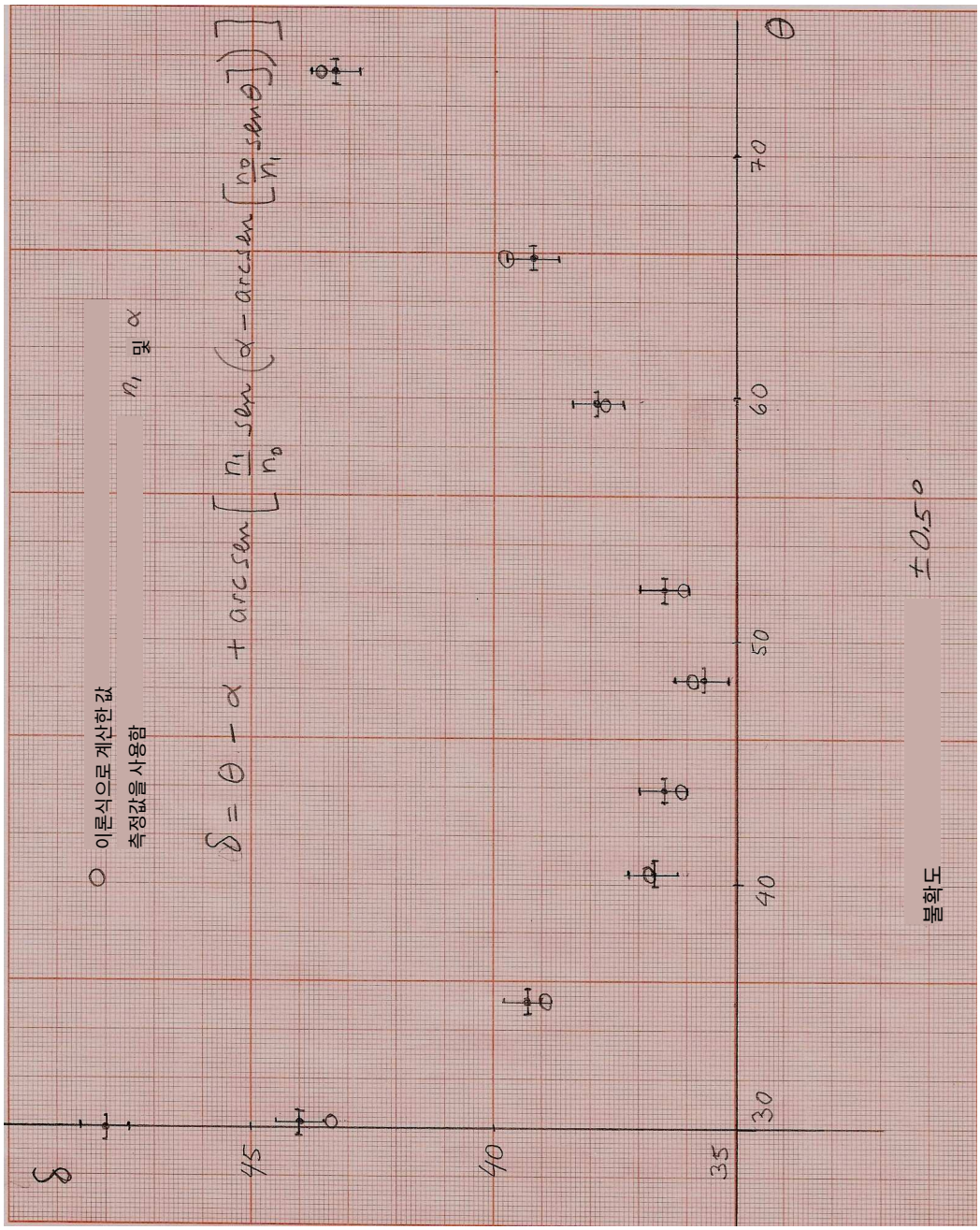
δ	θ
48.0	30.0
44.0	30.2
39.3	35.1
36.7	40.4
36.5	43.9
35.7	48.4
36.5	52.1
37.9	59.8
39.2	65.8
43.3	73.4

(3.b) 불확도는 모두 +- 0.5도이다. (2.b) 참조.

[답안지] *실험 문제*

학생 코드:	쪽 번호:	전체 쪽수:

(3.c) 측정점과 계산값의 그래프((4.b) 참조)



점수

[답안지] *실험 문제*

학생 코드:	쪽 번호:	전체 쪽수:

과제 4. 필요하면 별지를 사용하여라. (총 3점)

(4.b) 이론식 유도

다음 식에서 $\delta = \theta + \theta' - (\theta_1 + \theta_1')$ 및 $\alpha = \theta_1 + \theta_1'$

θ'만 알면 됨을 알 수 있다. 각 면에 스넬 법칙을 적용하면:

$n_1 \text{sen}\theta_1 = n_0 \text{sen}\theta$ 및 $n_1 \text{sen}\theta_1' = n_0 \text{sen}\theta'$

θ'에 대하여 풀어 δ에 대입하면

$$\delta = \theta + \text{arcsen}\left\{\frac{n_1}{n_0}\text{sen}\left[\alpha - \text{arcsen}\left(\frac{n_0}{n_1}\sin\theta\right)\right]\right\} - \alpha$$

(4.b) (3.a)의 표에 주어진 θ에 대하여 이론식으로 δ를 구한다.

$\delta_{\text{측정값}}$	θ	$\delta_{\text{계산값}}$
48.0	30.0	43.7
44.0	30.2	43.4
39.3	35.1	38.9
36.7	40.4	36.8
36.5	43.9	36.1
35.7	48.4	35.9
36.5	52.1	36.1
37.9	59.8	37.7
39.2	65.8	39.8
43.3	73.4	43.6

점들은 그래프 (3.c)에 있다.
(4.c) 입사각이 매우 작은 첫 번째 점을 제외하면
이론과 실험이 오차 범위 안에서 매우 잘 일치한다.

점수